São José dos Campos - SP
LV SBPO
LV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional
São José dos Campos, SP - 6 a 9 de novembro de 2023

Jogos baseados em torres de diferentes capacidade

Lia Martins
PPGI - Instituto de Computação
Universidade Federal do Amazonas
IFAM - *Campus* Manaus Zona Leste
Manaus-AM, Brasil
lia.martins@icomp.ufam.edu.br

Rosiane de Freitas
PPGI - Instituto de Computação
Universidade Federal do Amazonas
Manaus-AM, Brasil
rosiane@icomp.ufam.edu.br

RESUMO

O armazenamento e manipulação de produtos é uma questão crucial em cadeias logísticas e trazem importantes desafios teóricos. Em essência, princípios básicos do empilhamento com restrições de recursos, espaço e tempo podem ser bem estudados através do jogo da Torre de Hanoi (ToH), que na versão clássica consiste em três hastes e n discos com raios diferentes, empilhados em ordem crescente de tamanho, em uma haste origem. O objetivo do jogo é mover toda a pilha de uma haste origem para uma de destino. A Torre de Hanoi pode ser representada por um grafo simples, conexo e planar, baseado no Triângulo de Sierpinski. Neste trabalho o objetivo é o de investigar variações possíveis da ToH quando as hastes, ou pilhas de discos, tiverem capacidades distintas resultando na proposta de um jogo baseado no teste neurocognitivo conhecido por Torre de Londres e na variação proposta, intitulada jogo da Torre de Hanoi-Londres, sendo apresentados uma caracterização destes jogos e suas propriedades em grafos.

PALAVRAS CHAVE. problemas de empilhamento, teoria dos grafos, Torre de Hanoi.

Tópicos: Otimização Combinatória, Teoria e Algoritmos em Grafos, Logística e Transportes, PO na Indústria.

ABSTRACT

The storage and handling of products is a crucial issue in supply chains and poses important theoretical challenges. In essence, basic principles of stacking with resource, space, and time constraints can be well observed in the Tower of Hanoi (ToH) game, which in the classic version consists of three rods and n disks with different radii, stacked in ascending order in size at the origin. The object of the game is to move the entire stack from a source rod to a destination rod. The Tower of Hanoi can be represented by a simple, connected, and planar graph, based on the Sierpinski Triangle. In this work, the objective is to investigate possible variations of the ToH when the rods, or batteries have different capacities, resulting in the proposal of a game based on the neurocognitive test known as Tower of London and on the proposed variation entitled Tower of Hanoi-London game, being presented a characterization of these games and their properties in graphs.

KEYWORDS. pile problems, graph theory, Tower of Hanoi.

Paper topics: Combinatorial Optimization, Theory and Algorithms in Graphs, Logistics and Transport, PO in Industry.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175056
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175056

1. Introdução

Muitos processos de cadeias logísticas envolvem a manipulação de itens empilhados em uma torre que precisam ser transferidos para outra, visando atender diferentes restrições de espaço, tamanho, peso, prioridade, dentre outros. Em pesquisa operational tais problemas são comhecidos como problemas de empilhamento (do inglês *pile problems*) na gestão de logística [Hempel et al., 2006]. Por exemplo, suponha grandes peças de concreto para uma ponte moderna, Figura 1(a), ou construção de edifícios moderno, Figura 1(b), com arquitetura assimétrica onde manter o equilíbrio das vigas e colunas é uma tarefa difícil. Ou ainda, desvio de trens em um pátio de triagem. Um problema de pré-organização de contêineres, Figura 1(c), cujo objetivo é encontrar um conjunto de movimentos de contêineres para alcançar um arranjo final que satisfaça certas restrições [Huang e Lin, 2012]. Para solucionar tal problema, [Lu e Dillon, 1995] propuseram a implementação de paralelismo da Torre de Hanoi, no qual é permitido movimentos simultâneos de discos em uma única etapa. Esses autores analisaram três versões de paralelismo, considerando dois fatores: a ordem de movimentação dos discos e a utilização de recursos das hastes.



Figura 1: (a) Construção de uma ponte moderna; (b) Construção de um edifício; (c) Organização de contêineres em um navio.

Um esquema de rotação de *backup* de dados em mídias do computador (como fitas) que minimiza, por reutilização, o número de mídias usada, é outro exemplo de aplicação da Torre de Hanoi, apresentado na Figura 2. O esquema determina como e quando cada parte do armazenamento removível é usada para um trabalho de *backup* e por quanto tempo ele é retido depois de ter os dados de *backup* armazenados nele. Usando um método recursivo para otimizar o ciclo de *backup*, baseando-se na matemática da Torre de Hanoi, cada fita corresponde a um disco no quebra-cabeça e cada movimento do disco para uma haste diferente corresponde a um *backup* para essa fita. Assim, em um ciclo de uma semana, a primeira fita pode ser usada mais frequentemente como a cada 2 dias (1, 3, 5, 7, ...), a segunda é usada a cada 4 dias (2, 6, 9, ...) e a terceira fita é usada a cada 7 dias (4, 11, 18, ...) [Yang et al., 2008]. Todos esses problemas podem ser modelados aplicando os princípios básicos da Torre de Hanoi. Este jogo consiste em três hastes, rotuladas 0, 1 e 2, e n discos com raios diferentes, numerados de 1 a n em ordem crescente de tamanho. Eles são inicialmente empilhados em ordem decrescente na haste 0. Para cada disco existem três condições, estar na haste 0, 1 e 2. Então, definimos T = 0, 1, 2.

