

## **ANÁLISE E MODELAGEM DA LOGÍSTICA DO PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO E DO MATERIAL DIDÁTICO**

**Guilherme Derenievicz, Roberto Pereira, Leticia Peres, Marcos Castilho**

Departamento de Informática, Universidade Federal do Paraná (UFPR)

{guilherme, rpereira, lmperes, marcos}@inf.ufpr.br

**Nadja Rodrigues, Silvério da Cruz**

Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE)

{nadja.rodrigues, silverio.cruz}@fnde.gov.br

### **RESUMO**

Este artigo apresenta os resultados de um estudo sobre a logística do PNLD - Programa Nacional do Livro e do Material Didático. O Brasil é um país de dimensões continentais, fazendo com que a distribuição dos livros didáticos às escolas públicas de todas as regiões do país, antes do início das aulas e com o menor custo viável possível, seja um problema crítico e de alta complexidade. A análise apresentada neste artigo mostra o processo de Distribuição do PNLD por uma perspectiva técnica, contemplando uma análise inicial do problema e sua complexidade. Um modelo de programação por restrições é proposto, com o objetivo de formalizar os agentes e as restrições do problema. Os resultados produzidos ajudam a entender o processo e identificar pontos de possível melhoria.

**PALAVRAS CHAVE.** Livro Didático, Logística, Modelagem.

**AdP&ED - PO na Administração Pública e Educação, L&T - Logística e Transportes**

### **ABSTRACT**

This article presents the results of a study on the logistics of the Brazilian National Book and Teaching Material Program. Brazil, with its continental dimensions, makes the distribution of textbooks to public schools in all regions of the country, before the start of classes and at the lowest feasible cost, a critical and highly complex problem. The analysis presented in this article shows the Distribution process from a technical perspective, contemplating an initial analysis of the problem and its complexity. A constraint programming model is proposed, with the objective of formalizing the agents and constraints of the problem. The results produced help to understand the process and identify points of possible improvement.

**KEYWORDS.** Textbook. Logistics. Modeling.

**AdP&ED - OR in Public Administration and Education, L&T - Logistics and Transport**

## 1. Introdução

O Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), executado pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), tem como objetivo avaliar e disponibilizar livros e materiais didáticos às escolas públicas de todo o território brasileiro [Brasil, 2017]. Anualmente, em torno de 130 mil escolas são contempladas pelo programa com a distribuição de aproximadamente 153 milhões de exemplares de livros, o que corresponde a um terço de todo o mercado editorial [FNDE, 2021]. Desde 1995, a entrega dos livros e materiais do PNLD é efetuada pela Empresa Brasileira de Correios e Telégrafos [Cassiano, 2007].

O PNLD consiste em um conjunto de estágios que inclui desde a publicação do edital e validação até a escolha dos materiais pelas escolas, aquisição dos materiais, *distribuição*, monitoramento e avaliação das entregas [FNDE, 2021]. Devido a alta complexidade sociotécnica do programa, torna-se imprescindível o desenvolvimento de projetos para analisar e otimizar a logística do PNLD.

Em particular, no aspecto técnico do estágio de *Distribuição* do PNLD, identifica-se um problema de otimização de grande porte, com a entrega de 12 a 17 milhões de encomendas por ano, organizadas em 280 mil paletes [FNDE, 2021]. Com uma alta dimensionalidade e de enorme relevância prática e teórica, este problema demanda um estudo aprofundado de modelagem, heurísticas e algoritmos de otimização.

Nesse sentido, o objetivo deste artigo é apresentar o processo de Distribuição do PNLD por uma perspectiva técnica, contemplando uma análise inicial do problema e sua complexidade. Um modelo de programação por restrições é proposto, com o objetivo de formalizar os agentes e as restrições do problema. Em particular, formaliza-se uma decomposição do problema em duas etapas que são atualmente realizadas no PNLD: (1) *Paletização Virtual*, que visa definir as encomendas, centralizadoras e destinatários; e (2) *Roteirização*, objetivando encontrar as melhores rotas para as entregas das encomendas. Essas formalizações ajudam a entender o processo de Distribuição e identificar pontos críticos para o estudo de estratégias de otimização.

A estrutura do artigo é a seguinte: na seção 2 o processo de Distribuição é apresentado, com base em documentos fornecidos pelo FNDE [SEI/FNDE, 2017; FNDE, 2021; Valente, 2021; COLED, 2017]. Na seção 3 são elencados problemas de otimização clássicos identificados no processo. Nas seções 4, 5 e 6 são apresentados, respectivamente, uma análise da representação computacional do problema, a formalização da Paletização Virtual e a modelagem proposta. A seção 7 conclui o artigo identificando alguns pontos de continuidade da pesquisa.

## 2. Descrição do Processo de Distribuição do PNLD

O processo de Distribuição consiste em uma sequência de etapas que visa, primariamente, entregar todos os livros e materiais didáticos do PNLD às escolas e demais entidades antes do início do período letivo [FNDE, 2021]. Nos estágios do PNLD que antecedem a Distribuição as escolas já definiram suas demandas, i.e. a quantidade de exemplares de itens de interesse, e já estão especificados, sob contrato, as empresas (e.g. editoras) responsáveis por produzir os itens.

