São José dos Campos - SP
LV SBPO
LV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional
São José dos Campos, SP - 6 a 9 de novembro de 2023

Sobre a Complexidade do Problema Clique Cover em Representações $\{\llcorner\}$-EPG

Kedson Alves Silva
Universidade Federal Fluminense
R. Passo da Pátria, 152-470 - São Domingos, Niterói, RJ, Brasil
alves_kedson@id.uff.br

Tanilson Dias dos Santos
Universidade Federal do Tocantins
Avenida NS-15, Quadra 109 Norte, Palmas, TO, Brasil
tanilson.dias@mail.uft.edu.br

Uéverton dos Santos Souza
Universidade Federal Fluminense
R. Passo da Pátria, 152-470 - São Domingos, Niterói, RJ, Brasil
ueverton@ic.uff.br

RESUMO

CLIQUE COVER é um problema clássico da teoria dos grafos, onde dado um grafo G e um inteiro k, devemos verificar se $V(G)$ pode ser coberto por no máximo k cliques. Os grafos $\{\llcorner\}$-EPG são uma subclasse da classe dos grafos de interseção de caminhos em grades EPG (edge intersection graphs of paths on a grid), onde em uma representação $\{\llcorner\}$-EPG todo caminho efetua no máximo uma dobra e possui somente um dos seguintes formatos: $\{\llcorner, -, |\}$. Neste artigo, provamos que CLIQUE COVER em representações $\{\llcorner\}$-EPG é NP-completo e apresentamos um algoritmo FPT capaz de resolvê-lo utilizando o número de cliques da solução como parâmetro. Além disso, mostramos também que o problema CLIQUE COVER em representações ∂EPG_2 (subclasse de $\{\llcorner\}$-EPG) é solucionável em tempo polinomial.

PALAVRAS CHAVE. Clique Cover, $\{\llcorner\}$-EPG, Complexidade computacional.

Tópicos (TAG – Teoria e Algoritmos em Grafos, OC – Otimização Combinatória)

ABSTRACT

CLIQUE COVER is a classic graph theory problem, where given a graph G and an integer k, we must check if $V(G)$ can be covered by at most k cliques. The $\{\llcorner\}$-EPG graphs are a subclass of the class of graphs of intersection of paths on grids EPG (edge intersection graphs of paths on a grid), where in a $\{\llcorner\}$ - EPG representation every path performs at most one bend and has only one of the following formats: $\{\llcorner, -, |\}$. In this paper we prove that CLIQUE COVER in $\{\llcorner\}$-EPG representations is NP-complete and we present an FPT algorithm capable of solving it using the number of cliques in the solution as a parameter. Furthermore, we also show that the problem CLIQUE COVER in ∂EPG_2 representations (subclass of $\{\llcorner\}$-EPG) is solvable in polynomial time.

KEYWORDS. Clique Cover. $\{\llcorner\}$-EPG. Computational complexity.

Paper topics (TAG – Theory and Algorithms in Graphs, OC– Combinatorial Optimization)

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175091
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175091

1. Introdução

Definido por Golumbic et al. [2009], grafos EPG *(edge intersection graphs of paths on a grid)* formam uma classe de grafos de interseção definida da seguinte forma: um grafo não direcionado $G = (V, E)$ é dito EPG se admite uma representação EPG $H = \langle \mathcal{G}, P \rangle$ composta por um conjunto P de caminhos sobre as linhas de uma grade retangular $\mathcal{G}$ tal que cada caminho P_x corresponde a um vértice $x \in V$, $\exists\, xy \in E$ se e somente se os caminhos $P_x, P_y \in P$ compartilham pelo menos uma aresta de $\mathcal{G}$.

O estudo de grafos EPG possui como motivação prática o desenvolvimento de *layout* de circuitos digitais e *layout* de circuitos VLSI [Sinden, 1966]. Nesse caso podemos associar cada caminho em uma representação EPG a uma trilha sobre um *layout*, logo podemos tratar a otimização de representações EPG como forma de otimizar a fabricação de circuitos, veja Molitor [1991].

Em representações EPG, dizemos que um caminho P_i possui *dobra* se pelo menos dois segmentos consecutivos de P_i são dispostos em linhas de direções distintas da grade. Se um caminho não possui dobras o chamamos de *segmento*. Seja H uma representação EPG de um grafo G. Se todos os caminhos de um H possui no máximo k dobras, dizemos que H é uma representação B_k*-EPG*.

Seja G um grafo não direcionado. Dizemos que um conjunto de vértices $C \subseteq V(G)$ é uma *clique* de G se para quaisquer dois vértices $x, y \in C$, $\exists\, xy \in E(G)$. CLIQUE COVER (cobertura por cliques), definido formalmente na Tabela 1, é um problema clássico da teoria dos grafos em que dado um grafo G e um inteiro k, o objetivo é descobrir se existe em G um conjunto de no máximo k cliques onde todos os vértices de G fazem parte de pelo menos uma clique. Tal problema foi provado ser NP-completo por Karp [1972].

CLIQUE COVER	
Entrada:	Um grafo G e um inteiro k.
Objetivo:	Determinar se os vértices de G podem ser particionados em no máximo k conjuntos, onde quaisquer dois vértices que estão em um mesmo conjunto são adjacentes.

Tabela 1: Problema CLIQUE COVER.

Para uma representação EPG, digamos H, o conceito de clique também é aplicado, logo se existe em H um conjunto de caminhos K onde $\forall\, P_x, P_y \in K$, P_x e P_y compartilham dois a dois pelo menos uma aresta da grade, então K é uma clique em H. Da mesma forma o problema de CLIQUE COVER pode ser definido, assim, dado H e um inteiro k, o objetivo é determinar se existe em H no máximo k cliques onde todo caminho de G' pertence a pelo menos uma dessas cliques.