Qualquer distribuição dos *n* discos nas três hastes é um estado do jogo, quando nenhum disco maior está sobre um menor, tem-se um estado *regular* do jogo [Hinz et al., 2018]. Um estado *perfeito* é quando os *n* discos estão dispostos somente em uma haste, sem nenhum disco maior sobre um menor [Hinz et al., 2018]. Um estado *irregular* é uma distribuição de discos entre as hastes, em que discos maiores estão acima dos menores [Hinz et al., 2018]. Então cada estado é representado unicamente por um elemento $s = s_n...s_1 \in T^n$, onde s_d é a haste na qual o disco d está naquele momento. O objetivo do jogo é mover toda a pilha da haste 0 para a haste 2.

A Torre de Hanoi pode ser representada por um grafo simples, não direcionado, conexo,

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175056
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175056

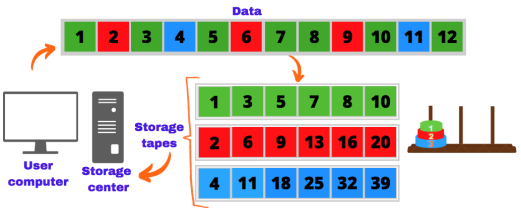


Figura 2: Exemplo do *backup* em fitas, onde os dados na cor verde representam o disco 1, na cor vermelho o disco 2 e em azul o disco 3.

planar, pertece a classe de grafo cobra triangular (*triangular snake*) e converte para o Triângulo de Sierpinski quando $n \to \infty$. O Grafo de Hanoi H_n=(V, E), onde os vértices V do grafo representam um estado do jogo e as arestas E definem cada par de estados compatíveis. Existem outras aplicações de jogos em torre, tratamentos psicológicos, neurológicos e até mesmo neuropsicológicos, por isso foram sendo criadas variações importantes do ToH como a Torre de Londres (ToL) que se difere em relação ao número e tamanho/capacidade das hastes, regras e jogabilidade. Estamos interessados em explorar suas propriedades em grafos. Além disso, apresentamos a Torre de Hanoi-Londres como uma pesquisa em andamento.

O artigo será estruturado da seguinte maneira: na Seção 2, será dada a fundamentação teórica necessária para o entendimento deste trabalho, iniciando com conceitos em grafos e finalizando com o Triângulo de Sierpinski. Na Seção 3.1, os trabalhos que se correlacionam com esta proposta. Na Seção 3, a complexidade computacional e propriedades em grafos da Torre de Hanoi. Na Seção 4.1, serão exibidas as regras, jogabilidade e propriedades em grafos da Torre de Londres. Na Seção 4.2, o jogo da Torre de Hanoi-Londres é apresentado como uma nova variação da Torre de Hanoi, explanando suas regras, jogabilidade e propriedades em grafos. Na Seção 5, é tecida uma análise comparativa da variação do jogo proposta. Finaliza-se com a Seção 6, que traz as Considerações Finais.

2. Preliminares

Nesta Seção são apresentados os fundamentos teóricos relacionados ao problema e modelagem em grafos proposta.

2.1. Definições em Teoria dos Grafos

Um **grafo** $G = (V, E)$ é um conjunto finito não-vazio onde $V(G)$ é um conjunto de vértices e $E(G)$ é um conjunto de arestas [Szwarcfiter, 1986]. Cada elemento e no conjunto E é um par (i, j) que indica que o vértice i é adjacente ao vértice j (ou seja, são adjacentes e a aresta e incide em i e j). O grafo é dito não-direcionado quando os pares que representam as arestas são não-ordenados, isto é, $(i, j) = (j, i)$. Um **grafo simples** é um grafo não-direcionado, não ponderado, que não contém laços ou arestas paralelas. A representação clássica de um grafo consiste em pontos distintos do plano associados com cada vértice e, para cada aresta (i, j), uma linha conectando os pontos correspondentes aos vértices i e j.

O número de vértices de um grafo G é dito ser a **ordem** de G e o número de arestas é o **tamanho** de G [Chartrand e Zhang, 2008]. O grau de um vértice v do grafo é equivalente ao número de arestas que incide em v. Um **caminho** é uma sequência de vértices $P = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de tal forma que dois vértices são adjacentes se forem consecutivos na sequência [Szwarcfiter, 1986]. Um grafo é **conexo** se quaisquer que sejam os vértices distintos u e v de G, existe sempre um caminho que os une, caso contrário ele é chamado **desconexo**. Um grafo que possui uma representação gráfica sem que as suas arestas se cruzem é chamado de grafo **planar**. Uma **componente conexa**

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175056
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175056

ou simplesmente componente de um grafo não-direcionado é um subgrafo em que cada par de nós está conectado por um caminho, ou, é um subgrafo conexo que não é parte de nenhum subgrafo conexo maior. As componentes de qualquer grafo dividem seus vértices em conjuntos disjuntos, e são os subgrafos induzidos por aqueles conjuntos.

O grafo **cobra-triangular *(triangular snake)* -** T_n, Figura 3(a), é obtido de um caminho P_n substituindo cada aresta do P_n por um ciclo C_3 [Seoud et al., 2022]. O grafo cobra-triangular também pode ser chamado de cacto triangular, cujo ponto de corte do bloco é um caminho. O **grafo borboleta *(butterfly)*** é o nome que às vezes é dado ao grafo T_3, grafo da cobra-triangular com 5 vértices. Um caso especial da classe de grafo cobra-triangular, são os **cobra triangular alternada** (*alternate triangular snake*) - $A(T_n)$, este é obtido de um caminho P_n substituindo cada aresta alternada de P_n por um ciclo C_3 [Seoud et al., 2022].

