São José dos Campos - SP
LV SBPO
LV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional
São José dos Campos, SP - 6 a 9 de novembro de 2023

CÁLCULO DOS PREÇOS-SOMBRA EM PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR DEGENERADO

Beatriz Akiria de Assis Quaresma
b203899@dac.unicamp.br

Antônio Carlos Moretti
amoretti@unicamp.br

Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira
aurelio@ime.unicamp.br
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - IMECC
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
Rua Sérgio Buarque de Holanda, 651 - Cidade Universitária - Campinas-SP, CEP 13083-859

RESUMO

A programação linear (PL) é uma ferramenta amplamente utilizada na tomada de decisão gerencial. Teoricamente, os preços-sombra dos problemas de PL fornecem informações úteis para o analista tomar uma determinada decisão econômica. Na prática, no entanto, os solvers de PL tendem a fornecer informações de sensibilidade errôneas se a solução ótima primal for degenerada fazendo com que o problema dual seja alternativo. Neste caso, quais variáveis duais deveríamos tomar como preço-sombra? O artigo [Rubin e Wagner, 1990] apresenta um exemplo para ilustrar os resultados equivocados dos preços-sombra que são automaticamente fornecidos pela maioria dos solvers de PL. Este trabalho mostra como construir uma caracterização da família de todas as soluções ótimas alternativas do problema dual associado ao problema primal degenerado e com isso mostrar como os preços-sombra de problemas de PL podem ser calculados corretamente quando a solução ótima for degenerada.

PALAVRAS CHAVE. Programação Linear; Solução degenerada; Preço-sombra.

Programação Matemática; PO na Administração e Gestão da Produção; PO na Indústria.

ABSTRACT

Linear programming (LP) is a widely used tool in managerial decision making. Theoretically, the shadow prices of LP problems provide useful information for the analyst to make a certain economic decision. In practice, however, LP solvers tend to give erroneous sensitivity information if the primal optimal solution is degenerate causing the dual problem to be alternative. In this case, which dual variables should we take as the shadow price? The article [Rubin e Wagner, 1990] presents an example to illustrate the misleading results of shadow prices that are automatically provided by most LP solvers. This work shows how to build a characterization of the family of all alternative optimal solutions of the dual problem associated with the degenerate primal problem and thereby show how the shadow prices of LP problems can be correctly calculated when the optimal solution is degenerate.

KEYWORDS. Linear Programming; Solution degenerate; Shadow prices.

Mathematical Programming; PO in Administration and Production Management; PO in Industry.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175037
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175037

1. Introdução

O preço-sombra desempenha um papel crucial na economia, fornecendo informações valiosas sobre o valor marginal dos recursos escassos. Ele é calculado através de técnicas de análise econômica como a análise de sensibilidade da programação linear. Ao calcular o preço-sombra de um recurso adicional, é possível avaliar os custos e benefícios marginais de sua utilização. Isto é, o uso do preço-sombra é fundamental para responder perguntas de "what-if", como por exemplo "qual o impacto na solução ótima de um determinado problema se um recurso for aumentado? E se for reduzido?". Dessa forma, esse conceito auxilia na tomada de decisões, permitindo uma alocação mais eficiente e lucrativa dos recursos.

Porém, algumas ideias equivocadas sobre os preços-sombra podem induzir ao erro, principalmente se desconsiderar a possibilidade do problema primal ser degenerado, com várias bases ótimas fornecendo o mesmo valor ótimo para as variáveis de decisão (veja, por exemplo, [Rubin e Wagner, 1990]). Infelizmente não estamos imune ao erro se utilizarmos resultados fornecidos por solvers comerciais de PL, uma vez que eles tendem a emitir o resultado da primeira base ótima encontrada ao longo do processo de resolução e não indicar que podem haver outras possibilidades.

No artigo de [Rubin e Wagner, 1990] é utilizado um problema de transporte para mostrar como preços-sombra podem ser enganosos quando o problema primal é degenerado, demonstrando que resultados mal interpretados da análise de sensibilidade ocasionam decisões de gerenciamento errôneas.