A primeira etapa da Distribuição, denominada *Paletização Virtual*, é um ponto central do processo no qual são definidas as encomendas (agrupamento de exemplares de um item), seus destinatários, e a sua organização em paletes, buscando otimizar a posterior roteirização e entrega das encomendas. A qualidade da Paletização Virtual impacta diretamente no custo operacional de toda a Distribuição, pois fornece não apenas os objetos a serem roteirizados (paletes e encomendas), como também os respectivos destinatários, cronograma da produção de itens, entre outros aspectos relevantes. Vale ressaltar que a forma que a Paletização Virtual ocorre atualmente no PNLD não



Figura 1: O processo de distribuição de livros e materiais didáticos do PNLD.

está completamente disponível, pois é executada pela empresa responsável pela distribuição das encomendas.

Na etapa de *Postagem*, considerando as informações fornecidas pela Paletização Virtual, as empresas (e.g., editoras, também chamadas de produtores) produzem os itens e montam as encomendas e os paletes, que são transportados pela empresa responsável pela distribuição até as suas centralizadoras. A produção ocorre continuamente durante todo o período, alternando entre itens distintos até que toda a demanda seja produzida.

Nas duas últimas etapas ocorrem o *Tratamento das Encomendas* nas centralizadoras da empresa de distribuição, realizando a triagem das encomendas e a formação de lotes para envio aos destinatários indicados pelo FNDE; e a *Entrega*, na qual as encomendas são transportadas até os respectivos destinatários.

No processo, há uma forte interação entre todos os agentes e etapas, bem como a relação temporal entre produção, distribuição e entrega, conforme ilustra a Figura 1. A Tabela 1 apresenta a descrição e os atributos relevantes de todos os agentes envolvidos, considerando o objetivo de otimizar configurações das cargas, armazenamento e transporte. As interações entre os agentes estão condicionadas a restrições lógicas e físicas. Por exemplo, cada encomenda montada não pode ultrapassar 8Kg ou altura máxima de 16cm, e as encomendas acomodadas em um palete não podem exceder os seus limites físicos (980x1120x500mm) e capacidade (300Kg) [COLED, 2017].

Outras restrições identificadas no problema não estão completamente disponíveis. Produtores estão conectados a determinadas centralizadoras por meio de rotas, com custos de transporte desconhecidos, mas que podem ser coletados. A produção dos itens deve respeitar restrições de produção específicas que também precisam ser fornecidos pelos produtores. Restrições temporais não disponíveis, como o prazo máximo de entregas, tempo de produção, tempo para carregamento de veículos e para reorganização de paletes, entre outros, podem ser coletadas em parceria com o FNDE e a empresa de distribuição.

No âmbito do PNLD, o propósito do processo de Distribuição é entregar todos os livros e materiais didáticos solicitados pelas escolas de todo o país dentro do prazo estipulado (i.e., antes do

| Agente           | Descrição                                                                                                                                                                                                                  | Atributos                                                                                                                                                                                                                                  |
|------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Item             | Livro ou outro material didático do PNLD que deve ser produzido pelos produtores e entregue nos destinatários até a data limite.                                                                                           | Identificador (título, autor, etc.), peso, dimensões e quantidade de exemplares.                                                                                                                                                           |
| Encomenda        | Conjunto de exemplares de um item entregues a um destinatário. Na Distribuição, todos os itens devem estar organizados em encomendas.                                                                                      | Peso, dimensões, destinatário, item e quantidade de exemplares do item.                                                                                                                                                                    |
| Destinatário     | Escola, secretaria ou outro local de entrega dos itens.                                                                                                                                                                    | Localização geográfica e janela de tempo disponível para entrega.                                                                                                                                                                          |
| Produtor         | Empresa responsável por produzir os itens, que deverão ser organizados em encomendas e acomodados em paletes, armazenados em suas dependências e enviados a centralizadoras.                                               | Capacidade de produção por item, restrições de produção, localização geográfica e capacidade de armazenamento.                                                                                                                             |
| Paleta           | Conjunto de encomendas a ser entregues a destinatários da mesma centralizadora.                                                                                                                                            | Peso, dimensões e centralizadora.                                                                                                                                                                                                          |
| Paleta Englobado | Conjunto de paletes a ser entregues na mesma centralizadora. Os paletes hospedados acomodam encomendas de itens e destinatários distintos, mas da mesma centralizadora.                                                    | Peso, dimensões e centralizadora.                                                                                                                                                                                                          |
| Centralizadora   | Local onde são entregues os paletes e paletes englobados provenientes dos produtores para posterior envio aos destinatários. Os paletes podem ser desmontados e reorganizados para otimizar a roteirização das encomendas. | Localização, capacidade de armazenamento, normas que especificam novas formas de organizar as encomendas, incluindo o tempo médio necessário para as reconfigurações. Relação de produtores e destinatários atendidos pela centralizadora. |
| Veículo          | Responsável pelo transporte de paletes dos produtores até as centralizadoras e das centralizadoras até os destinatários.                                                                                                   | Capacidade de armazenamento, velocidade média e custo médio (por quilômetro).                                                                                                                                                              |
| Rota             | Meio pelo qual os veículos se locomovem.                                                                                                                                                                                   | Veículos permitidos (e.g., caminhões, barcos, etc.), distância, origem e destino.                                                                                                                                                          |

Tabela 1: Agentes do processo de Distribuição do PNLD.

início das aulas). Nesse sentido, qualquer estratégia de distribuição que não cumpra esse propósito não pode ser considerada solução do problema, mesmo que o não atendimento a uma única escola, por exemplo, resulte em drástica redução nos custos do processo. Uma vez estabelecido essa restrição de solução, alguns objetivos de eficiência podem ser especificados:

1. *Redução na duração do processo:* encontrar estratégias que possam concretizar as entregas antes do prazo, agregando maior eficiência no processo de Distribuição, é uma forma de garantir segurança para a sua conclusão, viabilizando folgas no cronograma para atividades de checagem, monitoramento e resolução de imprevistos.
2. *Redução na quantidade de encomendas:* atualmente o custo do processo é calculado pela empresa de distribuição com base na quantidade de encomendas a ser entregues [COLED, 2017], motivando o estudo de estratégias que busquem reduzir essa quantidade sem prejudicar o atendimento à demanda das escolas. Por exemplo, as especificações de tamanhos máximos de encomendas podem ser modificadas, desde que não prejudiquem seu manuseio, a fim de permitir maior agrupamento de livros. Diversas restrições, incluindo aquelas estipuladas no contrato com a empresa de distribuição, precisam ser consideradas.
3. *Redução no custo:* no lado da empresa de distribuição, estratégias que reduzem o custo operacional do processo possibilitam contratos mais interessantes para ambas as partes. Organização

das centralizadoras, quantidade e roteamento de veículos, formação de lotes e paletização, entre outros, são pontos de atenção nesta linha de otimização. Vale ressaltar a necessidade da colaboração da empresa de distribuição nessa frente de pesquisa, sobretudo em relação ao compartilhamento de dados e informações relevantes.

### 3. Identificação de Problemas de Otimização

O processo de Distribuição envolve problemas de otimização em diversas situações: (1) definição das encomendas, (2) agendamento da produção, (3) montagem dos paletes, (4) reorganização da carga e formação de lotes, (5) carregamento e roteamento dos veículos. As três primeiras situações ocorrem na etapa de Paletização Virtual, enquanto (4) ocorre na etapa de Tratamento das Encomendas e a situação (5) ocorre nas etapas de Postagem e Entrega. Embora esses problemas sejam interdependentes e um método para encontrar a solução ótima deva considerá-los simultaneamente, a decomposição em subproblemas permite uma análise aprofundada de cada etapa do processo e viabiliza estratégias mais práticas de solução. Em particular, as situações (3) e (5) identificam variantes de problemas clássicos de otimização: o *Problema do Carregamento de Paletes* (PCP) e o *Problema do Roteamento de Veículos* (PRV).

O PCP consiste em encontrar uma configuração ótima de objetos em um palete, respeitando restrições de estabilidade, altura, peso e estrutura [Ram, 1992]. Duas principais variantes são: PCP do Produtor, no qual os objetos a serem carregados são idênticos, e PCP do Distribuidor, que considera objetos diferentes. Na logística do PNLD o PCP do Produtor ocorre na paletização das encomendas, que tendem a ser idênticas ou similares, enquanto o PCP do Distribuidor ocorre no englobamento dos paletes e no tratamento das encomendas nas centralizadoras. Algoritmos exatos e heurísticos podem ser aplicados na resolução destes problemas [Martins e Dell, 2008]. Vale notar que no PNLD a disposição de encomendas nos paletes deve ser feita, sempre que possível, em camada idênticas, com o mesmo número de encomendas e coincidência das bordas [COLED, 2017]. Essa característica reduz a complexidade do PCP do Produtor no âmbito do PNLD, reduzindo-o para o problema de otimizar uma única camada do palete.

O PRV consiste em encontrar um conjunto ótimo de rotas para uma frota de veículos de modo a atender a demanda de diversos clientes a partir de um ou mais depósitos. Como no PCP, algoritmos exatos e heurísticos são aplicados, incluindo programação inteira, busca tabu, recozimento simulado e algoritmos genéticos [Toth e Vigo, 2002]. Na literatura, diversas variantes do PRV são abordadas, como o PRV com Múltiplos Depósitos e Divisão de Entrega, PRV com Janelas de Tempo e PRV com Coleta e Entrega. Na logística do PNLD o PRV ocorre no roteamento entre produtores e centralizadoras e no roteamento entre centralizadoras e destinatários. Características das variantes aparecem em ambas as situações, como múltiplos depósitos e janelas de tempo. De modo geral, a variante do PRV que inclui todas as características da logística do PNLD, denominado aqui por PRV-PNLD, é um problema de alta complexidade. Apesar disso, há a possibilidade de decomposição do problema por etapas ((i) produtores a centralizadoras, e (ii) centralizadoras a destinatários), por regiões geográficas (conjunto de destinatários alimentados por uma centralizadora) e por períodos de tempo.

### 4. Representação Computacional

Do ponto de vista computacional, o processo de Distribuição é um problema de otimização combinatória com centenas de milhares de parâmetros de entrada. As rotas interligando destinatários, centralizadoras e produtores podem ser representadas por um grafo direcionado no qual arcos representam a rota ótima entre origem e destino. O grafo pode ser pré-processado de modo a remover rotas garantidamente ruins ou inviáveis para a Distribuição, através de heurísticas e conhecimento prévio do problema (e.g., fixando rotas que são geralmente usadas para as entregas,

excluindo outras possibilidades). A estrutura do grafo pré-processado pode indicar a possibilidade de decomposição do problema por regiões geográficas, em especial no que se refere ao PRV.

