São José dos Campos - SP
LV SBPO
LV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional
São José dos Campos, SP - 6 a 9 de novembro de 2023

Tempo de Iteração e Número de Posição Geral em Convexidade de Grafos

Júlio Araújo
Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará (UFC), Fortaleza, Brasil
julio@mat.ufc.br
Mitre C. Dourado
Instituto de Computação, Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Brazil
mitre@ic.ufrj.br
Fábio Protti
Instituto de Computação, Universidade Federal Fluminense (UFF), Brazil
fabio@ic.uff.br
Rudini M. Sampaio
Departamento de Computação, Universidade Federal do Ceará (UFC), Fortaleza, Brasil
rudini@dc.ufc.br

RESUMO

Nesse artigo, estudamos dois parâmetros de convexidade de grafos: tempo de iteração e número de posição geral. O primeiro foi definido na convexidade geodésica em 1981, mas sua complexidade estava ainda em aberto. O segundo foi definido na convexidade geodésica e provado NP-difícil em 2018. Estendemos esses parâmetros para qualquer convexidade e provamos que o tempo de iteração é NP-difícil na convexidade P_3 e, com isso, conseguimos provar que ele também é NP-difícil na convexidade geodésica mesmo em grafos com diâmetro dois, uma questão natural que estava sem resposta desde quando o parâmetro foi definido, em 1981. Esses resultados são também importantes, visto que são os últimos dois resultados de NP-completude que faltavam entre os dez parâmetros mais estudados de convexidade de grafos nas convexidades P_3 e geodésica. Finalmente também provamos que o número de posição geral da convexidade monofônica é NP-difícil, $W[1]$-difícil (parametrizado pelo tamanho da solução) e $n^{1-\varepsilon}$-inaproximável em tempo polinomial para qualquer $\varepsilon > 0$ a menos que $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$, mesmo em grafos com diâmetro dois.

PALAVRAS CHAVE. Convexidade de Grafos, Tempo de iteração, Número de Posição Geral. Teoria dos Grafos, Complexidade Computacional, Análise de Algoritmos.

ABSTRACT

In this paper, we study two graph convexity parameters: iteration time and general position number. The first was defined in 1981 in the geodesic convexity, but its computational complexity was still open. The second was defined in the geodesic convexity and proved NP-hard in 2018. We extend these parameters to any graph convexity and prove that the iteration number is NP-hard in the P_3 convexity and, with this result, we can prove that the iteration time is also NP-hard in the geodesic convexity even in graphs with diameter two, a very natural question which was unsolved since 1981. These results are also important, since they are the last two missing NP-hardness results regarding the ten most studied graph convexity parameters in the geodesic and P_3 convexities. Finally, we also prove that the general position number of the monophonic convexity is NP-hard, $W[1]$-hard (parameterized by the size of the solution) and $n^{1-\varepsilon}$-inapproximable in polynomial time for any $\varepsilon > 0$ unless $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$, even in graphs with diameter two.

KEYWORDS. Graph convexidade, tempo de iteração, número de posição geral, NP**-dificuldade. Graph Theory, Computational Complexity, Analysis de Algorithms.**

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174973
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174973

1. Introdução

Convexidade é um tema clássico, investigado em muitas áreas diferentes da Matemática. A pesquisa em convexidades aplicadas a grafos começou recentemente, cerca de 50 anos atrás. Segundo Duchet [1987], o primeiro artigo em grafos gerais, publicado em inglês, é o artigo intitulado "*Convexity in graphs*" de Harary e Nieminem [1981], onde foi introduzido o tempo de iteração na convexidade geodésica[1]. Outro importante parâmetro de convexidade de grafos é o número da posição geral, que está relacionado ao clássico problema *No-three-in-line* de Dudeney [1917], definido inicialmente como *Puzzle with Pawns*, que busca o maior número de vértices de uma grade $m \times m$ sem que três formem uma reta, problema o qual permanece em aberto para $m > 46$ de acordo com Flammenkamp [1998]. A definição explícita desse parâmetro para a convexidade geodésica foi feita por Manuel e Klavžar [2018a].