Um resultado bem conhecido em programação linear é o fato de que quando o problema primal tem solução ótima degenerada, o problema dual associado possui soluções ótimas alternativas. Uma vez que o preço-sombra está associado a solução ótima do problema dual, [Best, 1982] apresenta uma caracterização da família de todas as soluções ótimas de um problema com solução alternativa. Entretanto, o autor trabalha no espaço das linhas, neste trabalho nós definimos a nossa própria caracterização da região formada por todas as soluções ótimas alternativas usando o espaço de colunas. A vantagem ao se fazer isso é que podemos obter as informações que precisamos diretamente das equações básicas (tableau simplex) do problema de programação linear em questão.

Com isso, este trabalho apresenta a caracterização da família de todas as soluções ótimas para um problema de programação linear (PPL) na forma padrão, com dados obtidos diretamente das equações básicas do problema primal. E, a partir dessa caracterização definir os preços-sombra adequados de um problema primal degenerado cujo problema dual é alternativo, utilizando como base o trabalho [Akgül, 1984] que mostra a importância de diferenciar o aumento e a diminuição de um recurso.

2. Caracterização da Família de Todas as Soluções Ótimas

Considere o problema (P) abaixo:

$$(P) \quad \begin{cases} \max & z_p = & c^T x \\ \text{s.a} & & Ax = b \\ & & x \geq 0 \end{cases}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Vamos supor que (P) tem soluções alternativas no ótimo e que x^* seja uma solução ótima básica (portanto, um ponto extremo) de (P). As equações

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175037
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175037

básicas (EB) no ótimo são dadas por:

$$\begin{aligned} x_i &= \overline{b}_i - \sum_{j=m+1}^{n} y_j x_j, \quad \forall i = 1, \cdots, m \\ z_p &= \overline{z} - \sum_{j=m+1}^{n} (z_j - c_j) x_j. \end{aligned}$$

onde $\overline{b} = B^{-1}b$ e $\overline{z} = c_B^T B^{-1} b$. Estamos assumindo, sem perda de generalidade, que as m primeiras variáveis são as variáveis básicas. Como (P) tem soluções ótimas alternativas, as EB no ótimo contêm pelo menos uma variável não-básica que tenha seu custo reduzido igual a zero. A dimensão de (P) é igual a $n - m$, pois estamos trabalhando no $\mathbb{R}^n$ e temos m restrições de igualdade. Assim sendo, a maior dimensão da região que contém todas as soluções alternativas é igual a $(n-m)-1$. A dimensão exata da região que contém todas as soluções alternativas é igual ao número de variáveis não-básicas cujo custo reduzido é igual a zero.

A partir do ponto x^*, a região formada por todas as combinações lineares não negativas das direções simplex alternativas (das variáveis não-básicas cujo custo reduzido seja igual a zero) é a região que contém todas as soluções ótimas alternativas.

Considere a matriz D, cujas colunas sejam formadas pelas direções simplex das variáveis não-básicas que saem de x^* e custos reduzidos sejam zero. O ponto $\hat{x} = x^* + D\lambda$ pertence a região gerada pelas combinações lineares das direções simplex alternativas a partir de x^*. Como D, com as colunas das direções simplex, pertence ao núcleo de A então não precisamos nos preocupar com as restrições $Ax = b$, pois, elas nunca serão violadas. Nós precisamos apenas garantir que $\hat{x} \geq 0$, ou seja, $\hat{x} = x^* + D\lambda \geq 0$, ou ainda, $D\lambda \geq -x^*$. Estas inequações dão formato a região que estamos procurando.

Os exemplos abaixo nos ajudam a entender o processo que descrevemos acima.