Podemos observar que na classe de grafos B_1-EPG todo caminho é representado em uma das seguintes formas: "⌞", "⌟", "⌜", "⌝", além dos segmentos "−" e "|". Pode-se muitas vezes restringir as formas dos caminhos em uma representação B_1-EPG criando as subclasse S-EPG, onde S equivale a algum dos seguintes conjuntos: {⌞}, {⌞, ⌟}, {⌞, ⌝}, {⌞, ⌟, ⌝}, e as demais variações de conjuntos são obtidos com a rotação desses conjuntos em 90°, e portanto são redundantes. Algumas das pesquisas abordando subclasses de representações S-EPG são Cameron et al. [2013] e Epstein et al. [2020].

Citado primeiramente por Brandstädt et al. [2011], os grafos ∂EPG foram posteriormente formalmente definidos e estudados por Golumbic et al. [2018]. De forma geral, grafos ∂EPG formam uma subclasse de grafos EPG, onde são considerados os quatro lados de uma grade retangular

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175091
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175091

finita e cada caminho da representação possui extremos em dois lados distintos e adjacentes da grade, ver Definição 2. Representações ∂EPG admitem algumas subclasses, uma delas é a classe das representações ∂EPG_2, onde são fixados dois lados adjacentes da grade retangular, i.e. dois lados da grade que formam um ângulo de 90º entre si, e todo caminho da representação possui um extremo em cada lado. Neste artigo trataremos problema CLIQUE COVER na classe $\{\llcorner\}$-EPG, definido na Tabela 2, e também CLIQUE COVER na classe ∂EPG_2, definido de forma similar.

CLIQUE COVER EM GRAFOS $\{\llcorner\}$-EPG	
Entrada:	Uma representação $\{\llcorner\}$-EPG H e um inteiro k.
Objetivo:	Determinar se os caminhos de H podem ser particionados em no máximo k conjuntos, onde quaisquer dois caminhos que pertencem a um mesmo conjunto compartilham pelo menos uma aresta da grade.

Tabela 2: Problema CLIQUE COVER em grafos $\{\llcorner\}$-EPG.

2. Preliminares

Denotamos como $G = (V, E)$ um grafo não direcionado, onde V e E representam os conjuntos de vértices e de arestas de G, respectivamente. Dados dois vértices $u, v \in V$, se $\exists\, uv \in E$ dizemos que u e v são vértices *adjacentes* e que uv é *incidente* a u e v. Denotamos por $N(v)$ a *vizinhança aberta* de v, i.e. o conjunto de vértices que são adjacentes a v, e $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ é a *vizinhança fechada* de v. O *grau* de v é denotado por $d(v) = |N(v)|$.

Sejam os grafos $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$. Se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$ dizemos que G' é *subgrafo* de G. Dizemos que G' é *subgrafo induzido* de G, se $V' \subseteq V$ e $E' = \{uv |\ uv \in E$ e $u, v \in V'\}$. Um *caminho em um grafo* G é uma sequência finita e alternada de vértices e arestas, onde cada aresta é incidente no vértice que a precede e no vértice que a sucede, e não há repetição de vértices.

Definição 1. *Seja $H = \langle \mathcal{G}, P\rangle$ uma representação $\{\llcorner\}$-EPG, dizemos que uma ordenação lexicográfica $\prec$ dos caminhos de P é dada da seguinte forma: para cada caminho $P_i \in P$, considere $q_p \in P_i$ como ponto do caminho P_i mais abaixo e mais à esquerda em $\mathcal{G}$. Logo, dado $P_i, P_j \in P$ onde q_{p_i} é o ponto mais abaixo e mais à esquerda de P_i e q_{p_j} é o ponto mais abaixo e mais à esquerda de P_j. Se $P_i \prec P_j$, então q_{p_i} está mais abaixo que q_{p_j} ou os dois estão sobre a mesma linha mas q_{p_i} está mais à esquerda. Caso haja empate entre dois caminhos, escolha um arbitrariamente, ver Figura 1.*

Definição 2 (Golumbic et al. [2018])**.** *Para dois pontos de limites p e q em dois limites adjacentes de uma grade retangular $\mathcal{G}$, chamamos o caminho único de dobra única conectando p e q em $\mathcal{G}$, usando nenhum outro ponto de limite de $\mathcal{G}$ como o caminho **gerado** por (p, q). Um caminho em $\mathcal{G}$ é chamado de **gerado por limite**, se for gerado por dois pontos em limites adjacentes de $\mathcal{G}$. Um grafo G é chamado de **grafo de aresta-interseção de caminhos gerado por limite** em uma grade, grafos ∂EPG para abreviar, se existe uma grade retangular $\mathcal{G}$ e uma representação ψ que atribui a cada vértice em G, um caminho gerado pela fronteira em $\mathcal{G}$ tal que dois vértices $u, v \in V(G)$ são adjacentes em G, se e somente se os caminhos correspondentes $\psi(u)$ e $\psi(v)$ compartilham uma aresta da grade $\mathcal{G}$ em comum. Neste caso, chamamos $\langle \mathcal{G}, P\rangle$ uma representação ∂EPG de G, onde P é o multiconjunto $\{\psi(v) : v \in V(G)\}$.*

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175091
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175091

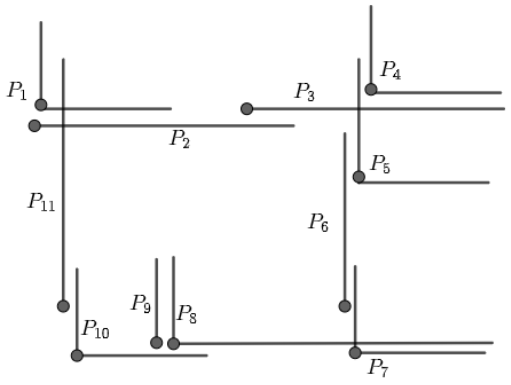


Figura 1: Representação $\{\llcorner\}$-EPG com ordenação de caminhos
$(P_{10} \prec P_9 \prec P_8 \prec P_7 \prec P_{11} \prec P_6 \prec P_5 \prec P_2 \prec P_1 \prec P_3 \prec P_4)$.