Originalmente, esses parâmetros foram definidos apenas na convexidade geodésica. Nossa primeira contribuição é a definição desses dois parâmetros para qualquer convexidade de grafos. Nós também provamos resultados de complexidade computacional desses parâmetros nas três principais convexidades de grafos: geodésica, monofônica e P_3. Para isso, precisamos de algumas notações.

Segundo van de Vel [1993], uma *convexidade* $\mathcal{C}$ em um conjunto finito $V \neq \emptyset$ é uma família de subconjuntos de V tal que $\emptyset, V \in \mathcal{C}$ e $\mathcal{C}$ é fechado sob interseção. Ou seja, $S_1, S_2 \in \mathcal{C}$ implica $S_1 \cap S_2 \in \mathcal{C}$. Um membro de $\mathcal{C}$ é denominado um *conjunto $\mathcal{C}$-convexo*. Dado $S \subseteq V$, o *fecho $\mathcal{C}$-convexo* de S é o menor conjunto $\mathcal{C}$-convexo $\mathrm{conv}_{\mathcal{C}}(S)$ contendo S. Dizemos que S é um *conjunto de envoltória* em $\mathcal{C}$ se $\mathrm{conv}_{\mathcal{C}}(S) = V$. É fácil ver que $\mathrm{conv}_{\mathcal{C}}(\cdot)$ é um *operador de fecho (closure operator)*, ou seja, para todo $S, S' \subseteq V$:

(i) $S \subseteq \mathrm{conv}_{\mathcal{C}}(S)$ (extensividade),

(ii) $S \subseteq S' \Rightarrow \mathrm{conv}_{\mathcal{C}}(S) \subseteq \mathrm{conv}_{\mathcal{C}}(S')$ (monotonicidade),

(iii) $\mathrm{conv}_{\mathcal{C}}(\emptyset) = \emptyset$ (normalização[2]) e

(iv) $\mathrm{conv}_{\mathcal{C}}(S) = \mathrm{conv}_{\mathcal{C}}(\mathrm{conv}_{\mathcal{C}}(S))$ (idempotência).

Dizemos que $\mathrm{I}_{\mathcal{C}} : 2^V \to 2^V$ é uma *função intervalo* em V se, para todo $S, S' \subseteq V$ temos:

(i) $S \subseteq \mathrm{I}_{\mathcal{C}}(S)$ (extensividade),

(ii) $S \subseteq S' \Rightarrow \mathrm{I}_{\mathcal{C}}(S) \subseteq \mathrm{I}_{\mathcal{C}}(S')$ (monotonicidade) e

(iii) $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}(\emptyset) = \emptyset$ (normalização).

Note que funções de intervalo só não precisam satisfazer a propriedade (iv) de idempotência do fecho convexo. É fácil ver que toda função de intervalo $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}(\cdot)$ sobre V *induz* a convexidade $\mathcal{C}$ dos subconjuntos $S \subseteq V$ tais que $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}(S) = S$. Sabe-se que o fecho convexo de um conjunto S pode ser obtido aplicando exaustivamente a função de intervalo correspondente até obter um conjunto convexo. Dizemos que S é um *conjunto de intervalo* em $\mathcal{C}$ se $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}(S) = V$.

Dado um grafo finito G, uma *convexidade de grafos* sobre G é simplesmente uma convexidade $\mathcal{C}$ em $V(G)$ com uma dada função de intervalo $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}(\cdot)$ em $V(G)$. Um modo padrão de definir

[1] Alguns autores, como Pelayo [2013], usam os termos *geodético* e *geodética* como adjetivos do substantivo *geodésica*. No entanto, livros clássicos como van de Vel [1993] e Gruber e Wills [1993] não usam esses termos, usando *geodésico* e *geodésica* como adjetivos do substantivo *geodésica*. Preferimos seguir esse padrão.