As demandas dos destinatários também podem ser pré-processadas: sejam  $I = \{1, \dots, |I|\}$  o conjunto de itens e  $D = \{1, \dots, |D|\}$  o conjunto de destinatários. Cada destinatário  $d \in D$  possui uma demanda  $dem(d) = (q_1, \dots, q_{|I|})$  a ser atendida, onde  $q_i$  é a quantidade de exemplares do  $i$ -ésimo item. Como uma encomenda é um conjunto de exemplares do mesmo item e com o mesmo destinatário, é possível obter um conjunto de encomendas  $E_d$  necessárias para atender a demanda: para cada item  $i$ , enquanto  $q_i > 0$ , montar uma encomenda  $e$  de tamanho máximo e destiná-la a  $d$ , reduzindo de  $q_i$  a quantidade de itens que foram adicionados a  $e$ . Ao final, o conjunto  $E = \bigcup_{d \in D} E_d$  de todas as encomendas criadas é o necessário e suficiente para atender todas as demandas.

O conjunto de encomendas é particionado em subconjuntos  $S_1, \dots, S_{|I|}$  de forma que todas as encomendas em  $S_i$  são do  $i$ -ésimo item. Cada produtor  $q$  tem um conjunto de restrições de produção, que pode ser usado para computar a quantidade máxima  $qtd(q, i)$  de encomendas do subconjunto  $S_i$  que  $q$  é capaz de produzir em um instante de tempo<sup>1</sup>. Vale ressaltar que nesta representação considera-se que cada produtor é capaz de produzir exemplares de um único item por vez.

Assim, os parâmetros de entrada do problema são representados pela tupla  $\mathcal{T} = (G, E, D, C, Q, \lambda)$ , onde  $G$  é o grafo de rotas,  $E$ ,  $D$ ,  $C$  e  $Q$  são, respectivamente, os conjuntos de encomendas, destinatários, centralizadoras e produtores; cada um deles associado a uma partição de  $V(G)$  e a estruturas com informações relevantes para o problema (e.g., cada elemento em  $Q$  tem especificado a sua capacidade de produção, entre outros atributos), e um conjunto  $\lambda$  de informações de capacidades máximas de paletes, paletes englobados e veículos.

## 5. Paletização Virtual

A Paletização Virtual é um ponto central na estratégia atual de Distribuição, com o objetivo de montar os paletes com as encomendas de forma a otimizar a roteirização das cargas pela empresa de distribuição. Formalmente, sendo  $P$  o conjunto de paletes disponíveis, uma *paletização* é uma função  $\mathcal{P} : P \mapsto 2^E$  que associa a cada palete um subconjunto de encomendas. Uma paletização é válida se todas as restrições são satisfeitas.

Sendo  $PRV\text{-}PNLD(\mathcal{T}, \mathcal{P})$  a variante do PRV de interesse do PNLD, i.e. entregar todas as encomendas acomodadas nos paletes de acordo com a paletização  $\mathcal{P}$ , respeitando todas as restrições e minimizando o custo, a Distribuição pode ser modelada como o problema de otimização no qual deseja-se encontrar uma paletização válida que gera uma solução do PRV-PNLD de menor custo. A estratégia de Paletização Virtual visa reduzir a complexidade deste problema através da decomposição em duas etapas:

1. *Paletização Virtual*: encontrar a melhor paletização válida de acordo com os critérios de uma função de estimativa  $\xi$ :

$$\min \quad \xi(\mathcal{T}, \mathcal{P}) \quad (1)$$

$$\text{s.a.} \quad \mathcal{P} \text{ é uma paletização válida} \quad (2)$$

2. PRV-PNLD: encontrar a melhor roteirização das cargas paletizadas de acordo com a paletização virtual.

$$PRV\text{-}PNLD(\mathcal{T}, \mathcal{P}) \quad (3)$$

<sup>1</sup>Um instante de tempo pode ser definido como o período de 1 dia ou 1 semana, por exemplo.

Onde  $\xi$  é uma função que associa a cada paletização  $\mathcal{P}$  o custo estimado de resolver PRV-PNLD( $\mathcal{T}, \mathcal{P}$ ). Neste caso, a qualidade da solução está fortemente relacionada com a qualidade que a função  $\xi$  estima o custo real do roteamento. Aspectos heurísticos, específicos da empresa de distribuição, da experiência, de dados históricos, entre outros, podem ser considerados no cálculo desta estimativa. Como já relatado na seção 2, não há dados e informações suficientes disponíveis na documentação consultada para compreender seu cálculo atual.

## 6. Modelagem

Nesta seção são apresentadas modelagens de diversos aspectos da Distribuição, considerando a estrutura geral do problema decomposta em Paletização Virtual e Roteirização. O principal objetivo desta apresentação é formalizar as interações e restrições entre os agentes, permitindo uma análise mais aprofundada da complexidade do problema e de possíveis estratégias de solução. As modelagens são apresentadas de forma incremental, possibilitando um melhor entendimento de cada aspecto considerado e sua relevância para o processo de Distribuição. Considera-se que os dados foram pré-processados conforme detalhado na seção 4.

### 6.1. Modelagem da Paletização e Carregamento de Paletes

Nesta etapa deseja-se modelar o processo de paletização, contemplando a definição dos paletes, quais encomendas eles acomodam, seus produtores e centralizadoras. Quanto aos dados de entrada, os conjuntos de itens  $I = \{1, \dots, |I|\}$ , de encomendas  $E = \{1, \dots, |E|\}$ , de destinatários  $D = \{1, \dots, |D|\}$ , de centralizadoras  $C = \{1, \dots, |C|\}$  e de produtores  $Q = \{1, \dots, |Q|\}$  são enumerados com identificadores únicos. O conjunto de encomendas é particionado por item:  $E = S_1 \cup \dots \cup S_{|I|}$ , e cada encomenda tem um destinatário  $dest : E \mapsto D$ , um peso  $peso : E \mapsto \mathbb{N}$  e uma dimensão  $dim : E \mapsto \mathbb{N}^3$ . Cada destinatário pertence a uma centralizadora  $cent : D \mapsto C$  e cada produtor tem um limite de produção por unidade de tempo, para cada item:  $qtd : Q \times I \mapsto \mathbb{N}$ .