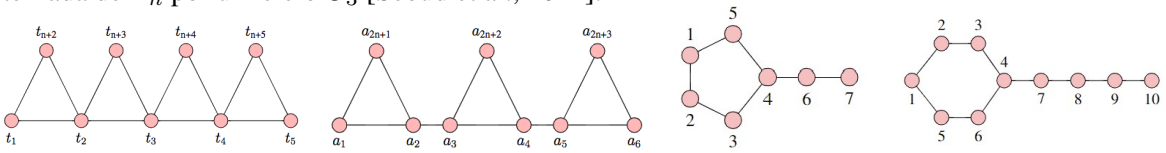


Figura 3: (a) Grafo cobra-triangular - T_5; (b) Grafo cobra-triangular alternada - A_6; (c) Grafo girino $T_{5,3}$; (d) Grafo girino $T_{6,4}$.

Um **grafo girino (*tadpole*) -** $T_{(\mathbf{k,n})}$, também chamado de dragão ou pipa, é o grafo obtido pela união de um ciclo C_m e um caminho P_n, como exposto nas Figuras 3(c) e 3(d). O grafo girino contém $m + n$ vértices e $m + n$ arestas [Nurdini et al., 2020].

2.2. Triângulo de Sierpinski

O Triângulo de Sierpinski é uma figura geométrica fractal, estudada pelo matemático polonês Waclav Sierpinski, em 1915, cuja construção é realizada por um processo iterativo de divisão de triângulos [Santiago, 2016]. É uma das formas elementares da geometria fractal por apresentar algumas propriedades: tem tantos pontos quanto o conjunto de números reais; tem área igual a zero; é auto-semelhante (uma parte é idêntica ao todo) e não perde sua definição inicial à medida que é ampliado.

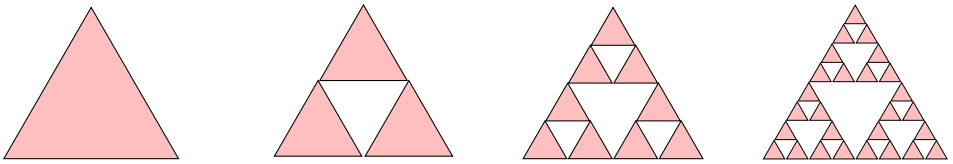


Figura 4: Primeiros níveis de construção do Triângulo de Sierpinski.

Para a construção do Triângulo de Sierpinski, apresentado na Figura 4, parte-se de uma área triangular formada por um triângulo equilátero. Em seguida, une-se os pontos médios de cada lado do triângulo, formando quatro outras áreas triangulares equiláteras em que três delas têm um lado em comum com a área triangular no centro. Em seguida, a área triangular central é removida. O processo consiste em indefinidamente repetir o procedimento anterior em relação a cada área triangular obtida. O Triângulo de Sierpinski é a figura resultante desse processo *infinito* de retiradas.

Os grafos do Triângulo de Sierpinski são uma família de grafos que possum imersão planar cujo limite $n \to \infty$, o Triângulo de Sierpinski é um fractal quando o número de hastes é igual a 3. Para este caso, sabe-se que os grafos da Torre de Hanoi H_n estão intimamente relacionados com

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175056
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175056

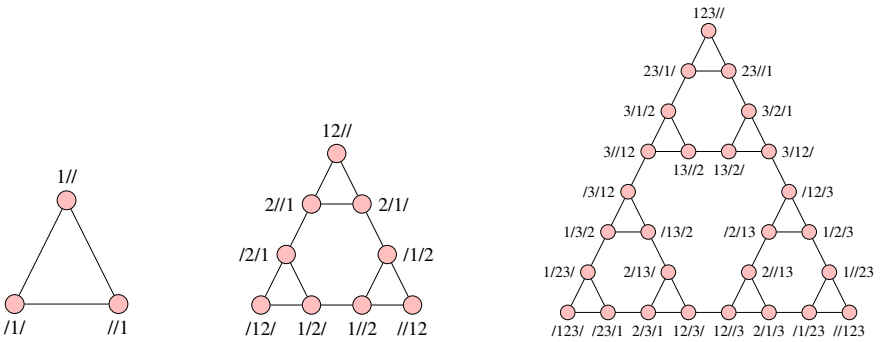


Figura 5: (a) H_1 com 1 disco; (b) H_2 com 2 discos; (c) H_3 com 3 discos.

os grafos do Triângulo de Sierpinski $\{S_n\}$. A imersão planar nos permite ver a geometricamente a semelhança entre os grafos do Triângulo de Sierpinski e o grafo da Torre de Hanoi de 3 hastes [Eppstein et al., 2022].

3. O Jogo da Torre de Hanoi e Variações

A Torre de Hanoi é um problema com tempo computacionalmente exponencial, com limite inferior $\Omega(2^n-1)$ e limite superior $O(2^n-1)$, devido os algoritmos recursivos e iterativos bem conhecidos. A Torre de Hanoi pode ser representada por um grafo simples, não direcionado, conexo, planar, pertece a classe de grafo cobra triangular (*triangular snake*) e converte para o Triângulo de Sierpinski quando $n \to \infty$, o grafo de Hanoi H_n (ou H_k^n, com k hastes e n discos) [Poole, 1994]. Qualquer quebra-cabeça desse tipo geral (mover objetos, número finito de posições) pode ser associado a um grafo H_n [Zhang et al., 2016], onde: H_n representa todos os estados regulares da ToH e n o número de discos.