3. Complexidade de CLIQUE COVER em grafos $\{\llcorner\}$-EPG

Nesta seção mostramos que CLIQUE COVER em grafos $\{\llcorner\}$-EPG é NP-completo. Nossa demonstração se baseia em uma redução a partir do problema VERTEX COVER em grafos planares com grau máximo três, já provado ser NP-completo por Lichtenstein [1982].

Dizemos que um grafo $G = (V, E)$ é planar se seus vértices podem ser fixados em um plano como pontos e suas arestas desenhadas como curvas de forma que entre duas arestas e_1 e e_2 não ocorra cruzamentos. Além disso, se para todo $v \in V, d(v) \leq 3$, dizemos que G é planar de grau máximo 3.

O problema VERTEX COVER (cobertura por vértices), pode ser definido da seguinte forma:

VERTEX COVER	
Entrada:	Um grafo G e um inteiro k.
Objetivo:	Determinar se existe um conjunto S formado por no máximo k vértices de forma que todas as arestas de G possuem pelo menos uma extremidade em um vértice de S.

Tabela 3: Problema VERTEX COVER.

Lema 3. CLIQUE COVER *em grafos* $\{\llcorner\}$*-EPG* $\in \mathcal{NP}$.

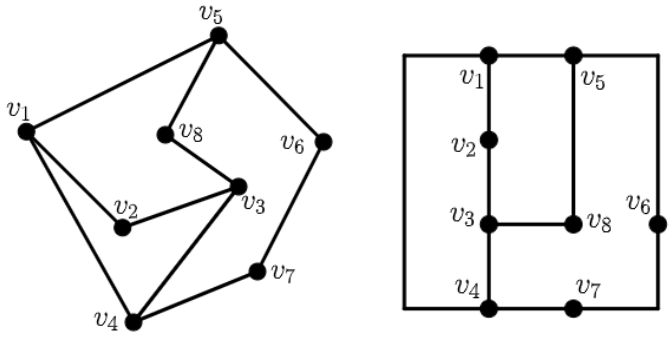
Demonstração. Para certificar uma instância SIM do problema CLIQUE COVER em grafos $\{\llcorner\}$-EPG basta considerar como certificado um conjunto de cliques $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$. Claramente podemos verificar em tempo polinomial no tamanho da entrada, se cada elemento de C é uma clique e se todo caminho da representação faz parte de pelo menos uma clique de C. Logo CLIQUE COVER em representações $\{\llcorner\}$-EPG $\in \mathcal{NP}$. □

Lema 4. VERTEX COVER *em grafos planares de grau máximo 3 se reduz em tempo polinomial a* CLIQUE COVER *em representações* $\{\llcorner\}$*-EPG.*

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175091
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175091

Demonstração. O fluxo da redução se dá da seguinte forma: seja $G = (V, E)$ um grafo planar de grau máximo 3. Construímos um grafo $G' = (V', E')$ de forma que uma cobertura por vértices de tamanho k em G corresponde a uma cobertura por vértices de tamanho $k + \rho$ em G', e vice-versa. Dado G', construímos uma representação $\{\llcorner\}$-EPG chamada de H, de forma que uma cobertura por vértices de tamanho $k + \rho$ em G' corresponde a uma cobertura por cliques de tamanho $k + \rho$ em H, e vice-versa.

Em 1981, Valiant mostrou que todo grafo planar admite uma incorporação planar como subgrafo de uma grade onde os vértices de G são mapeados a vértices da grade e as arestas como caminhos retilíneos que acompanham as linhas da grade. Além disso, Valiant [1981] mostrou que tal incorporação pode ser obtida em tempo polinomial. Dessa forma, dada uma aresta $e_i \in E(G)$ dizemos que s_{e_i} é uma sequência de segmentos que corresponde e_i na representação de G incorporada na grade, assim $|s_{e_i}|$ é o número de segmentos em que s_{e_i} é formada. Dizemos também que $\rho = \sum_{e_i \in E(G)} |s_{e_i}|$, ver Figura 2.



(a) Grafo G. (b) Grafo G incorporado na grade.

Figura 2: Incorporação de G na grade.

Dada a representação de G incorporada na grade, criamos uma representação G' obtida da seguinte forma: seja s_{e_i} a representação de uma aresta de G incorporada na grade, adicionamos dois vértices artificiais em cada segmento que forma s_{e_i} o separando em três segmentos, dessa forma para uma dada sequência de segmentos s_{e_i} são adicionados $2|s_{e_i}|$ novos vértices artificiais, ver Figura 3-(a).