Exemplo 1. *Considere o seguinte problema linear:*

$$\begin{aligned} \max\ z = \quad & 12x_1 + 12x_2 + 6x_3 \\ \textit{s.a.} \quad & 1x_1 + 1x_2 + 0x_3 \leq 1 \\ & 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 \leq 1 \\ & 0x_1 + 2x_2 + 0x_3 \leq 1 \\ & 0x_1 + 0x_2 + 3x_3 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

A Figura 1 nos mostra que o problema acima tem soluções alternativas na aresta formada pela intersecção das restrições $1x_1 + 1x_2 + 0x_3 \leq 1$ *e* $0x_1 + 0x_2 + 3x_3 \leq 1$ *(veja Figura 1a).*

Colocando o Problema (1) *na forma padrão temos um problema com 7 variáveis e 4 restrições de igualdade e 7 restrições de não negatividade. As equações básicas ótima do Problema*

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175037
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175037

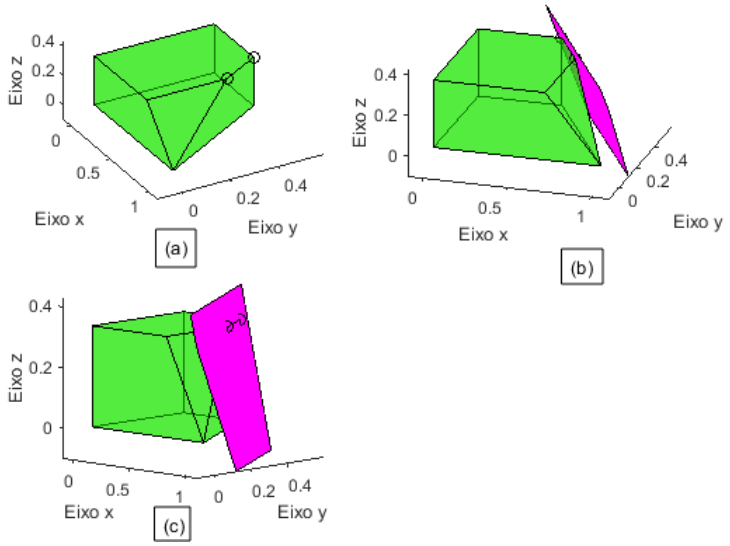


Figura 1: Resolução gráfica do Problema (1) pelo Matlab. (a) mostra o politopo da região factível, (b) e (c) apresentam a interseção do politopo com o hiperplano da função-objetivo gerando aresta na solução ótima alternativa

(1), *juntamente com as variáveis não-básicas (para definir facilmente as direções simplex) são:*

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & = & \frac{1}{2} & - & 1x_4 & + & \frac{1}{2}x_6 & + & 0x_7 \\ x_2 & = & \frac{1}{2} & + & 0x_4 & - & \frac{1}{2}x_6 & + & 0x_7 \\ x_3 & = & \frac{1}{3} & + & 0x_4 & + & 0x_6 & - & \frac{1}{3}x_7 \\ x_4 & = & 0 & + & 1x_4 & + & 0x_6 & + & 0x_7 \\ x_5 & = & \frac{1}{6} & + & 1x_4 & - & \frac{1}{2}x_6 & + & \frac{1}{3}x_7 \\ x_6 & = & 0 & + & 0x_4 & + & 1x_6 & + & 0x_7 \\ x_7 & = & 0 & + & 0x_4 & + & 0x_6 & + & 1x_7 \\ z & = & 14 & - & 12x_4 & + & 0x_6 & - & 2x_7 \end{array} \tag{2}$$

O custo reduzido $z_6 - c_6 = 0$ indica que temos soluções alternativas e como possuímos apenas uma variável não-básica com o custo reduzido igual a zero isto aponta que a região formada pelas soluções alternativas ótimas tem dimensão 1 (isto é, uma aresta. Veja Figura 1).

A matriz D contendo as direções simplex alternativas, isto é, com $z_6 - c_6 = 0$ é dada por:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

que representa a coluna das equações básicas completas relativa à variável x_6. Assim, o ponto $\hat{x}$ fica:

$$\hat{x} = x^* + D\lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\lambda \\ 0 + \lambda \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0.$$

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175037
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175037

O que nos dá o seguinte sistema de inequações:

$$\begin{cases} \lambda \geq -1 \\ \lambda \leq 1 \\ \lambda \leq \frac{1}{3} \\ \lambda \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

cujo resultado indica que:

$$0 \leq \lambda \leq \frac{1}{3}.$$

Isto quer dizer que saindo do ponto $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ *e andando na direção simplex gerada pela variável* x_6 *obtemos o ponto* $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ *que é o outro ponto extremo da aresta resultante (Figura 1 mostra estes dois pontos e a aresta em questão). A região formada pelo Sistema de Inequações* (3) *é apresentada na Figura 2.*