O grafo do jogo da ToH com apenas 1 disco têm apenas 3 possibilidades de posição: o disco está na haste 1, o disco está na haste 2 ou o disco está na haste 3. Pode-se movimentar o disco para qualquer haste, como apresentado na Figura 5(a) . Portanto, a representação de H_1 é um grafo K (grafo completo com 3 vértices), fortemente conexo (biconexo) e planar. Passando para o grafo da ToH com 2 discos e cada posição no jogo com 2 discos corresponde a uma sequência de dois algarismos. Existe $3^2 = 9$ posições, pois cada disco pode estar em qualquer haste, independente dos demais, como observa-se na Figura 5(b). Considerando isso, é legal caminhar de qualquer vértice para qualquer outro vértice usando arestas adjacentes, ou seja, o grafo H_2 é conexo e como nenhuma das arestas se cruzam também é planar. Assim, para solucionar o jogo com o menor número de movimentos possível, deve-se pegar o caminho para a direita do grafo H_2. O comprimento deste caminho é 3, pois percorre-se 3 arestas, ou seja realizam-se 3 movimentos.

Repetindo o processo, obedecendo as regras do jogo com 3 discos, pode-se montar o grafo H_3 com 3^3 = 27 posições. Ao observar H_3 na Figura 5(c), percebe-se que ele é formado por três cópias de um grafo menor (de fato, H_2), ligadas por três arestas, formando um triângulo. Olhando o grafo H_2, identifica-se que também é formado por três cópias de H_1, formando um triângulo. Isso quer dizer que H_3 é isomórfico a um triângulo e há exatamente uma aresta entre blocos distintos. Cada bloco é biconexo, pois há dois caminhos distintos entre quaisquer dois vértices.

Para todo n inteiro e positivo, H_n é um grafo planar e biconexo, sendo um grafo de ordem 3^n e diâmetro $2n-1$, com exatamente 3 vértices de grau 2 e todos os outros vértices de grau 3. A medida que o número de discos aumenta, o grafo se torna cada vez mais parecido com o Triângulo

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175056
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175056

de Sierpinski. Mas, e o espaço que há entre cada H_1? Note que esse espaço é chamado de α e quando α tende a zero, o grafo H_n tende ao Triângulo de Sierpinski. A **correspondência de Lucas**, segundo Poole [1994], afirma que à medida que n se torna grande, H_n se torna um fractal com uma notável semelhança com a estrutura de Sierpinski e o triângulo de Pascal de módulo 2, todos com dimensão fractal $\log_2 3$.

3.1. Trabalhos Relacionados

Para suconsiderar um jogo como uma variante da ToH, definiu-se a classificação quanto: ao número de hastes; à capacidade dos haste; quanto às regras do jogo; e qualquer combinação dos anteriores. Embora as convenções acima pareçam bastante restritivas, elas oferecem um grande número de variações diferentes. Na Tabela 1, são elencadas características de algumas variações importantes da ToH, de forma a identificar as principais restrições entre a Torre de Hanoi (ToH), Torre de Londres (ToL), Torre de Bucareste (ToB), Torre de Oxford (ToO), Torre Cíclica, Torre de Reve e por fim a Torre Multipeg.

Tabela 1: Identificação de diferenças e semelhanças de algumas variações importantes da Torre de Hanoi.

Quanto a	Características	Multidiscos				Multihastes		
		ToH	ToL	ToB	ToO	Cíclica	Reve	Multipeg
Estrutura	Número de hastes	3	3	3	3	h	4	>3
	Capacidade das hastes	n	3, 2, 1	n	n	n	n	n
	Número de discos	n	3	n	n	n	n	n
	Discos de tamanho/cor diferente	tam	cor	tam	cor	tam	tam	tam
Regras	Move 1 disco por vez	sim	sim	sim	sim	sim	sim	sim
	Disco maior NÃO pode em cima do menor	sim	-	sim	-	sim	sim	sim
	Permite discos adjacentes de mesma cor	sim	não	sim	sim	sim	sim	sim
	Só move para hastes adjacentes	não	não	sim	não	não	não	não
Complexidade Computacional	Algoritmo	rec/ite	-	rec	ite	ite	ite	ite
	Complexidade do problema	$2^n - 1$	-	$3^n - 1$	-	$^{h-2}\sqrt[2]{hlogh + 2h}$	$\sqrt{n}2^{\sqrt{2n}}$	$2^n - 1$
	Grafo	sim	sim	sim	sim	não	não	não
Referências	-	Poole [1994]	Hinz et al. [2009]	Herter e Rote [2018]	Unterrainer et al. [2005]	Berend e Sapir [2006]	Er [1988]	Brandstädt et al. [1999]

Consoante com a classificação das variações do jogo da ToH, exploradas por meio da Tabela 1, as complexidades computacionais possibilitam comparações (diferenças e semelhanças) aos trabalhados correlacionados no estudo teórico envolvidos da Torres de Hanoi e aos demais desempenhados nesses instrumentos que compartilham a variação esperada em virtude das similaridades aparentes em sua estrutura e demanda de solução. Assim, verificaram-se algumas correlações significativas principalmente quanto ao seu algoritmo, complexidade do problema e grafo, entre outras combinações que estão na fase da pesquisa para devidas conclusões.