As variáveis de decisão são: a quantidade de paletes  $|P|$  necessária para acomodar todas as encomendas, enumerados com identificadores únicos,  $P = \{1, \dots, |P|\}$ ; a definição da origem e do destino do paleta, i.e., o produtor  $\mathcal{Q} : P \mapsto Q$  e a centralizadora  $\mathcal{C} : P \mapsto C$ ; e a paletização em si,  $\mathcal{P} : P \mapsto 2^E$ , descrevendo o conjunto de encomendas que será acomodado em cada paleta.

Para que a paletização seja válida as seguintes restrições devem ser satisfeitas:

$$\forall p_1, p_2 \in P : \quad p_1 \neq p_2 \implies \mathcal{P}(p_1) \cap \mathcal{P}(p_2) = \emptyset \quad (4)$$

$$\bigcup_{p \in P} \mathcal{P}(p) = E \quad (5)$$

$$\forall p \in P : \quad \mathcal{C}(p) = cent(dest(e)), \quad \forall e \in \mathcal{P}(p) \quad (6)$$

$$\forall q \in Q, \forall i \in I : \quad \sum_{p \in P, \mathcal{Q}(p)=q} |\mathcal{P}(p) \cap S_i| \leq qtd(q, i) \cdot |T| \quad (7)$$

$$\forall p \in P : \quad \mathcal{P}(p) \neq \emptyset, \mathcal{C}(p) \neq \emptyset, \mathcal{Q}(p) \neq \emptyset, \mathcal{P}(p) \in \Pi \quad (8)$$

As restrições (4) e (5) garantem, respectivamente, que cada encomenda está acomodada em um único paleta e que todas as encomendas estão contempladas pela paletização. Pela restrição (6) todas as encomendas de um paleta compartilham a mesma Centralizadora como destino. Por (7), a produção de todos os paletes de um produtor  $q$  não pode exceder a sua produção máxima de cada item, sendo  $|T|$  o número total de instantes de tempo (períodos) disponíveis para a Distribuição. A restrição (8) garante que as encomendas estão acomodadas no paleta de forma adequada, satisfazendo restrições de peso e tamanho, onde  $\Pi$  é o conjunto de todos os subconjuntos de encomendas que podem ser acomodados em um paleta.

Do ponto de vista computacional, o conjunto  $\Pi$  representa o teste de uma solução viável do PCP. Deste modo, as restrições do PCP podem ser incluídas na modelagem ou, alternativamente, pode-se considerar uma estratégia de decomposição que inclui na modelagem apenas um subconjunto das restrições do PCP, postergando a configuração das encomendas nos paletes, considerando todas as restrições, para uma segunda etapa do processo. Por exemplo, a restrição  $\mathcal{P}(p) \in \Pi$  pode ser substituída pela restrição de verificação de peso máximo do palet e a solução ótima do problema fica sujeita a uma tentativa posterior de solução do PCP para cada palet. Caso um palet não satisfaça as restrições do PCP, a violação é incluída na modelagem como uma nova restrição e o problema é resolvido novamente.

Nas modelagens que seguem, outras restrições similares à (8) são apresentadas<sup>2</sup>. Em cada caso, a mesma análise e estratégia de decomposição de problemas substituindo a restrição por outra mais simples, para posterior verificação da restrição original, mostra-se uma alternativa promissora para abordar o problema.

## 6.2. Modelagem dos Paletes Englobados

A modelagem da seção 6.1 permite que paletes sejam carregados com encomendas de diferentes itens, desde que destinadas a uma mesma centralizadora. No entanto, no processo de Distribuição há restrições quanto à paletização, sendo dois tipos de paletes considerados: (1) *paletes hospedados* (ou simplesmente *paletes*) acomodam encomendas de um mesmo item, destinadas a uma mesma centralizadora; e (2) *paletes hospedeiros* (ou *paletes englobados*) acomodam paletes de qualquer item, desde que destinados a uma mesma centralizadora.

A distinção entre os dois tipos de paletes viabiliza operações logísticas das cargas, como o carregamento adequado dos veículos, verificação e monitoramento das cargas e distribuição. Os objetos a serem distribuídos dos produtores às centralizadoras, deste modo, são os paletes e os paletes englobados, enquanto das centralizadoras aos destinatários distribui-se as encomendas (que podem ser roteirizadas nos paletes englobados, nos paletes hospedados ou em nenhum deles).