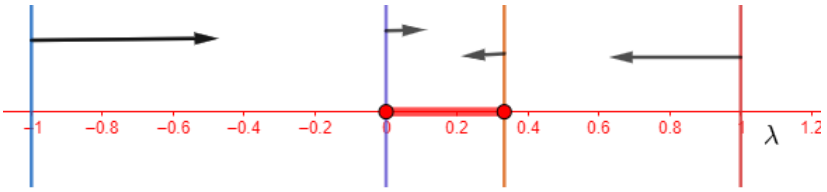


Figura 2: Intervalo Resultante do Sistema de Inequações (3)

No Exemplo 2 abaixo, mostramos uma região de dimensão 2.

Exemplo 2. *Considere o mesmo Problema Linear* (1)*, com a nova função-objetivo dada por:*

$$\max\ z = 12x_1 + 12x_2 + 0x_3$$

O novo problema tem soluções alternativas no plano $1x_1 + 1x_2 + 0x_3 = 1$*, que contém o trapézio, como mostra a Figura 3.*

As equações básicas ótima do novo problema, juntamente com as variáveis não-básicas são:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & = & \frac{1}{2} & - & 1x_4 & + & \frac{1}{2}x_6 & + & 0x_7 \\
x_2 & = & \frac{1}{2} & + & 0x_4 & - & \frac{1}{2}x_6 & + & 0x_7 \\
x_3 & = & \frac{1}{3} & + & 0x_4 & + & 0x_6 & - & \frac{1}{3}x_7 \\
x_4 & = & 0 & + & 1x_4 & + & 0x_6 & + & 0x_7 \\
x_5 & = & \frac{1}{6} & + & 1x_4 & - & \frac{1}{2}x_6 & + & \frac{1}{3}x_7 \\
x_6 & = & 0 & + & 0x_4 & + & 1x_6 & + & 0x_7 \\
x_7 & = & 0 & + & 0x_4 & + & 0x_6 & + & 1x_7 \\
z & = & 12 & - & 12x_4 & + & 0x_6 & - & 0x_7
\end{array} \tag{4}$$

Os custos reduzidos $z_6 - c_6 = 0$ *e* $z_7 - c_7 = 0$ *mostram que temos soluções ótimas alternativas e como temos duas variáveis não-básicas com os custos reduzidos iguais a zero a região formada pelas soluções alternativas ótimas tem dimensão 2 (ou seja, um polígono).*

A matriz D *das direções simplex alternativas é:*

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175037
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175037

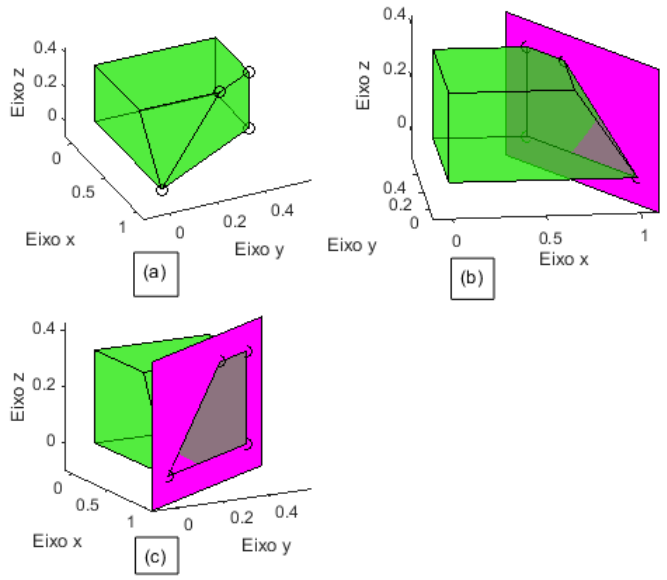


Figura 3: Resolução gráfica do novo problema pelo Matlab. (a) mostra o politopo da região factível, (b) e (c) apresentam o trapézio gerado pela interseção do politopo com o hiperplano da função-objetivo na solução ótima alternativa