4. Variações do Jogo ToH propostas considerando torres de capacidades distintas

4.1. O Jogo da Torre de Londres

Em seu estudo de 1982 dos défices de planejamento exibidos por pacientes com lesão do lobo frontal, Shallice propôs e usou uma alternativa à clássica ToH, como um nativo da Inglaterra, a apelidou de Torre de Londres (ToL) [Berg e Byrd, 2002]. Este jogo é amplamente utilizado para avaliar planejamento e resolução de problemas. A ToL, como apresentada na Figura 6(a) possui três esferas de mesmo tamanho, mas de cores diferentes, uma base retangular contendo três hastes de tamanhos diferentes, sendo que a mais curta sustenta apenas 1 disco e a mais longa 3 discos. Para resolver o jogo, deve-se obedecer a duas regras: mover uma esfera por vez e cada uma das três hastes pode conter apenas 3, 2 ou 1 bola, respectivamente. As esferas são manipuladas, uma a uma, por três hastes verticais de comprimentos diferentes afixadas à base, de modo que a mais curta sustenta apenas uma esfera e a mais longa até três esferas.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175056
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175056

O objetivo do jogo é mover as esferas da posição inicial, Figura 6(a), até chegar ao estado do cartão-problema, Figura 6(b), obedecendo sempre às duas regras do jogo. No total, a ToL possui 15 cartões problemas com ordem crescente de dificuldade, o que significa que cada cartão problema será uma rodada do jogo. O jogador é responsável por reproduzir os estados do cartão problema, Figura 6(b), o que lhe é dito de antemão, movendo uma esfera de cada vez, com o número mínimo de ações, como exibido na Figura 6(c). Uma resposta correta significa que a solução foi alcançada com o número mínimo de ações [Souza et al., 2001]. A cada rodada um novo cartão-problema é apresentado. O jogador sempre sairá da posição inicial e deverá solucionar o problema proposto. No jogo da ToL, o número mínimo de movimentos para solucioná-lo depende do cartão problema recebido. No exemplo abordado na Figura 6(c), o jogo foi solucionado com 2 movimentos.

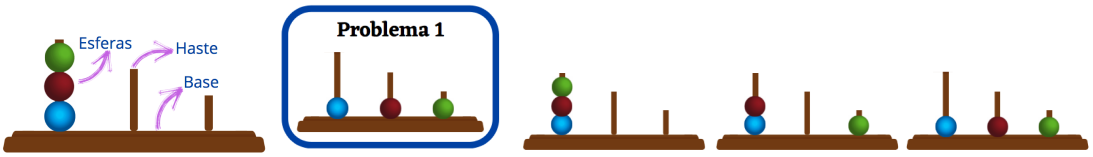


Figura 6: (a) Estrutura e posição inicial; (b) Exemplo de cartão problema; (c) Exemplo de uma rodada.

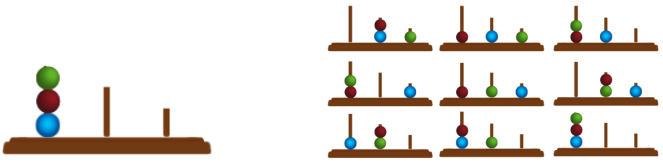
A Torre de Londres, desta forma, é aplicada em tratamentos psicológicos, neurológicos e até mesmo neuropsicológicos, sendo pouquíssimas vezes trabalhada e/ou pesquisada para fins computacionais. Portanto, neste trabalho, foram necessárias algumas adaptações para que a mesma fosse estudada como um jogo combinatório, com o qual pode-se gerar algoritmo e modelagem em grafos. A primeira das mudanças foi retirar a questão do jogo vir com uma cartela de problemas. Definiu-se que para iniciar o jogo deve-se realizar uma distribuição aleatória das esferas, como as apresentadas na Figura 7 e o estado final do jogo sempre será todas as esferas na Haste 0. Sendo que, deve seguir a ordem das cores das esferas (verde, vermelho e azul), como apresentado na Figura 8(a). Dependendo da distribuição aleatória que for realizada, o jogo terá um número mínimo de movimentos para solucioná-lo. No exemplo abordado na Figura 8(b), o jogo foi solucionado com 8 movimentos. A Figura 7 trás o número mínimo de movimentos para todos os estados iniciais possíveis do jogo da ToL.

Estado inicial	M	Estado inicial	M	Estado inicial	M	Estado inicial	M
	0		3		6		5
	1		7		5		3
	2		7		7		8
	3		6		3		8
	1		4		2		7
	6		6		4		6
	2		4		8		5

Figura 7: ToL: possíveis estados iniciais do jogo e o número mínimo de movimentos para solucioná-lo.

O jogo da ToL pode ser classificado como um quebra-cabeça de tipo geral, onde se pode mover objetos, tem número finitos de posições e portanto, pode ser associado a um grafo L_n = (V, E), onde: L representa os possíveis movimentos da ToL; n é o número de esferas; V os vértices que

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175056
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175056



((a)) ((b))

Figura 8: ToL: (a) Estado final; (b) Exemplo de uma rodada.

representam os estados do jogo; E determina cada par de estados compatíveis. Para gerar o grafo L, definiu-se que o número 1 refere-se à esfera de cor verde, o número 2 à esfera de cor vermelha e o número 3 à esfera de cor azul. Cada pilha de esferas é separada por uma '/' (barra), para diferenciar as esferas que estão na haste $0, 1, 2$. Seguindo as instruções acima e obedecendo as regras do jogo da Torre de Londres com 2 esferas, ou seja azul e vermelha, respectivamente equivalentes aos números $1, 2$, têm-se o grafo L_2, conforme a Figura 9(a). Passando para a ToL com 3 esferas, admitindo as instruções acima e obedecendo as regras do jogo, tem-se o grafo da ToL conforme a Figura 9(b).