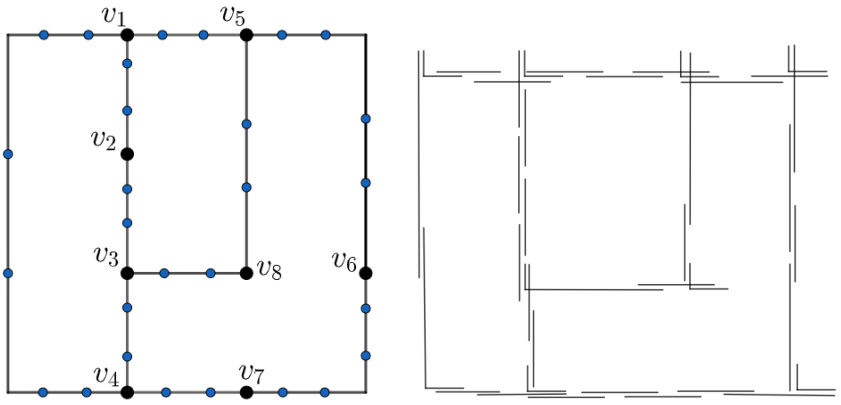
Neste ponto, devemos mostrar que se G possui uma cobertura por vértices de tamanho k então G' possui uma cobertura por vértices de tamanho $k+\rho$. Suponha que G possua uma cobertura por vértices S de tamanho k. Podemos obter uma cobertura por vértices S' para G' como segue: cada vértice em $V' \cap S$ é adicionado em S'. Para cada aresta uv de G temos pelo menos um de seus extremos em S, suponha que $u \in S$. Seja $u, a_1, a_2, \ldots, a_{2l-1}, a_{2l}, v$ o caminho de G' que representa a aresta uv de G, onde l é o número de segmentos da aresta uv na incorporação e a_i é um vértice artificial adicionado na construção de G'. Como $u \in S$, podemos adicionar a_{2i} em S' para $i = 1, 2, \ldots, l$. Dessa forma, toda aresta de G' será incidente a algum vértice de S' e, portanto, S' é uma cobertura por vértices de G'. Note que para cada segmento é adicionado um vértice extra, portanto S' possui tamanho $k + \rho$.

Mostraremos agora que dado um grafo G' com uma cobertura por vértices de tamanho $k + \rho$, existe em G uma cobertura por vértices de tamanho k, para tal: suponha que G' possui uma cobertura por vértices mínimo S' de tamanho $k + \rho$. Por construção, para cada segmento

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175091
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175091

temos pelo menos um vértice artificial na cobertura por vértices S'. Isso já nos dá pelo menos ρ vértices artificiais em S'. Logo $|S' \cap V| \leq k$. Sem perda de generalidade, para cada caminho $P_{uv} = u, a_1, a_2, \ldots, a_{2l-1}, a_{2l}, v$ representando uma aresta uv de G, podemos assumir que u ou v está em S'. Caso contrário as $2l+1$ arestas de P_{uv} estariam sendo cobertas por apenas vértices artificiais. Como cada vértice artificial possui grau dois, seriam necessários pelo menos $l+1$ vértices artificiais para cobrir as $2l+1$ arestas de P_{uv}. Sendo assim, podemos fazer uma substituição local trocando os vértices de $V(P_{uv}) \cap S'$ por outros $l+1$ vértices que cobrem as $2l+1$ arestas de P_{uv} e contém u ou v. Sendo S' uma cobertura por vértices de G' tal que para cada P_{uv} ou u ou v está em S', temos que $S = S' \cap V$ é uma cobertura por vértices de tamanho no máximo k de G.

Dado G', nos resta mostrar que é possível construir uma representação $\{\llcorner\}$-EPG $H = \langle \mathcal{G}, P \rangle$, onde P é o conjunto de caminhos de H e $\mathcal{G}$ é a grade retangular, e além disso, é preciso mostrar que se G' possui uma cobertura por vértices de tamanho $k+\rho$, então H possui uma cobertura por cliques de tamanho $k+\rho$, o contrário também deve ser verdade. A construção de H ocorrerá em cima de uma incorporação de G' substituindo os elementos de G' por elementos de H, assim, temos que cada aresta $e_i \in E(G')$ representará um caminho $P_{e_i} \in P$ e cada vértice $v \in V(G')$ representará uma clique C_i de tamanho $d(v)$, onde as arestas que incidem em v representam os caminhos de C. Perceba que o grau máximo de um vértice de G' é três, assim o tamanho da maior clique de H é três.



(a) Grafo G' incorporado. (b) Representação $\{\llcorner\}$-EPG H.

Figura 3: Geração de H.

Cada caminho $P_{e_i} \in P$ possui, a princípio, o formato correspondente ao formato da sequência de segmentos s_{e_i} que representa a aresta e_i em G', logo, temos que mostrar que é possível construí-los de modo a não possuírem mais que uma dobra e seguirem os formatos "$\llcorner$", "$-$" ou "$|$".

Antes de começar a construção de H precisamos relembrar alguns fatos da construção do grafo G'. Perceba que nenhum vértice de $V(G') \setminus V(G)$ é incidido por segmentos de direções distintas, já que foram adicionados na parte interna de cada segmento da incorporação de G. Além disso, por construção, as arestas de G' que possuem dobra são incidentes a dois vértices de grau dois pertencentes a $V(G') \setminus V(G)$. Ademais, as arestas incidentes a um mesmo vértice $w \in V(G') \setminus V(G)$ que é vizinho de um vértice $v \in V(G)$ são arestas que não fazem dobra na incorporação planar de G'. Em tempo, vale ressaltar que por construção de G', todo vértice de $V(G') \setminus V(G)$ ou é incidido por uma aresta com dobra ou é adjacente a um vértice de $V(G)$. A construção de H a partir da incorporação planar de G' como subgrafo de grade é dado pelos passos a seguir.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175091
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175091