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, o ponto $\hat{x}$ fica:

$$\hat{x} = x^* + D\lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda_1 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda_1 \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\lambda_2 \\ 0 \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{3}\lambda_2 \\ 0 + \lambda_1 \\ 0 + \lambda_2 \end{bmatrix} \geq 0.$$

O que nos dá o seguinte sistema de inequações:

$$\begin{cases} \lambda_1 \geq -1 \\ \lambda_1 \leq 1 \\ \lambda_2 \leq 1 \\ 3\lambda_1 - 2\lambda_2 \leq 1 \\ \lambda_1 \geq 0 \\ \lambda_2 \geq 0 \end{cases} \tag{5}$$

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175037
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175037

removendo as inequações redundantes do Sistema Linear (5) *ficamos com:*

$$\begin{cases} \lambda_1 \leq 1 \\ \lambda_2 \leq 1 \\ 3\lambda_1 - 2\lambda_2 \leq 1 \\ \lambda_1 \geq 0 \\ \lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$

Isto quer dizer que os pontos extremos do trapézio gerados pelas restrições, como mostra a Figura 4, geram os pontos extremos da faceta ótima do politopo.

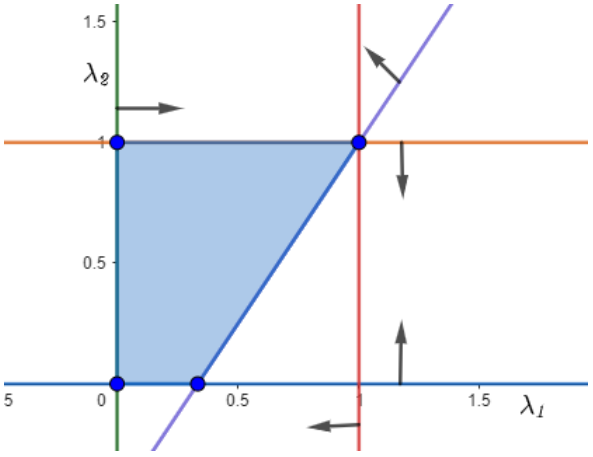


Figura 4: Trapézio Resultante do Exemplo 2

Na seção abaixo vamos apresentar como se calcula os preços-sombra de maneira correta utilizando a região de soluções alternativas ótimas. Nela apresentamos o conceito de p_i^+ e p_i^- que são os preços-sombra no caso de acréscimo e decréscimo de um recurso i, respectivamente. Os preços-sombra são iguais às variáveis duais somente se o problema primal é não degenerado. No caso do problema primal ser degenerado devemos usar a teoria introduzida na seção abaixo.

3. Preços-Sombra

Seja o Problema Primal (P) degenerado e defina $F(b) = \max\{c^T x | Ax = b,\ x \geq 0\}$. Portanto, $F(b)$ é uma função côncava linear por partes não decrescente. Quando $F(b)$ é finita segue que $\partial F(b) = W^*$, onde W^* é o conjunto de soluções alternativas ótimas do dual [Jansen et al., 1997] e $\partial F(b)$ é o conjunto de subgradientes de F em b.

Em Análise Convexa, a derivada direcional de F em b na direção de um vetor $u \in \mathbb{R}^m$ é dada por:

$$D_u F(b) = \min\{u^t w :\ w \in W^*\}$$

de modo que $w \in R^m$ é solução ótima do problema dual. Podemos ainda escrever $D_u F(b)$ como um PPL, isto é,

$$\begin{array}{ll} \min & u^T w \\ \text{s.a} & w \in W^* \end{array}$$

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175037
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175037

Assim, [Akgül, 1984] define preço-sombra positivo da $i-$ésima restrição como a taxa de variação de $F(b)$ para um aumento de uma unidade em b_i por:

$$p_i^+ = D_{e_i}F(b) = \min\{e_i^t w;\ w \in W^*\}$$

e o preço-sombra negativo da $i-$ésima restrição, isto é, a taxa de variação de $F(b)$ para uma redução de uma unidade em b_i fica:

$$\begin{aligned} p_i^- = D_{-e_i}F(b) &= \min\{(-e_i)^t w;\ w \in W^*\} \\ &= \max\{e_i^t w;\ w \in W^*\}. \end{aligned}$$

Devemos observar aqui que estas definições levam em conta que a $i-$ésima restrição está no formato canônico com relação ao problema primal.