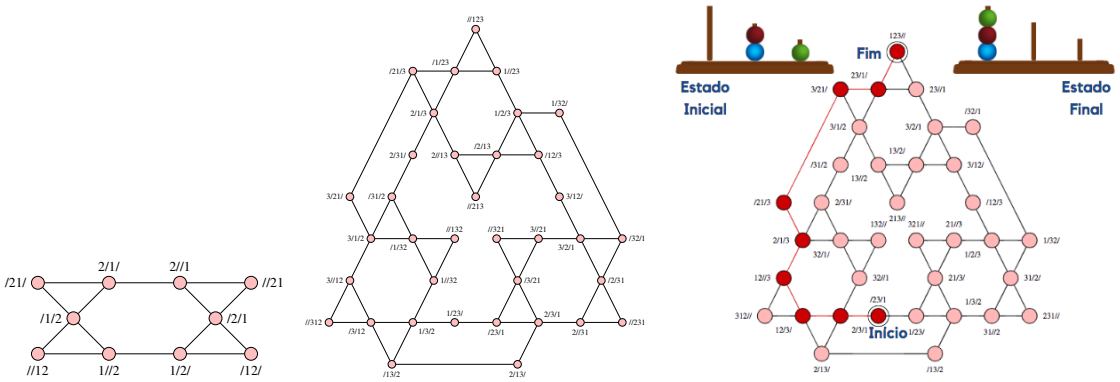


Figura 9: (a) L_2 com 2 esferas; (b) L_3 com 3 esferas; (c) Exemplo do caminho de uma jogada no grafo L_3.

A Figura 9(b) traz L_3 e sua primeira característica é ser conectado, para qualquer par de estados existe um caminho, ou seja, uma sequência finita de arestas (movimentos) ligando o estado inicial ao estado final. L_3 é um grafo simples, não-direcionado, conexo, planar e é classe de grafos cobra-triangular (triangular snake graph) - T_3 ou borboleta (*butterfly*), composto por n subgrafos do tipo borboleta dupla unidas por arestas mais 6 vértices. Por inspeção, é direto deduzir que L_3 tem ordem 36, é equilibrado em graus no sentido de que tem 12 vértices de cada um dos graus 2, 3 e 4. O desafio deste quebra-cabeça de torre é encontrar o caminho mais curto entre o estado inicial e o final do jogo. A Figura 9(c) demonstra no grafo L_3 todos os passos para a resolução do jogo com o mesmo estado inicial demonstrado na Figura 8(b), destacando em vermelho todo o caminho percorrido para solucionar o jogo com menor número de movimentos possível, respeitando todas as regras.

4.2. O jogo da Torre de Hanoi-Londres

O jogo da Torre de Hanoi-Londres (ToHL) consiste em uma combinação de características envolvendo as mesmas regras que a ToH e a estutura da ToL, com hastes de comprimentos distintos, igual a ToL, como mostrado na Figura 10(a). Existem 3 hastes, onde a haste mais longa sustenta os n discos, a próxima suporta n-1 discos e a última aguenta apenas n-2 discos.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175056
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175056



Figura 10: (a) Estrutura do jogo ToHL; (b) Solução para o jogo ToHL com 3 discos.



Figura 11: ToHL: Número de Movimentos de acordo com o Estado inicial da torre com 3 discos.

O jogo da ToHL parte de um estado inicial qualquer, como mostrado na Figura 11, e deve terminar sempre com todos os discos empilhados na primeira haste, tendo os discos em ordem decrescente de tamanhos, como mostra a Figura 10(b). As regras do jogo da ToHL são: só pode mover um disco de cada vez e um disco maior não pode ser colocado em cima de outro menor. Devido à capacidade das hastes, este jogo só pode ser brincado com no mínimo 2 discos. No jogo da ToHL, dependendo do estado inicial do jogo, o mesmo terá um número mínimo para a resolução do jogo, independente do número de discos, conforme a Figura 11. Sendo que, também existem alguns estados iniciais que, respeitando as três regras do jogo não é possível solucioná-lo.

A proposta do jogo da Torre de Hanoi-Londres pode ser associada a um grafo HL = (V, E), onde: HL representa os possíveis movimentos da ToHL; n é o número de discos; V os vértices, sendo que, na cor verde representam as estados regulares permitidos no jogo e na cor laranja estados regulares que não tem soluções possíveis; e E as arestas definem cada par de estados compatíveis. O grafo HL_1 não existe, pois como dito anteriormente, o jogo THL só pode ser jogado com no mínimo 2 discos, devido às suas regras. Então, parte-se da Figura 12(a) onde expõe-se HL_2.

Examinando HL_2, expresso na Figura 12(a), suas características são que ele é desconexo, tem ordem 3, o grau máximo é 1 e o mínimo é 0, já que existe um vértice em vermelho a partir do qual não é possível encontrar uma solução. É possível traçar um caminho, mas é impossível gerar um ciclo. Analisando a Figura 12(b), a primeira característica visível é que ele é um grafo desconexo, simples, não direcionado, planar e possui um tipo de grafo similar a um grafo girino (*tadpole*) - $T_{6,3}$, tendo mais vértices/arestas adicionais. HL_3 possui ordem 19, sendo que, possui 10 vértices com estados permitidos e 9 vértices com estados proibidos, os quais não é possível solucionar o jogo respeitando suas regras. HL_3 tem o grau máximo 3 e o mínimo 1. Passando para a análise do grafo do jogo com 4 discos - HL_4, apresentado na Figura 12(c), ele possui as mesmas características do grafo HL_3 exposto na Figura 12(b), também é um grafo não-conexo, simples, não direcionado, planar e possui um tipo de grafo similar a um grafo girino (*tadpole*).