1. Se $v \in V(G)$, $d(v) = 2$, e as arestas incidentes a v, digamos e_i e e_j, possuem direções opostas (i.e. horizontal/vertical), onde $e_i = vw$ possui direção horizontal e e_j possui direção vertical. Então, em H, a aresta e_i será representada por um caminho P_{e_i} na forma (⌞) onde seu ponto de dobra ocorre na posição de v da grade e o caminho P_{e_j} é representado por um segmento vertical que se estende até compartilhar uma aresta da grade com o segmento vertical de P_{e_i}, veja Figura 4. Como $v \in V(G)$, por construção de G', os vizinhos de v possuem grau dois em G' (logo w possui grau dois). Como a aresta $e_i = vw$ foi representada com uma dobra no formato de ⌞, dependendo da posição de w com relação a posição de v na incorporação planar de G', o caminho P_{e_k} representando a segunda aresta de w deverá se estender até posição de v de acordo com a incorporação planar de modo a fazer interseção com P_{e_i} e representar w como a interseção de P_{e_i} e P_{e_k}. Como as arestas de w não fazem dobra e possuem a mesma direção na incorporação planar de G', a construção é consistente.

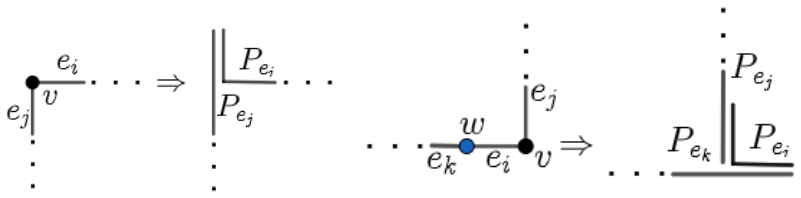


Figura 4: Regra 1

2. Se $v \in V(G)$, $d(v) = 2$ e as duas arestas que incidem em v, e_i e e_j, possuem a mesma direção: em H, P_{e_i} e P_{e_j} são representados por segmentos na mesma direção que e_i e e_j, se estendendo até compartilhar uma aresta da grade que passa pela posição de v, veja Figura 5.

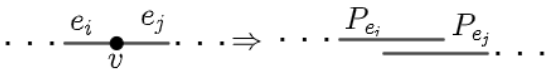


Figura 5: Regra 2

3. Se $v \in V(G)$, $d(v) = 3$ onde as arestas e_i, e_j e e_k são incidentes a v, com e_j e e_k possuindo a mesma direção da grade, e e_i possuindo direção oposta. Então, em H, P_{e_i} é representado por um caminho da forma (⌞) onde seu ponto de dobra ocorre na posição de v da grade, e os caminhos P_{e_j} e P_{e_k} são representados por segmentos que possuem a mesma direção que e_j e e_k, porém eles se estendem até compartilharem mutuamente uma aresta da grade com P_{e_i} que passa pela posição de v, veja Figura 6. Por construção, o vértice w também incidente a e_i possui grau dois e suas arestas não fazem dobra na incorporação planar de G'. Seja e_l a segunda aresta incidente a w, como descrito no item 1, o caminho P_{e_l} é representado por um segmento no mesmo sentido que a aresta e_l, e portanto poderá se estender até compartilhar uma aresta da grade com P_{e_i} representando w como a interseção de P_{e_i} e P_{e_l}.

4. Se $v \in V(G') \setminus V(G)$, então $d(v) = 2$. Sejam e_i e e_j as duas arestas incidentes a v, onde e_i e e_j são arestas que não fazem dobra na incorporação planar de G', assim e_i e e_j possuem a mesma direção na grade. Se e_i é a aresta incidente a um vértice $u \in V(G)$, então P_{e_i} já foi definido em H anteriormente e mesmo que seja representado como um caminho com dobra

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175091
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175091

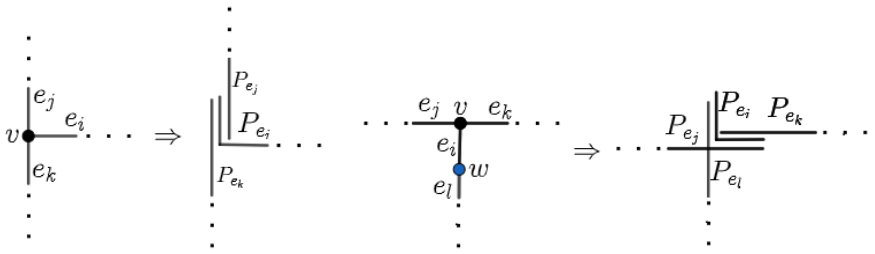


Figura 6: Regra 3.

na forma de $\llcorner$, P_{e_i} ainda possui um segmento na mesma direção da grade que e_i, logo, P_{e_j} é representado como um caminho formado por um segmento que se estende até compartilhar uma aresta da grade com o caminho P_{e_i}, veja Figura 7.

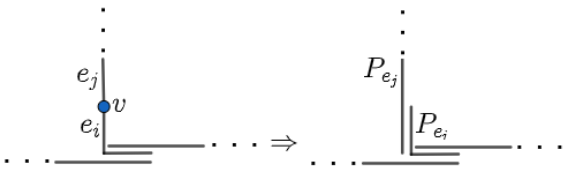


Figura 7: Regra 4.

5. Se $e_i = vw \in E(G')$ e e_i possui dobra na incorporação planar de G' como subgrafo de grade que estamos utilizando, então $v, w \in V(G') \setminus V(G)$, ambos possuem grau dois, e, por construção, e_i efetua exatamente uma dobra. Seja e_j a outra aresta incidente a v e e_k a outra aresta incidente a w, temos que: P_{e_i} será representado por um caminho na forma de $\llcorner$ onde seu ponto de dobra ocorre no mesmo local onde e_i dobra, as arestas P_{e_j} e P_{e_k} são representadas por segmentos no mesmo sentido que e_j e e_k respectivamente, logo, podem se estender até compartilhar uma aresta com P_{e_i}, veja Figura 8. Perceba que se P_{e_j} e P_{e_k} já foram definidos pela regra 4, então eles são segmentos no mesmo sentido que e_j e e_k, dessa forma, podem se estender até compartilharem uma aresta com P_{e_i}.