4. Cálculo dos Preços-Sombra de um PPL Degenerado

Em seu artigo [Rubin e Wagner, 1990], os autores apresentam um problema de programação linear que é primal degenerado e, consequentemente, seu problema dual associado é alternativo. Nesta seção, iremos, a partir do problema primal definido por eles, escrever o problema dual (alternativo) e descrever a região que contém todas as soluções ótimas alternativas. Após isso, vamos resolver vários PPL's para calcular os preços-sombra de cada restrição do problema primal de acordo com a estratégia definida por [Akgül, 1984]. E, depois comparar estes preços-sombra, calculados de acordo com [Akgül, 1984], com os preços-sombra proveniente das informações fornecidas por alguns solvers conhecidos do público de Pesquisa Operacional.

Considere o problema de transporte descrito em [Rubin e Wagner, 1990] onde 2 fornecedores (fábricas) entregam mercadorias em 3 mercados. Sendo que as demandas do mercado (em toneladas), capacidades das fábricas (em toneladas) e custo de entrega (fabricação e frete) (em tonelada) são dados na Figura 5 (considere todos os dados econômicos em uma mesma moeda):

Exemplo 2			
	Fornecedor 1	Fornecedor 2	Demanda
Mercado 1	55	10	10
Mercado 2	65	15	10
Mercado 3	80	25	10
Capacidade	20	20	

Figura 5: Dados do Problema

Logo o modelo do problema primal é dado por:

$$\begin{aligned} \min\ z = \quad & 55x_{11} + 10x_{12} + 65x_{21} + 15x_{22} + 80x_{31} + 25x_{32} \\ \textit{s.a.} \quad & x_{11} + x_{12} \geq 10 \\ & x_{21} + x_{22} \geq 10 \\ & x_{31} + x_{32} \geq 10 \\ & x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 20 \\ & x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 20 \\ & x_{ij} \geq 0,\ \forall i = 1,2,3\ , j = 1,2 \end{aligned} \tag{6}$$

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175037
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175037

onde x_{ij} representa a quantidade de mercadoria que deve ser enviada para o mercado i do fornecedor j.

A solução primal ótima é dada no tableau da Figura 6. Como é possível observar no quadro, a solução é degenerada ($\bar{b}_{12} = 0$).

Quadro Final		55	10	65	15	80	25	0	0	0	0	0	
VB	c_B	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	x_{31}	x_{32}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_4	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	10
x_{12}	10	0	1	-1	0	-1	0	0	1	1	0	1	0
x_{11}	55	1	0	1	0	1	0	-1	-1	-1	0	-1	10
x_{22}	15	0	0	1	1	0	0	0	-1	0	0	0	10
x_{32}	25	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	0	0	10
$\bar{z}$		0	0	5	0	10	0	55	60	70	0	45	950

Figura 6: Quadro de Solução Ótima do Primal Emitido pelo Software PHP Simplex (Adaptado)

O dual do Problema (6) fica:

$$\begin{aligned} \max\ z_d = \quad & 10w_1 + 10w_2 + 10w_3 - 20w_4 - 20w_5 \\ \textit{s.a.} \quad & w_1 - w_4 + w_6 = 55 \\ & w_1 - w_5 + w_7 = 10 \\ & w_2 - w_4 + w_8 = 65 \\ & w_2 - w_5 + w_9 = 15 \\ & w_3 - w_4 + w_{10} = 80 \\ & w_3 - w_5 + w_{11} = 25 \\ & w_i \geq 0,\ \forall i = 1, \cdots, 11 \end{aligned} \tag{7}$$

O tableau ótimo do dual pelo método simplex é dado na Figura 7.