[2] van de Vel [1993] considera a propriedade de normalização na definição de operador de fecho.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174973
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174973

uma *convexidade $\mathcal{C}$ de grafos* em um grafo G é fixando uma família $\mathcal{P}$ de caminhos de G e tomando a função de intervalo $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}(S)$ como o conjunto com todos os vértices de algum caminho de $\mathcal{P}$ cujas extremidades estão em S. As convexidades de grafos mais estudadas são convexidades de caminhos, como a *convexidade geodésica* (Harary e Nieminem [1981]; Everett e Seidman [1985]), a *convexidade monofônica* (Jamison [1982]; Farber e Jamison [1986]; Duchet [1988]), a *convexidade* P_3 (Centeno et al. [2009]) e a *convexidade* P_3^* (Araújo et al. [2013]), nas quais $\mathcal{P}$ é respectivamente a família de todos os caminhos mínimos do grafo, de todos os caminhos induzidos, de todos os caminhos de 3 vértices e de todos os caminhos induzidos de 3 vértices.

Usaremos os subscritos g, m, $\mathrm{p3}$ e $\mathrm{p3}^*$ para nos referirmos às convexidades geodésica, monofônica, P_3 e P_3^*, respectivamente. Quando não houver risco de confusão, podemos omitir $\mathcal{C}$ do subscrito e escrever apenas *conjunto convexo*, *fecho convexo*, $\mathrm{conv}(S)$ e $\mathrm{I}(S)$.

Seja G um grafo e $S \subseteq V(G)$. O tempo de iteração $\mathrm{ti}_{\mathcal{C}}(S)$ na convexidade $\mathcal{C}$ é o menor k tal que $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}^k(S) = \mathrm{conv}_{\mathcal{C}}(S)$, ou seja, k aplicações da função de intervalo são necessárias a fim de obter o fecho convexo de S. Seja também $\mathrm{ti}_{\mathcal{C}}(G)$ o máximo valor de $\mathrm{ti}_{\mathcal{C}}(S)$ entre os subconjuntos S de $V(G)$. O tempo de iteração é um dos primeiros parâmetros estudados de convexidade de grafos, introduzido por Harary e Nieminem [1981] na convexidade geodésica. Parvathy e Vijayakumar [1998] obtiveram limitantes para o tempo de iteração geodésico. Dourado et al. [2016] obtiveram um algoritmo polinomial para computar o tempo de iteração geodésico em grafos distância hereditária, o qual foi melhorado por Moscarini [2020]. Apesar disso, a complexidade computacional do tempo de iteração não havia sido determinada em grafos gerais, para nenhuma convexidade de grafos.

Um subconjunto $S \subseteq V(G)$ está em *posição geral* em uma convexidade $\mathcal{C}$ se $z \notin \mathrm{I}_{\mathcal{C}}(\{x, y\})$ para quaisquer $x, y, z \in S$ distintos. Seja o número de posição geral $\mathrm{gp}_{\mathcal{C}}(G)$ o tamanho do maior subconjunto de $V(G)$ em posição geral na convexidade $\mathcal{C}$. Na convexidade P_3, curiosamente qualquer conjunto em posição geral induz um subgrafo com grau máximo 1 e, portanto, $\mathrm{gp}_{\mathrm{p3}}(G)$ é equivalente ao *número $diss(G)$ de dissociação* do grafo G, parâmetro introduzido por Yannakakis [1981] e provado NP-difícil mesmo em grafos bipartidos e em grafos planares com grau máximo 4. Na convexidade P_3^*, qualquer conjunto em posição geral induz um subgrafo cujas componentes conexas são cliques e, portanto, $\mathrm{gp}_{\mathrm{p3}^*}(G)$ é equivalente ao *número IUC* do grafo G (*IUC - independent union of cliques*), parâmetro introduzido por Ertem et al. [2020] e provado NP-difícil mesmo em grafos planares.