Do ponto de vista de otimização, a distinção entre os dois tipos de paletes impõe novas restrições ao problema. A função de paletização deve garantir que apenas encomendas do mesmo item sejam acomodadas em um palet:

$$\forall p \in P, \exists i \in I : \quad \mathcal{P}(p) \subseteq S_i \quad (9)$$

Por outro lado, para representar o conceito de palet englobado, novas variáveis e restrições precisam ser adicionadas ao modelo. Dadas as dimensões  $(l, p, a) \in \mathbb{N}^3$  dos paletes englobados, deseja-se encontrar a quantidade  $|P_e|$  de paletes englobados  $P_e = \{1, \dots, |P_e|\}$  e o englobamento  $\mathcal{E} : P_e \mapsto 2^P$  que associa a cada palet hospedeiro um subconjunto de paletes hospedados. As seguintes restrições precisam ser satisfeitas:

$$\forall p'_1, p'_2 \in P_e : \quad p'_1 \neq p'_2 \implies \mathcal{E}(p'_1) \cap \mathcal{E}(p'_2) = \emptyset \quad (10)$$

$$\forall p' \in P_e : \quad |\{\mathcal{C}(p) \mid p \in \mathcal{E}(p')\}| = 1 \quad (11)$$

$$\forall p' \in P_e : \quad |\{\mathcal{Q}(p) \mid p \in \mathcal{E}(p')\}| = 1 \quad (12)$$

$$\bigcup_{p' \in P_e} \mathcal{E}(p') = P \quad (13)$$

$$\forall p' \in P_e : \quad \mathcal{E}(p') \neq \emptyset, \mathcal{E}(p') \in \Omega \quad (14)$$

<sup>2</sup>Conjuntos  $\Omega$ ,  $\Gamma_q$  e  $\Theta_c$  das restrições (14), (29) e (30), respectivamente.

A restrição (10) garante que cada paleta é acomodado em um único paleta englobado. As restrições (11) e (12) garantem que todos os paletes acomodados em um paleta englobado compartilham a mesma centralizadora e o mesmo produtor. Por (13), todos os paletes devem ser contemplados pelo englobamento<sup>3</sup>. Pela restrição (14) todos os paletes são acomodados no paleta englobado de forma adequada, satisfazendo as restrições de peso e tamanho, onde  $\Omega$  é o conjunto de todos os subconjuntos de paletes que podem ser acomodados em um paleta englobado.<sup>4</sup>

### 6.3. Modelagem da Produção

Nas modelagens 6.1 e 6.2, a relação entre paletização e produção é dada pela restrição (7), garantindo que a quantidade total de encomendas paletizadas por um produtor não exceda sua capacidade total de produção, considerando todo o período  $|T|$ . Para modelar as restrições de produção por períodos (i.e., diário, semanal, etc.), discretiza-se a duração total do processo de Distribuição em períodos de tempo  $T = \{1, \dots, |T|\}$  igualmente espaçados. Para cada período  $t \in T$ , deseja-se definir a produção  $\delta : Q \times T \mapsto 2^E$  do produtor  $q$ , i.e., qual é o subconjunto de encomendas que  $q$  deverá produzir nesse período. As seguintes restrições são impostas sobre a produção:

$$\forall q \in Q, \forall t \in T : \quad \delta(q, t) \subseteq S_i, \quad i \in I \quad (15)$$

$$\forall q \in Q, \forall t \in T : \quad \delta(q, t) \subseteq S_i \implies |\delta(q, t)| \leq qtd(q, i) \quad (16)$$

$$\bigcup_{q \in Q} \bigcup_{t \in T} \delta(q, t) = E \quad (17)$$

$$\forall q_1, q_2 \in Q, \forall t_1, t_2 \in T : \quad q_1 \neq q_2 \vee t_1 \neq t_2 \implies \delta(q_1, t_1) \cap \delta(q_2, t_2) = \emptyset \quad (18)$$

$$\forall p \in P : \quad \mathcal{P}(p) \subseteq \bigcup_{t \in T} \delta(\mathcal{Q}(p), t) \quad (19)$$

As restrições (15) e (16) garantem que cada produtor produz encomendas de um único item, sem exceder a sua capacidade máxima de produção, por período. Por (17) todas as encomendas devem ser produzidas, e por (18) as encomendas serão produzidas uma única vez. Pela restrição (19) todo paleta deve acomodar encomendas da produção de um único produtor.

Outra característica do processo de Distribuição é que cada produtor organiza seu sistema para produzir todas as encomendas de cada item por vez, visando celeridade e menor custo ao evitar reconfigurações na cadeia de produção. Para incluir essa restrição no modelo, define-se um conjunto de variáveis indicando o período de início da produção de cada item, por produtor:  $\tau : Q \times I \mapsto T$ , de forma que exista uma permutação  $(i_1, \dots, i_n)$  do conjunto de itens que  $q$  é capaz de produzir tal que  $\tau(q, i_j) < \tau(q, i_{j+1})$  para todo  $1 \leq j < n$ . Para garantir a produção de todos os itens de uma vez, a restrição (20) exige que entre os períodos  $\tau(q, i_j)$  e  $\tau(q, i_{j+1})$  apenas o item  $i_j$  seja produzido.

$$\forall q \in Q, \forall t \in T, \forall j < n : \quad \tau(q, i_j) \leq t < \tau(q, i_{j+1}) \implies \delta(q, t) \subseteq S_{i_j} \quad (20)$$

### 6.4. Modelagem do Armazenamento e Entregas

A cada período, encomendas são transportadas dos produtores às centralizadoras, e destas para os destinatários. As cargas retiradas dos produtores devem respeitar um peso mínimo.

<sup>3</sup>Do ponto de vista prático, paletes que hospedam um único paleta não são considerados paletes englobados e não precisam passar pelos processos de englobamento do PNLD, de forma que o paleta hospedado será transportado até a centralizadora sem estar de fato englobado.

<sup>4</sup>Conforme mencionado na seção 6.1, o PCP pode ser usado para a verificação da restrição  $\mathcal{E}(p') \in \Omega$ , de forma integral na modelagem ou como estratégia de decomposição.