Quadro Final		10	10	10	-20	-20	0	0	0	0	0	0	
VB	c_B	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	$\bar{b}$
w_5	-20	0	0	0	-1	1	1	-1	0	0	0	0	45
w_1	10	1	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	55
w_8	0	0	0	0	0	0	-1	1	1	-1	0	0	5
w_2	10	0	1	0	-1	0	1	-1	0	1	0	0	60
w_{10}	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	1	-1	10
w_3	10	0	0	1	-1	0	1	-1	0	0	0	1	70
$\bar{z}$		0	0	0	10	0	10	0	0	10	0	10	950

Figura 7: Quadro de Solução Ótima do Dual Emitido pelo Software PHP Simplex (Adaptado)

Como podemos ver, uma solução ótima do Problema Dual (7) é:

$$w^* = (55, 60, 70, 0, 45)^T,$$

e como $z_7 - c_7 = 0$, segue que D é constituída por uma coluna, sendo a direção relativa à variável

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175037
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175037

w_7, isto é,

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, a família de todas as soluções ótimas é dada por:

$$w = w^* + D\lambda = \begin{bmatrix} 55 \\ 60 \\ 70 \\ 0 \\ 45 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda = \begin{bmatrix} 55 \\ 60+\lambda \\ 70+\lambda \\ 0 \\ 45+\lambda \\ 0 \\ \lambda \\ 5-\lambda \\ 0 \\ 10-\lambda \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde λ satisfaz:

$$w^* \geq D\lambda \Rightarrow \begin{bmatrix} 55 \\ 60 \\ 70 \\ 0 \\ 45 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} \geq - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda \Rightarrow \begin{bmatrix} 55 \\ 60 \\ 70 \\ 0 \\ 45 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ -1\lambda \\ -1\lambda \\ 0 \\ -1\lambda \\ 0 \\ -1\lambda \\ 1\lambda \\ 0 \\ 1\lambda \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \lambda \\ \lambda \leq 5 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq \lambda \leq 5.$$

Em resumo, $W^* = \{w = (55, 60+\lambda, 70+\lambda, 0, 45+\lambda)^T : 0 \leq \lambda \leq 5\}$ é a família de soluções ótimas do Problema Dual (7), isto indica que a região formada pelas soluções alternativas ótimas tem dimensão 1, ou seja, é uma aresta.

Agora, utilizando a estratégia de [Akgül, 1984], vamos definir os preços-sombra positivos e negativos das restrições. Como no nosso exemplo o problema primal é de minimização, a $F(b)$

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175037
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175037

é convexa e consequentemente a derivada direcional é dada por $D_u F(b) = \max\{u^t w;\ w \in W^*\}$, daí temos:

$$p_i^+ = \begin{cases} \max\{e_i^t w;\ w \in W^*\}, \text{ se } i-\text{ésima restrição for de } \geq \\ \min\{e_i^t w;\ w \in W^*\}, \text{ se } i-\text{ésima restrição for de } \leq \end{cases}$$

e

$$p_i^- = \begin{cases} \min\{e_i^t w;\ w \in W^*\}, \text{ se } i-\text{ésima restrição for de } \geq \\ \max\{e_i^t w;\ w \in W^*\}, \text{ se } i-\text{ésima restrição for de } \leq \end{cases}.$$

Voltando ao problema, observe inicialmente que a primeira e quarta restrição não possui variação, assim, $p_1^+ = p_1^- = w_1^* = 55$ e $p_4^+ = p_4^- = w_4^* = 0$. Já para a segunda restrição fazemos:

$$p_2^+ = \max\{e_2^T w;\ w \in W^*\} = 65$$
$$p_2^- = \min\{e_2^T w;\ w \in W^*\} = 60$$

analogamente, na terceira restrição fica:

$$p_3^+ = \max\{e_3^T w;\ w \in W^*\} = 75$$
$$p_3^- = \min\{e_3^T w;\ w \in W^*\} = 70$$

por fim, os preços-sombra da quinta restrição é:

$$p_5^+ = \min\{e_5^T w;\ w \in W^*\} = 45$$
$$p_5^- = \max\{e_5^T w;\ w \in W^*\} = 50.$$