Na convexidade geodésica, o número de posição geral é uma generalização do clássico problema *No-three-in-line* sobre a grade $m \times m$ da geometria discreta, que foi definido originalmente como *Puzzle with Pawns* no famoso livro "Amusements em Mathematics" de Dudeney [1917]. Esse problema permanece em aberto para a grade $m \times m$ para $m > 46$ de acordo com Flammenkamp [1998]. Todos os resultados a seguir são para a convexidade geodésica. Körner [1995] investigou o número de posição geral em hipercubos, mas foi investigado em grafos gerais pela primeira vez por Chandran S. V. e Parthasarathy [2016]. No entanto, a formalização e definição do problema como conhecido hoje foi feita por Manuel e Klavžar [2018a,b]. Veja também Froese et al. [2017]; Ku e Wong [2018]; Misiak et al. [2016]; Payne e Wood [2013] para o problema relacionado da seleção de subconjunto em posição geral da geometria computacional. Manuel e Klavžar [2018a] provaram que determinar o número de posição geral é um problema NP-completo. Anand et al. [2019] caracterizaram conjuntos em posição geral e, depois disso, vários artigos sobre o problema da posição geral foram publicados, muitos deles com limitantes para o tamanho máximo de um conjunto em posição geral e valores exatos em produtos de grafos - Chandran S. V. e Thomas [2020]; Klavžar et al. [2021a,b]; Klavžar e Rus [2021]; Klavžar e Yero [2019]; Patkós [2020]; Tian

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174973
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174973

e Xu [2021]; Tian et al. [2021].

Neste artigo, nós provamos que determinar o tempo de iteração na convexidade P_3 é um problema NP-completo. Com esse resultado, conseguimos provar que o tempo de iteração também é NP-difícil na convexidade geodésica, uma questão natural que estava sem resposta desde quando o parâmetro foi definido, em 1981. Além desses pontos, nós consideramos que esses resultados são ainda mais importantes pelo fato de que são os últimos dois resultados de NP-completude que faltavam entre os dez principais parâmetros de convexidade de grafos nas convexidades geodésica e P_3. Para justificar essa afirmação, note que os nove parâmetros de convexidade a seguir são NP-difíceis nas convexidades geodésica e P_3: *número de envoltória* (*hull number*) e *número de convexidade* (Araujo et al. [2013]; Araújo et al. [2013]; Dourado et al. [2012]), *número de intervalo* (Centeno et al. [2009]; Harary et al. [1993]), *número de Carathéodory* (Barbosa et al. [2012]; Coelho et al. [2015]), *número de Radon* (Araújo et al. [2018]; Dourado et al. [2013]), *número de Helly* (Carvalho [2016]; Dourado e da Silva [2017]), *número de posição geral* (Manuel e Klavžar [2018a]; Yannakakis [1981]), *posto* (*rank*) (Kanté et al. [2017]; Ramos et al. [2014]) e *tempo de percolação* (Araújo et al. [2018]; Marcilon e Sampaio [2018]).

Finalmente também provamos que o número de posição geral da convexidade monofônica é NP-difícil, $W[1]$-difícil (parametrizado pelo tamanho da solução) e $n^{1-\varepsilon}$-inaproximável em tempo polinomial para qualquer $\varepsilon > 0$ a menos que $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$, mesmo em grafos com diâmetro dois.

2. Resultados Preliminares

Dado um inteiro positivo n, seja $[n] = \{1, \ldots, n\}$. Dizemos que um vértice v tem *tempo de iteração* $k > 0$ *com início em* S se $v \in I_{\mathcal{C}}^{k}(S) \setminus I_{\mathcal{C}}^{k-1}(S)$, e dizemos que os vértices de S tem tempo de iteração 0 *com início em* S.