Encomendas que não são transportadas em um período devem permanecer no produtor ou na centralizadora para posterior entrega. Para modelar esses aspectos, considera-se que o grafo de rotas  $G$  contém informações do tempo necessário para o transporte até os destinos, denotado  $dist_G(u, v)$ . Além disso, as seguintes variáveis são adicionadas: encomendas armazenadas, por período, em cada produtor ( $\alpha : Q \times T \mapsto 2^E$ ) e em cada centralizadora ( $\beta : C \times T \mapsto 2^E$ ); entrega de paletes englobados por produtor, para cada período ( $P_e^* : Q \times T \mapsto 2^{P_e}$ ); e entrega de encomendas por centralizadora, também para cada período ( $E^* : C \times T \mapsto 2^E$ ).

Na sequência, são apresentadas as restrições que estabelecem a relação entre armazenamento e entregas nos diversos períodos da Distribuição. Para simplificar a notação, define-se os seguintes conjuntos:  $E_{q,t}^-$  é o conjunto de encomendas em todos os paletes entregues pelo Produtor  $q$  no período  $t$ , e  $E_{c,t}^+$  é o conjunto de encomendas recebidas pela centralizadora  $c$  no período  $t$ .

$$E_{q,t}^- := \bigcup_{p' \in P_e^*(q,t)} \bigcup_{p \in \mathcal{E}(p')} \mathcal{P}(p) \quad (21)$$

$$E_{c,t}^+ := \bigcup_{q \in Q} E_{q,t-dist_G(q,c)}^- \cap \bigcup_{p \in P, \mathcal{C}(p)=c} \mathcal{P}(p) \quad (22)$$

A modelagem proposta é ilustrada na Figura 2. As restrições são as seguintes:

$$\forall q \in Q, \forall t \in T : E_{q,t}^- \subseteq \alpha(q, t-1) \cup \delta(q, t) \quad (23)$$

$$\forall q \in Q, \forall t \in T : \alpha(q, t) = (\alpha(q, t-1) \cup \delta(q, t)) \setminus E_{q,t}^- \quad (24)$$

$$\forall c \in C, \forall t \in T : E^*(c, t) \subseteq \beta(c, t-1) \cup E_{c,t}^+ \quad (25)$$

$$\forall c \in C, \forall t \in T : \beta(c, t) = (\beta(c, t-1) \cup E_{c,t}^+) \setminus E^*(c, t) \quad (26)$$

$$\forall q \in Q : \alpha(q, 0) = \alpha(q, T) = \emptyset \quad (27)$$

$$\forall c \in C : \beta(c, 0) = \beta(c, T) = \emptyset \quad (28)$$

$$\forall q \in Q, \forall t \in T : \alpha(q, t) \in \Gamma_q \quad (29)$$

$$\forall c \in C, \forall t \in T : \beta(c, t) \in \Theta_c \quad (30)$$

$$\forall e \in E^*(c, t) : t + dist_G(c, dest(e)) \leq |T| \quad (31)$$

$$\forall q \in Q, \forall t \in T : \sum_{p' \in P_e^*} \sum_{p \in \mathcal{E}(p')} \sum_{e \in \mathcal{P}(p)} peso(e) \geq pesoMinimo \quad (32)$$

A restrição (23) garante que as encomendas entregues pelo produtor estão disponíveis no período  $t$ , isto é, são encomendas que estavam armazenadas no produtor no período anterior ou que foram produzidas por ele no período atual. A restrição (24) define que as encomendas que ficam armazenadas no produtor no período  $t$  são aquelas que estavam disponíveis neste período, excluindo as encomendas que foram entregues. De forma análoga, as restrições (25) e (26) garantem que as encomendas entregues pela centralizadora estão disponíveis no período  $t$  e que as encomendas que ficam armazenadas são as que estavam armazenadas no período anterior, incluindo as encomendas que foram recebidas pela centralizadora no período atual, excluindo todas as encomendas que foram entregues. Por (27) e (28), nenhuma encomenda deve estar armazenada nos produtores e nas centralizadoras no início e no término da Distribuição. Pelas restrições (29) e (30), o armazenamento nos produtores e nas centralizadoras devem respeitar as restrições de armazenagem de cada produtor e de cada centralizadora. A restrição (31) garante que todas as encomendas são entregues nos destinatários antes do término do prazo de Distribuição. Por (32), a carga transportada a partir

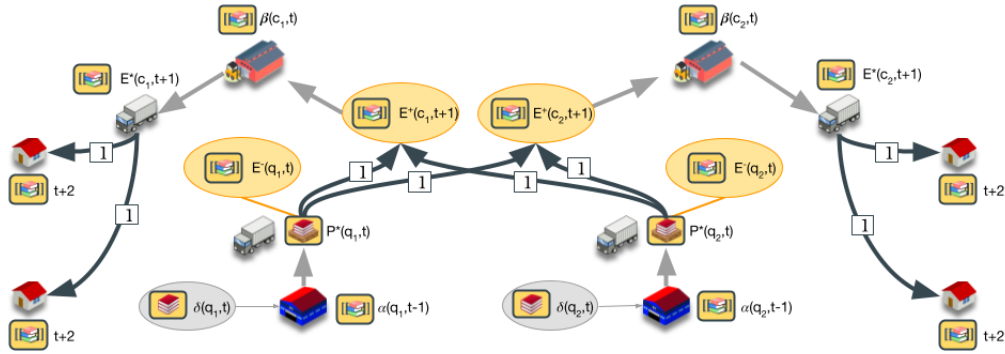


Figura 2: Modelagem das restrições de armazenamento e entregas.

do produtor  $q$  no período  $t$  atende ao limite mínimo de peso. A modelagem proposta não contempla restrições de reorganização das cargas nas centralizadoras, uma vez que as informações necessárias não estão disponíveis nos documentos analisados. A representação destas informações no modelo podem impactar diretamente a definição da função objetivo.