Esses são os preços-sombra positivos e negativos corretos. Utilizando as ferramentas PHP Simplex, Solver do Excel e GUSEK poderíamos ter uma ideia equivocada que o preço-sombra do problema é único, uma vez que nenhuma das ferramentas apontou o contrário. Dessa forma, se quiséssemos saber qual a variação na função-objetivo do Problema Primal (6) ao aumentar uma unidade da demanda para o Mercado 2, ou seja, se ao invés da demanda ser 10 toneladas passar a ser 11 toneladas. Ao analisar o preço-sombra emitido pelas três ferramentas, pensaríamos que o aumento seria de 60, porém, esse resultado é equivocado, o acréscimo real é de 65. Ainda, se fizéssemos a mesma análise aumentando uma tonelada na demanda do mercado 3, pensaríamos que o aumento seria de 70, contudo, mais uma vez estaríamos subestimando o verdadeiro impacto dessa mudança, que é de 75. De modo análogo, analisando pelo GLOP, se aumentássemos uma tonelada na capacidade do fornecedor 2, equivocadamente, concluiríamos que o efeito na função-objetivo seria uma redução de 50, porém a diminuição real é de 45. Os preços-sombra gerados pelos solvers em comparação aos valores corretos, com a estratégia desenvolvida, são apresentados na Tabela 1.

5. Conclusão

A ideia deste trabalho é transmitir a mensagem que o tomador de decisões deve ser prudente ao utilizar informações advindas de um solver comercial de PL, pois, se o problema primal for degenerado (o que acontece na maioria dos problemas de programação práticos) as variáveis duais associadas ao ótimo primal nem sempre são iguais aos preços-sombra. Isto só acontece com certeza quando o problema primal é não degenerado. Na Seção 4 deste trabalho, apresentamos um problema descrito no artigo [Rubin e Wagner, 1990] onde obtemos dois conjuntos de variáveis

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175037
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175037

Preços-sombra	Solver Excel	GUSEK	PHP Simplex	GLOP	Valores Corretos
p_2^+	60	60	60	65	65
p_2^-					60
p_3^+	70	70	70	75	75
p_3^-					70
p_5^+	45	45	45	50	45
p_5^-					50

Tabela 1: Comparação com Solvers

duais e dependendo do solver utilizado, o resultado apresentado por eles pode ser tanto um conjunto quanto o outro. Já na Seção 3, descrevemos a estratégia utilizada por [Akgül, 1984] para determinar qual conjunto alternativo de variáveis duais utilizar de tal maneira a fazer à análise correta. Esta estratégia resulta na resolução de um problema de programação linear moderado para cada restrição em que quer saber o preço-sombra correto. Se estratégias com este intuito não forem consideradas, corremos o risco de que as análises de sensibilidade obtidas por diferentes solvers comerciais serem consideravelmente distintas, o que pode ocasionar um erro gerencial tremendo. Infelizmente, o ensino de programação linear não contempla a advertência de que para problemas primais degenerados podem (muito provavelmente) não haver equivalência entre os preços-sombra e as variáveis duais e que, nos casos degenerados, existem 2 preços-sombra para cada restrição, um positivo (no caso de aumento do recurso) e outro negativo (no caso de diminuição do recurso). E, estes preços-sombra (positivo e negativos) podem ser determinados pela resolução de um problema de programação linear muito mais simples que o problema de programação linear original. Por isso é importante que professores de cursos de programação linear orientem seus alunos que geralmente as variáveis duais não tem equivalência com os preços-sombra utilizados na Análise de Sensibilidade, isto é verdade apenas quando temos problemas primais não degenerados.

6. Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Referências

Akgül, M. (1984). A note on shadow prices in linear programming. In *Journal of the Operational Society*. 35(5): 425–431.

Best, M. J. (1982). A compact formulation of an elastoplastic analysis problem. In *Journal of Optimization Theory and Applications*. 37(3): 343–353.

Jansen, B., Jong, J. J., Roos, C., e Terlaky, T. (1997). Sensitivity analysis in linear programming: Just be careful! In *European Journal of Operational Research*. 101: 15–28.

Rubin, D. S. e Wagner, H. M. (1990). Shadow prices: Tips and traps for managers and instructors. In *Interfaces*. 20(4): 150–157.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175037
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175037