Lema 2.1. *Seja $n \geq 4$ inteiro. No grafo completo K_n e no ciclo C_n, temos:*

- $\mathrm{ti_{p3}}(K_n) = 1$ *e* $\mathrm{ti_g}(K_n) = \mathrm{ti_m}(K_n) = 0$,
- $\mathrm{ti_{p3}}(C_n) = \mathrm{ti_g}(C_n) = \mathrm{ti_m}(C_n) = 1$.

Demonstração. Seja S um subconjunto próprio de pelo menos dois vértices de K_n. Na convexidade P_3, $\mathrm{I_{p3}}(S)$ contém todos os vértices de K_n, pois todo vértice em $V(K_n) \setminus S$ tem dois vizinhos em S. Portanto $\mathrm{ti_{p3}}(K_n) = 1$. Na convexidade monofônica, $\mathrm{I_m}(S) = \mathrm{conv_m}(S) = S$, pois nenhum vértice está em um caminho induzido entre dois vértices de K_n. Portanto $\mathrm{ti_m}(K_n) = 0$. Consequentemente, na convexidade geodésica, $\mathrm{ti_g}(K_n) = 0$.

Agora seja S um subconjunto próprio de pelo menos 2 vértices não-adjacentes de C_n. Na convexidade P_3, $v \in \mathrm{I_{p3}}(S)$ se $v \in S$ ou seus 2 vizinhos estão em S. Logo $\mathrm{I_{p3}}(S) = \mathrm{conv_{p3}}(S)$. Logo $\mathrm{ti_{p3}}(C_n) = 1$. Na convexidade monofônica, $\mathrm{I_m}(S)$ contém todos os vértices de C_n, pois todo vértice está em um caminho induzido entre dois vértices não-adjacentes de C_n. Portanto, $\mathrm{ti_m}(C_n) = 1$. Ademais, na convexidade geodésica, $\mathrm{I_g}(S)$ contém todos os vértices se e somente se S contém três vértices x, y, z tais que a distância entre x e y é menor que a soma das distâncias entre x e z, e entre z e y. Nesse caso, $\mathrm{ti_g}(S) = \mathrm{ti_g}(\{x, y, z\}) = 1$. Caso contrário, $\mathrm{I_g}(S) = \mathrm{I_g}(\{x, y\})$, onde x e y são os vértices de S com distância máxima. Portanto $\mathrm{ti_g}(C_n) = 1$. □

Lema 2.2. *Seja T uma árvore com pelo menos três vértices. Logo* $\mathrm{ti_g}(T) = \mathrm{ti_m}(T) = 1$. *Além disso* $\mathrm{ti_{p3}}(T) = k \geq 1$ *se e somente se T tem um caminho $v_1, v_2, \ldots, v_k$ tal que v_i tem grau pelo menos 3 para todo $1 \leq i < k$ e v_k tem grau pelo menos dois.*

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174973
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174973

Demonstração. Em uma árvore, $\mathrm{I_m}(S) = \mathrm{I_g}(S) = \mathrm{conv_m}(S) = \mathrm{conv_g}(S)$ para todo $S \subseteq V(T)$. Portanto, como T tem dois vértices não-adjacentes, $\mathrm{ti_g}(T) = \mathrm{ti_m}(T) = 1$.

Agora considere a convexidade P_3 em T. Seja $S \subseteq V(T)$ com $\mathrm{ti}(S) = k \geq 1$. Logo S contém um caminho $v_1, v_2, \ldots, v_k$ tal que v_i tem tempo de iteração i, com início em S, para todo $i \in [k]$. Claramente, para todo $1 < i < k$, v_i deve ter pelo menos um vizinho além de v_{i-1} e v_{i+1}, e consequentemente o grau de v_i é pelo menos 3. Além disso, v_1 deve ter pelo menos dois vizinhos além de v_2, e v_n deve ter pelo menos um vizinho além de v_{k-1}. Portanto, v_i tem grau pelo menos 3 para todo $1 \leq i < k$ e v_k tem grau pelo menos dois.