### 6.5. Modelagem da Função Objetivo

Na Paletização Virtual, a função objetivo depende fortemente da estimativa  $\xi$ , a qual inclui componentes heurísticos e fatores de interesse da empresa de distribuição. Embora essas informações não estejam disponíveis, ao considerar as modelagens apresentadas nesta seção e os objetivos elencados na seção 2, algumas componentes da função objetivo podem ser propostas: minimizar o número de períodos necessários para a completa Distribuição ( $\min |T|$ ) e minimizar a quantidade de paletes ( $\min |P|$ ) ou paletes englobados ( $\min |P_e|$ ). Vale notar que nesta modelagem não é viável reduzir a quantidade de encomendas, pois estas são criadas de tamanho máximo no pré-processamento de forma a atender toda a demanda.

Quanto à minimização do custo de Distribuição, principalmente no lado da empresa de distribuição, a função  $\xi$  deve estimar qual é o custo da solução ótima do PRV-PNLD com a paletização encontrada, usando heurísticas, estatísticas, algoritmos aproximados, entre outros. A identificação de fatores de otimização em parceria com a empresa de distribuição é ponto fundamental para a modelagem da função objetivo. Por exemplo, pode-se considerar que para maior eficiência da Distribuição é desejável que os paletes sejam reorganizados o mínimo possível durante o processo. Neste caso, a função de estimativa deve preferir paletizações que acomodam em um paleta encomendas do mesmo destinatário ou de destinatários próximos, e.g., do mesmo bairro, cidade ou município:

$$\min \sum_{p' \in P_e} \sum_{p \in \mathcal{E}(p')} distancia_G(p) \quad (33)$$

Onde  $distancia_G(p)$  é um cálculo da distância geográfica entre todos os destinatários das encomendas acomodadas no paleta  $p$ . A definição exata de  $distancia_G(p)$  depende ainda da forma que as encomendas são reorganizadas nas centralizadoras para a formação de lotes. Sabe-se que um paleta  $p$  no qual as encomendas têm todas o mesmo destinatário ( $distancia_G(p) = 0$ ) não precisa ser reorganizado na centralizadora, oferecendo redução de custos e celeridade ao processo. Porém, não há informações suficientes dos custos envolvendo outras organizações de paletes e como esse custo se relaciona com o critério  $distancia_G$ .

## 7. Considerações Finais

O processo de Distribuição do PNLD é um problema de alta complexidade envolvendo diversos agentes e restrições, com o objetivo primário de entregar todos os livros e materiais didáticos às escolas do Brasil antes do início das aulas, otimizando os recursos disponíveis. Neste artigo esse processo foi formalizado como um problema de otimização combinatória, possibilitando uma melhor compreensão do processo e a análise de estratégias de decomposição. Entre elas, destaca-se a Paletização Virtual, atualmente utilizada no PNLD e aqui formalizada como uma decomposição que reduz consideravelmente a complexidade do problema, embora sem garantia da solução ótima.

Diversas frentes de pesquisa podem derivar deste trabalho, como a análise de outras estratégias de decomposição (e.g. por períodos, por regiões e por subproblemas, incluindo o PCP e o PRV), proposição de heurísticas específicas do domínio, desenvolvimento de técnicas e algoritmos de otimização, entre outros. Em particular, pretende-se a continuação do presente trabalho com a implementação do modelo em uma linguagem de programação por restrições para análise do impacto de cada conjunto de restrições na complexidade do problema. Em todas as frentes aqui indicadas, destaca-se a importância de cooperação com a empresa de distribuição para o entendimento de aspectos ainda desconhecidos, disponibilidade de dados e acesso a informações que possam auxiliar na otimização.

O PNLD tem um grande impacto social e a sua logística apresenta enorme interesse prático e teórico. Nesse sentido, esse artigo contribui para uma apresentação inicial do problema, sua modelagem e o entendimento no contexto da otimização combinatória.

## Referências

- Brasil (2017). Decreto nº 9.099, de 18 de julho de 2017. dispõe sobre o programa nacional do livro e do material didático. Disponível em [www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/\\_ato2015-2018/2017/decreto/D9099.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/decreto/D9099.htm). Acessado em: 08 de junho de 2023.
- Cassiano, C. C. F. (2007). *O mercado do livro didático no Brasil: da criação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) à entrada do capital internacional espanhol (1985-2007)*. PhD thesis, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
- COLED (2017). Contrato nº 57/2017. processo nº 23034.036029/2017-94. 114p.
- FNDE (2021). Programa nacional do livro e do material didático – pnld: Entendendo a distribuição. Technical report, FNDE. 20p.
- Martins, G. H. e Dell, R. F. (2008). Solving the pallet loading problem. *European Journal of Operational Research*, 184(2):429–440.
- Ram, B. (1992). The pallet loading problem: A survey. *International Journal of Production Economics*, 28(2):217–225.
- SEI/FNDE (2017). Nota técnica nº 3/2017/coled/cgpli/dirae. processo nº 23034. 036029/2017-94 - contratação de serviços de logística para o pnld. 4p.
- Toth, P. e Vigo, D. (2002). *The Vehicle Routing Problem*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Valente, P. P. (2021). Produto 03: Relatório analítico. Technical report, UNESCO. Projeto 914BRZ1071. 67p.