Perceba que H é uma representação $\{\llcorner\}$-EPG e todo os vértices de G' foram transformados em cliques, ver Figura 3-(b). Perceba também que se em G' existe uma cobertura por vértices V_c onde $|V_c| = k + \rho$, então em H o conjunto de cliques C que é composto por cliques que representam os vértices de V_c, cobrem todos os caminhos de H, i.e. se $P_i \in P$ então $\exists\, C_i \in C$ tal que $P_i \in C_i$ e $|C| = k + \rho$, da mesma forma, se em H existe uma cobertura por cliques de tamanho $k + \rho$, como podemos assumir que as cliques são maximais, então o conjunto de vértices em G' que representam essas cliques correspondem a uma cobertura por vértices de tamanho $k + \rho$. □

Teorema 5. CLIQUE COVER *em representações* $\{\llcorner\}$*-EPG é NP-completo.*

Demonstração. Segue dos Lemas 3 e 4. □

Corolário 6. *Dado a representação* $\{\llcorner\}$*-EPG* $H = \langle \mathcal{G}, P \rangle$*, temos que* H *é a representação EPG de um grafo* G_H *que possui as seguintes propriedades:*

- G_H *é o grafo linha de* G'*;*

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175091
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175091

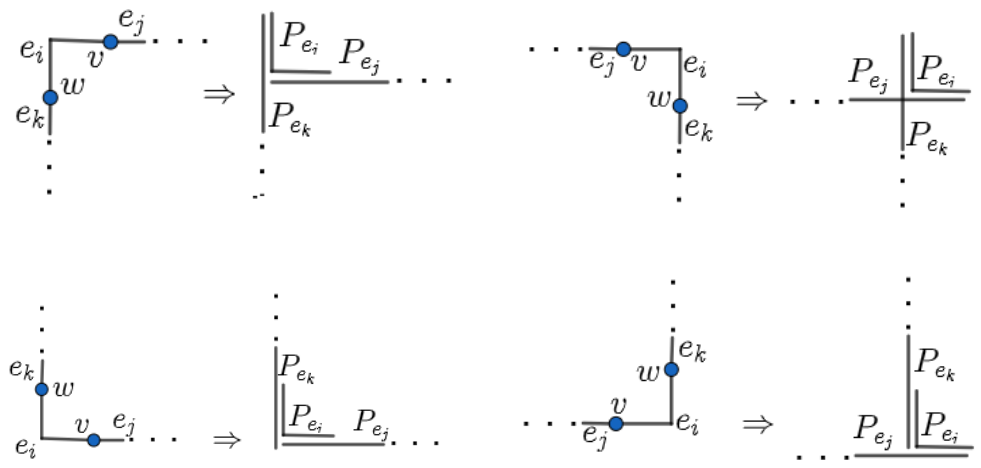


Figura 8: Regra 5.

- *Para todo* $v \in V(G_H)$, $d(v) \leq 3$*;*
- G_H *é planar.*

Demonstração. Seja G' o grafo planar de grau máximo três que serviu de base para a construção de H, e seja H uma representação EPG de um grafo G_H. Pela construção de H, cada caminho $P_i \in P$ corresponde a uma aresta de G', se duas arestas de G' incidem a um mesmo vértice, seus respectivos caminhos em H compartilham pelo menos uma aresta da grade. Seja G_l o grafo linha de G', por definição de grafo linha, temos que cada aresta de G' corresponde a um vértice de G_l e para duas arestas de G' que possuem um vértice em comum, temos uma aresta entre seus respectivos vértices em G_l. Dessa forma, podemos ver que G_H é isomorfo a G_l, portanto se G_l é o grafo linha de G', então G_H também é grafo linha de G'.

Perceba que em G' pela adição dos novos vértices em G, nenhuma aresta é incidente a dois vértices de grau três, dessa forma, uma aresta pode no máximo ser adjacente a um vértice de grau três e a outro de grau dois, com isso, uma aresta possui no máximo três arestas distintas que incidem em vértices juntamente como ela, logo, seu respectivo vértice em G_H possui no máximo grau três, concluímos assim que todo vértice $v \in G_H$ possui no máximo grau três.

Sabemos que o grafo linha de um grafo planar é planar se, e somente se, todos os vértices desse grafo possui grau no máximo quatro e todo vértice de grau quatro é um vértice de corte, ver Sedláček [1964]. Dito isso, vemos que G' é um grafo planar e todo vértice de G' possui grau no máximo três, portanto, se G_H é um grafo linha de G', então G_H é planar. □