Finalmente suponha que T tem um caminho $v_1, v_2, \ldots, v_k$ tal que v_i tem grau pelo menos 3 para todo $1 \leq i < k$ e v_k tem grau pelo menos dois. Seja $S \subseteq V(T)$ tal que $S \cap \{v_1, \ldots, v_k\} = \emptyset$ e S contém exatamente dois vizinhos de v_1 e exatamente um vizinho de v_i para todo $1 < i \leq k$. Note que $\mathrm{ti_{p3}}(S) = k$, pois v_i tem tempo de iteração i para todo $i \in [k]$. Portanto, $\mathrm{ti_{p3}}(T) \geq k$. □

Como mencionado antes, o número de posição geral foi investigado nas convexidades geodésica e P_3 em vários artigos. O lema a seguir é sobre este parâmetro na convexidade monofônica em grafos simples, como os grafos roda (*wheel graphs*) W_n para $n \geq 4$, obtidos de um ciclo C_{n-1} adicionando um vértice universal.

Lema 2.3. *Seja $n \geq 4$ um inteiro. Na convexidade monofônica, $\mathrm{gp_m}(C_n) = \mathrm{gp_m}(P_n) = 2$ e $\mathrm{gp_m}(K_n) = n$. Além disso, $\mathrm{gp_m}(W_4) = 4$ e $\mathrm{gp_m}(W_n) = 3$ para $n \geq 5$.*

Demonstração. No grafo completo K_n, nenhum vértice está em um caminho induzido entre dois vértices x e y, além de x e y. Logo $V(K_n)$ está em posição geral. Portanto $\mathrm{gp_m}(K_n) = n$. No ciclo C_n, todo vértice está em um caminho induzido entre dois vértices não-adjacentes quaisquer. Logo $\mathrm{gp_m}(C_n) = 2$. No caminho P_n, $\mathrm{conv_m}(S) = \mathrm{I_m}(S) = \mathrm{I_m}(\{x, y\})$, onde x e y são os vértices de S com distância máxima em P_n. Logo $\mathrm{gp_m}(P_n) = 2$.

Nos grafos roda, temos que $W_4 = K_4$ e portanto $\mathrm{gp_m}(W_4) = 4$. Para $n \geq 5$, temos que todo vértice está em um caminho induzido entre quaisquer dois vértices não adjacentes do ciclo principal de W_n. Com isso, um conjunto máximo em posição geral deve conter o vértice universal e dois vértices adjacentes do ciclo principal e, portanto, $\mathrm{gp_m}(W_n) = 3$ para $n \geq 5$.

□

3. Tempo de iteração é NP-difícil na convexidade P_3

Nós primeiro provamos um lema que será útil para o teorema principal desta seção.

Lema 3.1. *Seja G um grafo e k um inteiro positivo. Se $S \subseteq V(G)$ e $\mathrm{ti_{p3}}(S) \geq k$, então o subgrafo H de G induzido por $\mathrm{conv_{p3}}(S)$ contém um caminho $v_1, \ldots, v_k$ de vértices fora de S, onde v_1 é adjacente a dois vértices de S, o grau de v_i em H é pelo menos 3 para todo $1 \leq i < k$ e o grau de v_k em H é pelo menos 2.*

Demonstração. Seja H o subgrafo de G induzido por $\mathrm{conv_{p3}}(S)$. Como $\mathrm{ti_{p3}}(S) \geq k$, então, com início em S, os vértices de S tem tempo de iteração 0 e, para todo $i \in [k]$, existe um vértice v_i com tempo de iteração i adjacente a um vértice com tempo de iteração $i - 1$. Portanto, H tem um caminho $v_1, v_2, \ldots, v_k$ de vértices fora de S tal que v_i tem tempo de iteração i para todo $i \in [k]$, v_1 é adjacente a dois vértices de S e v_i é adjacente a um vértice fora desse caminho cujo tempo de iteração é no máximo $i - 1$. □

O teorema a seguir contém o resultado principal desta seção.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174973
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174973