Na Figura 13, tem-se um exemplo do jogo com 3 discos, onde pode-se observar o estado inicial e o estado final, evidenciando o caminho percorrido pelo jogador para solucionar o jogo, demonstrando os 5 passos realizados, número mínimo de movimentos necessários para solucionar o jogo, demonstrados na Figura 11.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175056
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175056

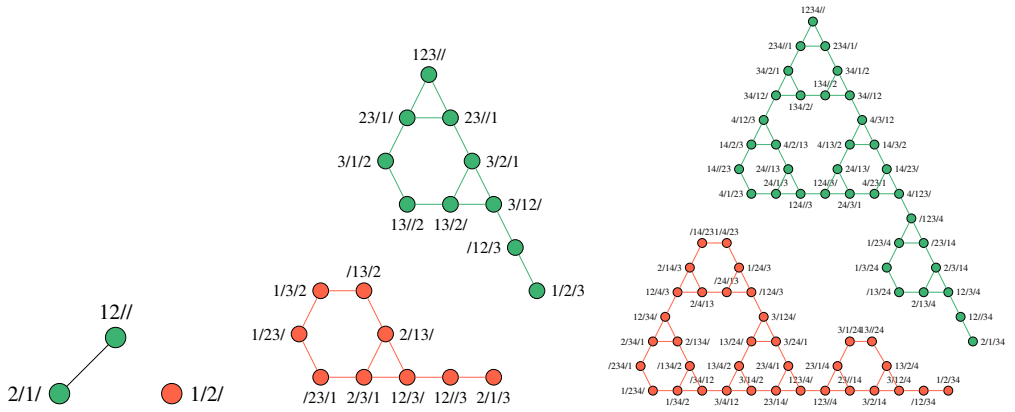


Figura 12: Garfos da ToHL onde vértices verdes são os estados permitidos e os vértices laranja são os estados proibidos no jogo: (a) HL_2 com 2 discos; (b) HL_3 com 3 discos; (c) HL_4 com 4 discos.

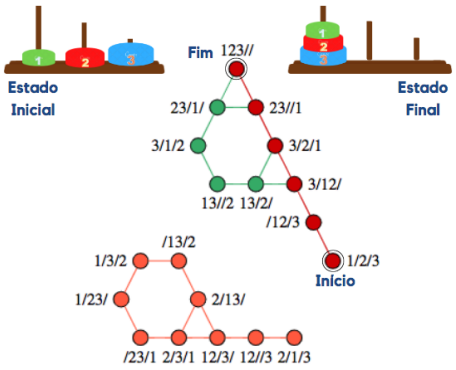


Figura 13: HL_3: Caminho do exemplo da jogada no grafo.

5. Análise Comparativa e Aplicações

Realizando uma Análise Comparativa do jogo da ToHL com os demais jogos abordados, a Tabela 2 resume as propriedades dos grafos, observando também que está sendo indicado que o grafo ToHL é o único desconexo, sempre tendo dois componentes conectados compostos de vértices que representam estados regulares: um dos componentes conectados é permitido estados regulares, ou seja, que levam ao estado perfeito que também é o estado final do jogo, de acordo com a jogabilidade proposta; e, um segundo componente conectado que é formado por estados regulares que são proibidos, ou seja, que não levam ao estado perfeito ou final do jogo. Isso fica muito claro no grafo HL_3 e HL_4 mostrados nas Figuras 12(a), 12(b) e 12(c).

Tabela 2: Análise dos grafos das Torres exploradas. Fonte: própria.

Torre		Ordem	Número de arestas	Conexo	Grau Máximo	Grau Mínimo	Planar
Discos	Nome						
2	ToH	9	12	Sim	3	2	Sim
	ToL	10	14	Sim	4	2	Sim
	ToHL	3	1	Não	1	0	Sim
3	ToH	27	39	Sim	3	2	Sim
	ToL	36	54	Sim	4	2	Sim
	ToHL	19	22	Não	3	1	Sim

Na Figura 14, são dadas as representações do grafo de cada jogo de torre investigado, com

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175056
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175056

seu desenho no plano. Pode-se observar que mesmo para instâncias pequenas, com discos $n = 3$, os grafos H_n e L_n, da ToH e ToL respectivamente, possuem uma forte interseção, mas um não é subgrafo do outro. No caso do grafo HL_3, do jogo $ToHL$, é um subgrafo de H_3, que pode ser visto claramente comparando os grafos das Figuras 14(a) e 14(c).

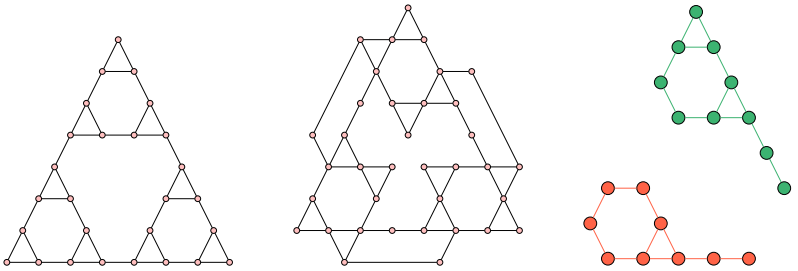


Figura 14: (a) H_3 - Grafo da ToH; (b) L_3 - Grafo da ToL; (c) HL_3 - Grafo da ToHL.