4. CLIQUE COVER em grafos ∂EPG$_2$

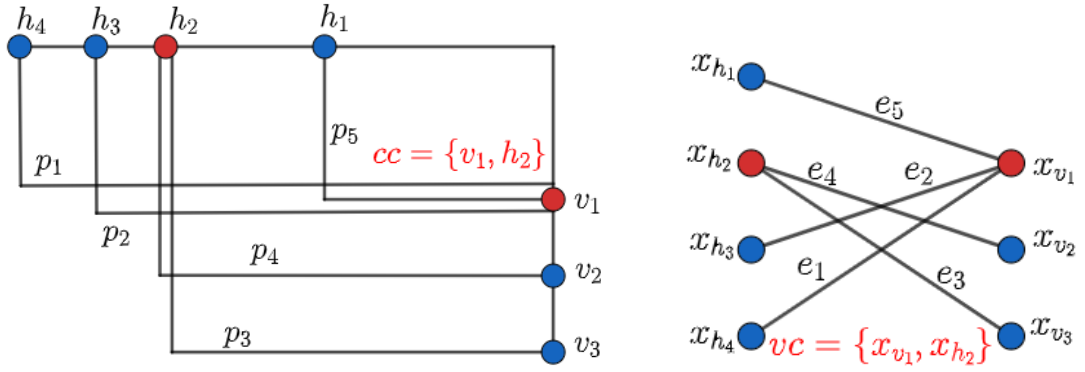
Nesta seção abordaremos o problema CLIQUE COVER em representações ∂EPG$_2$. Considere $H = \langle \mathcal{G}, P \rangle$ uma representação ∂EPG$_2$, onde P corresponde aos caminhos e $\mathcal{G}$ a uma grade retangular (considere que os lados de $\mathcal{G}$ onde os caminhos se originam é o lado horizontal superior e o lado vertical direito). Construiremos um grafo G bipartido onde uma cobertura por vértices em G equivale a uma cobertura por cliques em $\mathcal{G}$, e vice-versa.

Teorema 7 (Teorema de Kőnig, 1931)**.** *Em qualquer grafo bipartido, o tamanho do emparelhamento máximo é igual ao tamanho da cobertura de vértice mínima.*

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175091
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175091

Teorema 8. *O problema* CLIQUE COVER *em representações ∂EPG$_2$ é solucionável em tempo polinomial.*

Demonstração. Dado $P_i \in P$ um caminho gerado por (p, q), temos que p é o ponto localizado no lado horizontal superior de $\mathcal{G}$ e q no lado vertical direito. Dados dois caminhos $P_i, P_j \in P$, onde P_i é gerado por (p, q) e P_j gerado por (w, z), se P_i e P_j compartilham alguma aresta de $\mathcal{G}$, por definição, eles possuem um ponto de limite em comum, i.e. ou $(p = w)$ ou $(q = z)$.



(a) Representação ∂EPG$_2$. (b) Grafo bipartido.

Figura 9: CLIQUE COVER em grafos ∂EPG.

Criamos então o grafo bipartido $G = ((V_1, V_2), E)$ da seguinte forma: seja V_1 o conjunto de vértices que representa o conjunto de pontos do lado horizontal superior da grade $\mathcal{G}$ onde pelo menos um caminho $P_i \in P$ possui extremo, e da mesma forma V_2 é o conjunto de vértices que representa o conjunto de pontos do lado vertical direito onde pelo menos um caminho $P_i \in P$ possui extremo. E para cada caminho $P_i \in P$ gerado por (p, q), existirá uma aresta $e_i \in E$ entre os vértices que representam p e q em G.

Perceba que entre os vértices do conjunto V_1 não existem arestas, assim como entre os vértices do conjunto V_2, logo G é um grafo bipartido. Dessa forma, com uso da prova do teorema de Kőnig (Teorema 7), trabalhando com fluxo máximo podemos encontra em G em tempo polinomial uma cobertura por vértices mínimo X.

Neste ponto, seja $X = \{v_1, v_2, \ldots, v_x\}$ uma cobertura por vértices mínimo G , onde $|X| = x$. Em $\mathcal{G}$, cada vértice $v_i \in X$ representa um ponto de limite p' da grade. Logo, o conjunto formado pelos caminhos $P_i \in P$ que atingem o ponto p' mutuamente, compartilham a última aresta da grade incidente a p', digamos aresta $e_{p'}$, assim em $e_{p'}$ existe a clique C'_p composta por esses caminhos. Dessa forma existe em $\mathcal{G}$, o conjunto de cliques $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_x\}$ onde cada elemento representa um vértice de X e todo caminho $P_i \in P$ está contido em pelo menos uma clique de C, concluímos assim que C é uma cobertura por cliques de tamanho x em $\mathcal{G}$ onde C também é uma cobertura por cliques mínimo. □

5. Algoritmo FPT para k-CLIQUE COVER em grafos $\{\llcorner\}$-EPG

Nesta seção será apresentado um algoritmo FPT para CLIQUE COVER parametrizado pelo tamanho da solução k. Denotamos por k-CLIQUE COVER tal problema parametrizado. Seja $H = \langle \mathcal{G}, P \rangle$ uma representação $\{\llcorner\}$-EPG. Crie uma lista L_p formada pelos caminhos de P ordenados lexicograficamente, como indicado na Definição 1.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175091
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175091

Observação 9. *Seja P_i o último elemento da lista L_p, logo P_i possui o ponto q_{p_i} mais alto e mais à direta entre todos os pontos de todos os caminhos, além disso, podemos dizer que q_{p_i} está localizado em um ponto x de $\mathcal{G}$. Se q_{p_i} for um ponto de dobra do caminho P_i, todo caminho P_j que compartilha uma aresta de $\mathcal{G}$ com P_i utiliza a aresta horizontal $e_h \in \mathcal{G}$ ou a aresta vertical $e_v \in \mathcal{G}$, sendo que ambas as arestas atingem o ponto x e P_i possui segmento tanto em e_h quanto em e_v (se P_i for um segmento, ele está posicionado ou sobre e_i ou sobre e_j, não em ambos). Dessa forma, P_i faz parte de no máximo duas cliques maximais, digamos C_h que está sobre a aresta e_h e C_v que está sobre a aresta e_v.*

A partir da Observação 9, percebemos que para o caminho P_i da última posição de L_p, temos que pelo menos uma das cliques C_h ou C_v deve fazer parte do CLIQUE COVER de H, caso contrário P_i não seria coberto, logo, temos essas duas opções de cliques para cobrir P_i. Podemos perceber também que com a escolha de uma clique para cobrir P_i teríamos no máximo $k-1$ cliques para cobrir os caminhos ainda não cobertos em H. Usando esses princípios criamos o Algoritmo 1. Tal algoritmo é FPT limitado por k, e foi obtido usando a técnica de *bounded search tree* (árvore de busca limitada).