Teorema 3.2. *Dado um grafo G e um inteiro positivo k, decidir se o tempo $\mathrm{ti}_{\mathrm{p3}}(G)$ de iteração P_3 é pelo menos k é um problema* NP*-completo mesmo em grafos bipartidos.*

Demonstração. Vamos provar que o problema do tempo de iteração P_3 é NP-completo a partir de redução polinomial do problema **3-SAT**. Dadas $m \geq 10$ cláusulas $\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_m\}$ sobre variáveis $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de uma instância de **3-SAT**, denote os três literais de c_i por $\ell_{i,1}$, $\ell_{i,2}$ e $\ell_{i,3}$. Seja $k = 2m$ e seja G o grafo construído a seguir.

Para cada cláusula c_i de $\mathcal{C}$, adicione a G os vértices c_i, c'_i, p'_i, $\ell_{i,1}$, $\ell_{i,2}$ e $\ell_{i,3}$, e adicione as arestas $p'_ic'_i$, c'_ic_i, $c_i\ell_{i,1}$, $c_i\ell_{i,2}$ e $c_i\ell_{i,3}$. Crie um vértice p''_1 e adicione a aresta $p''_1c'_1$. Também adicione $c_ic'_{i+1}$ para todo $1 \leq i < m$. Além disso, para cada par de literais $\ell_{i,a}$ e $\ell_{j,b}$ tal que um é a negação do outro, adicione os vértices $w_{i,j,a,b}$ e $w'_{i,j,a,b}$ adjacentes aos vértices $\ell_{i,a}$ e $\ell_{j,b}$. Também adicione os vértices w_i e w'_i, e adicione as arestas $w_i\ell_{i,p}$ e $w'_i\ell_{i,p}$ para todo $i \in [m]$ e $p \in [3]$. Seja W o conjunto de todos os vértices $w_{i,j,a,b}$, $w'_{i,j,a,b}$, w_i e w'_i. Finalmente, adicione os vértices z e z' adjacentes a todos os vértices de W. Seja L o conjunto de todos os vértices $\ell_{i,a}$ e seja C o conjunto de todos os vértices c_i. Note que G é bipartido.

Vamos provar que $\mathcal{C}$ é satisfatível se e somente se G contém um conjunto $S \subseteq V(G)$ tal que $\mathrm{ti}_{\mathrm{p3}}(G) \geq k = 2m$.

Suponha que $\mathcal{C}$ tem uma atribuição que a satisfaz. Para cada cláusula c_i, seja $a_i \in \{1, 2, 3\}$ tal que ℓ_{i,a_i} é verdadeiro nesta atribuição, para todo $i \in [m]$. Seja $S = \{\ell_{i,a_i},\ p'_i : i \in [m]\} \cup \{p''_1\}$. Note que nenhum vértice de W está em $\mathrm{conv}(S)$, pois S foi obtido de uma atribuição válida. Além disso, com início em S, o tempo de iteração de c_i é $2i$ para todo i. Consequentemente, o tempo de iteração de G é pelo menos $2m$.

Agora, suponha que G tem um conjunto S com tempo de iteração $\mathrm{ti}_{\mathrm{p3}}(S) = 2m \geq 20$. Seja H o subgrafo induzido por $\mathrm{conv}_{\mathrm{p3}}(S)$. Se H contém dois vértices $\ell_{i,a}$ e $\ell_{j,b}$ com tempos de iteração no máximo 4 tais que o literal $\ell_{i,a}$ é a negação do literal $\ell_{j,b}$ (e vice-versa), então o tempo de iteração de $w_{i,j,a,b}$ e $w'_{i,j,a,b}$ é pelo menos 5, o tempo de iteração de z e z' é pelo menos 6, o tempo de iteração dos vértices restantes de W é pelo menos 7, o tempo de iteração dos vértices restantes de L é pelo menos 8 e o tempo de iteração dos vértices de C é pelo menos 9, uma contradição, pois $2m \geq 20$. Analogamente, H contém no máximo um vértice de $\ell_{i,1}$, $\ell_{i,2}$ e $\ell_{i,3}$, para todo $i \in [m]$. Pelo mesmo argumento, H não contém dois vértices de W com tempos de iteração no máximo 5, nem z e z' com tempos de iteração no máximo 6.