Nos jogos abordados neste artigo e principalmente na explanação realizado por meio dos grafos demonstrou-se teoricamente soluções para limitações encontradas principalmente em processos logísticos, no armazenamento e transporte de produtos, onde a carga tem restrição quanto a altura do empilhamento, prioridade de descarregamento, diferença de tamanho/peso, ou ainda a fragilidade da mercadoria. Nestes problemas deve-se encontrar soluções para realizar o transporte da carga de forma a satisfazer as condições estabelecidas previamente e principalmente maximar a utilização do espaço para a realização do transporte adequado.

6. Considerações Finais

Uma análise comparativa de jogos combinatórios baseados em torres foi apresentada, tomando a Torre de Hanoi (ToH) como guia, bem como um teste neurocognitivo conhecido na literatura como Torre de Londres. Assim, uma caracterização de duas novas variantes do jogo ToH foram propostas, sendo: o Jogo da Torre de Londres (ToL) aproveitando do teste existente e adequando-o como um jogo combinatório; e, o Jogo da Torre de Hanoi-Londres (ToHL), onde pode-se observar que as regras e estruturas combinadas da Torre de Hanoi (ToH) e da Torre de Londres (ToL). Na caracterização e modelagem em grafos realizada, pode-se observar que o jogo ToHL possui estados regulares proibidos, o que também pode ser comprovado através do grafo com mais de uma componente conexa, ou seja, um grafo não-conexo no geral. Como trabalho em andamento, está sendo realizada uma generalização do grafo associado, bem como a determinação de estratégia algorítmica e sua complexidade para a resolução de cada um dos jogos propostos.

7. Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES-PROEX) - Código de Financiamento 001. Este trabalho foi parcialmente financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas - FAPEAM - por meio do projeto POSGRAD 22-23.

Referências

Berend, D. e Sapir, A. (2006). The cyclic multi-peg tower of hanoi. *ACM Transactions on Algorithms (TALG)*, 2(3):297–317.

Berg, W. K. e Byrd, D. L. (2002). The tower of london spatial problem-solving task: Enhancing clinical and research implementation. *Journal of Clinical and Experimental Neuropsychology*, 24(5):586–604.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175056
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175056

Brandstädt, A., Le, V. B., e Spinrad, J. P. (1999). *Graph classes: a survey*. SIAM.

Chartrand, G. e Zhang, P. (2008). *Chromatic graph theory*. CRC press.

Eppstein, D., Frishberg, D., e Maxwell, W. (2022). On the treewidth of hanoi graphs. *Theoretical Computer Science*, 906:1–17.

Er, M. (1988). An optimal algorithm for reve's puzzle. *Information sciences*, 45(1):39–49.

Hempel, L., Schmiedel, R., e Kämmerer, L. (2006). Operations research in logistics. *Perspectives on Operations Research: Essays in Honor of Klaus Neumann*, p. 255.

Herter, F. e Rote, G. (2018). Loopless gray code enumeration and the tower of bucharest. *Theoretical Computer Science*, 748:40–54.

Hinz, A. M., Klavžar, S., e Petr, C. (2018). *The Tower of Hanoi - Myths and Maths*. Springer, 2ª edition.

Hinz, A. M., Kostov, A., Kneißl, F., Sürer, F., e Danek, A. (2009). A mathematical model and a computer tool for the tower of hanoi and tower of london puzzles. *Information Sciences*, 179 (17):2934–2947.

Huang, S.-H. e Lin, T.-H. (2012). Heuristic algorithms for container pre-marshalling problems. *Computers & Industrial Engineering*, 62(1):13–20.

Lu, X.-M. e Dillon, T. (1995). Parallelism for multipeg towers of hanoi. *Mathematical and computer modelling*, 21(3):3–17.

Nurdini, E., Rosyida, I., et al. (2020). On total edge irregularity strength of tadpole chain graph tr (6, n). In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 1538, p. 012001. IOP Publishing.

Poole, D. G. (1994). The towers and triangles of professor claus (or, pascal knows hanoi). *Mathematics Magazine*, 67(5):323–344.

Santiago, A. D. V. (2016). Metodologia lúdica aplicada no ensino de conceitos de programação de computadores.

Seoud, M., Farid, M., e Anwar, M. (2022). Some difference graphs. *arXiv preprint arXiv:2209.07317*.

Souza, R. d. O., Ignácio, F. d. A., Cunha, F. C. R., Oliveira, D. L., e Moll, J. (2001). Contribuição a neuropsicologia do comportamento executivo: torre de londres e teste de wisconsin em indivíduos normais. *Arquivos de Neuro-psiquiatria*, 59(3A):526–531.

Szwarcfiter, J. L. (1986). *Grafos e Algoritmos Computacionais*. Elsevier.

Unterrainer, J., Rahm, B., Halsband, U., e Kaller, C. (2005). What is in a name: Comparing the tower of london with one of its variants. *Cognitive Brain Research*, 23(2-3):418–428.

Yang, T., Feng, D., Liu, J., e Wan, Y. (2008). Fbbm: a new backup method with data de-duplication capability. *2008 International Conference on Multimedia and Ubiquitous Engineering (mue 2008)*, p. 30–35.

Zhang, Z., Wu, S., Li, M., e Comellas, F. (2016). The number and degree distribution of spanning trees in the tower of hanoi graph. *Theoretical Computer Science*, 609:443–455.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175056
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175056