A ideia básica do algoritmo é a cada chamada da função escolher ou a clique horizontal ou a clique vertical para cobrir o último caminho da lista L_p, em seguida removemos de L_p todos os caminhos coberto por esta clique e fazemos uma nova chamada da função com a nova instancia de L_p e $k = k - 1$.

Algoritmo 1: CLIQUE-COVER-$\{\llcorner\}$-EPG $(\mathcal{G}, L_p, k)$

Entrada: Representação $\{\llcorner\}$-EPG $\mathcal{G}$, lista de caminhos $L_p = \{P_i \in P(\mathcal{G})\}$ em ordem lexicográfica e um inteiro k
Saída: "*SIM*" se $\mathcal{G}$ possui uma cobertura por cliques de tamanho no máximo k e "*NÃO*" caso contrário

$P_i \leftarrow$ último elemento de L_p
$C_h \leftarrow$ clique horizontal que contém o segmento horizontal mais à esquerda de P_i
$C_v \leftarrow$ clique vertical que contém o segmento vertical mais abaixo de P_i

$RC_h \leftarrow$ "*NÃO*"
$RC_v \leftarrow$ "*NÃO*"

se $k \geq 0$ ***e*** $L_p = \emptyset$ **então**
  retorna *"SIM"*
fim
se $k \leq 0$ ***e*** $L_p \neq \emptyset$ **então**
  retorna *"NÃO"*
fim

se $C_h \neq \emptyset$ **então**
  $L'_p \leftarrow L_p \setminus C_h$
  $k' \leftarrow k - 1$
  $RC_h \leftarrow$ CLIQUE-COVER-$\{\llcorner\}$-EPG$(\mathcal{G}, L'_p, k')$
fim
se $C_v \neq \emptyset$ **então**
  $L''_p \leftarrow L_p \setminus C_v$
  $k'' \leftarrow k - 1$
  $RC_v \leftarrow$ CLIQUE-COVER-$\{\llcorner\}$-EPG$(\mathcal{G}, L''_p, k'')$
fim
retorna $RC_h \vee RC_v$

Para a complexidade do Algoritmo 1, temos que cada nó da árvore possui no máximo dois filhos, como o k é decrementado em cada chamada, a árvore possui altura k, logo a complexidade da algoritmo é $O(2^k.n^{O(1)})$.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175091
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175091

6. Conclusões

Neste artigo, mostramos que o problema CLIQUE COVER é NP-completo em grafos $\{\llcorner\}$-EPG, onde provamos fazendo uma redução do problema VERTEX COVER em grafo planares de grau máximo 3. Mostramos também CLIQUE COVER em grafos ∂EPG é polinomial e equivale ao problema VERTEX COVER em grafos bipartido. Para finalizar apresentamos um algoritmo FPT para o problema CLIQUE COVER em representações $\{\llcorner\}$-EPG. Como trabalhos futuros, pretendemos estudar as complexidades das demais classes de grafos ∂EPG, e além disso, também é do nosso interesse estudar a complexidade de outros problemas da teoria dos grafos na classe EPG.

Referências

Brandstädt, A., Golumbic, M. C., Heggernes, P., e McConnell, R. M. (2011). Exploiting graph structure to cope with hard problems (dagstuhl seminar 11182). *Dagstuhl Reports*, 1(5):29–46. URL https://doi.org/10.4230/DagRep.1.5.29.

Cameron, K., Chaplick, S., e Hoàng, C. T. (2013). Edge intersection graphs of L-shaped paths in grids. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 44:363–369. ISSN 1571-0653. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1571065313002734.

Epstein, D., Golumbic, M. C., Lahiri, A., e Morgenstern, G. (2020). Hardness and approximation for L-EPG and B1-EPG graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 281:224–228. ISSN 0166-218X. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X19304548. LAGOS'17: IX Latin and American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium, C.I.R.M., Marseille, France - 2017.

Golumbic, M. C., Lipshteyn, M., e Stern, M. (2009). Edge intersection graphs of single bend paths on a grid. *Networks: An International Journal*, 54(3):130–138.

Golumbic, M. C., Morgenstern, G., e Rajendraprasad, D. (2018). Edge-intersection graphs of boundary-generated paths in a grid. *Discrete Applied Mathematics*, 236:214–222. ISSN 0166-218X. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X17304699.

Karp, R. M. (1972). *Reducibility among Combinatorial Problems*, p. 85–103. Springer US, Boston, MA. ISBN 978-1-4684-2001-2. URL https://doi.org/10.1007/978-1-4684-2001-2_9.

Lichtenstein, D. (1982). Planar formulae and their uses. *SIAM journal on computing*, 11(2):329–343.

Molitor, P. (1991). A survey on wiring. *Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik*, 27(1):3–19.

Sedláček, J. (1964). Some properties of interchange graphs, theory of graphs and its applications (proceedings of the symposium, smolenice, 1963).

Sinden, F. W. (1966). Topology of thin film RC circuits. *Bell System Technical Journal*, 45(9): 1639–1662.

Valiant, L. G. (1981). Universality considerations in VLSI circuits. *IEEE Transactions on Computers*, 100(2):135–140.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175091
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175091