Com isso, concluímos que H contém no máximo um vértice de W, no máximo um vértice de $\{z, z'\}$ e no máximo um vértice de $\{\ell_{i,1}, \ell_{i,2}, \ell_{i,3}\}$ para todo $i \in [m]$. Portanto, se exatamente um vértice de $\{z, z'\}$ pertence a H, seu grau é pelo menos 1 em H. se exatamente um vértice de W pertence a H, seu grau é pelo menos 2 em H. Além disso, o grau de todo $\ell_{i,a}$ em H é pelo menos 1, exceto no máximo um vértice com grau no máximo 2 em H.

Logo, pelo Lemma 3.1, a única possibilidade para o tempo de iteração $2m$ é o caminho $c'_1, c_1, c'_2, c_2, \ldots, c'_m, c_m$ de G com tempos de iteração $1, 2, \ldots, 2m$, respectivamente. Como o tempo de iteração de c'_1 is 1, podemos assumir que $p'_1, p''_1 \in S$. Então, para todo vértice c_i, deve existir pelo menos um vizinho $\ell_{i,a} \in S$. Portanto, atribuindo verdadeiro ao literal $\ell_{i,a}$ para todo vértice $\ell_{i,a} \in S$, nós obtemos uma atribuição válida. □

4. Tempo de iteração é NP-difícil na convexidade geodésica

O lema a seguir mostra uma redução importante da convexidade P_3 para a convexidade geodésica.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174973
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174973

Lema 4.1. *Seja G um grafo e seja G_u o grafo obtido de G adicionando um vértice universal u. Se G é livre de triângulos e tem pelo menos 3 vértices, então* $\mathrm{ti_g}(G_u) = \max\{\mathrm{ti_{p3}}(G), 1\}$ *e* $\mathrm{gp_g}(G_u) = \max\{\mathrm{gp_{p3}}(G),\ \omega(G) + 1\}$.

Demonstração. Como G_u tem o vértice universal u, então o diâmetro de G_u é dois. Note que todo caminho mínimo em G_u entre dois vértices não-adjacentes de G é um P_3, que é induzido pois G é livre de triângulos.

Se G não tem nenhum P_3, então $\mathrm{ti_{p3}}(G) = 0$ e $\mathrm{ti_g}(G_u) = 1$, onde u é o vértice de G_u com tempo de iteração 1 na convexidade geodésica. Logo assuma que G tem um P_3 induzido e consequentemente $\mathrm{ti_{p3}}(G) \geq 1$ e $\mathrm{ti_g}(G_u) \geq 1$. Vamos provar que $\mathrm{ti_g}(G_u) = \mathrm{ti_{p3}}(G)$. Seja $S \subseteq V(G)$ com tempo de iteração $t \geq 1$ na convexidade P_3. Claramente S contém dois vértices não-adjacentes e portanto u tem tempo de iteração 1 na convexidade geodésica sobre G_u com início em S. Como u é universal, nenhum vértice de G está em um menor caminho entre u e outro vértice. Ou seja, u não ajuda a gerar outros vértices. Com isso, concluímos que o tempo de iteração de todo vértice de G na convexidade P_3 sobre G com início em S é igual ao tempo de iteração do mesmo vértice de G na convexidade geodésica sobre G_u com início em S. Portanto o tempo de iteração de S na convexidade geodésica sobre G_u é igual ao tempo de iteração de S na convexidade P_3 sobre G. Por outro lado, como mencionado, o tempo de iteração de S na convexidade P_3 sobre G é igual ao tempo de iteração de $S \cup \{u\}$ na convexidade geodésica sobre G_u.

Agora considere o número de posição geral. Seja S um conjunto em posição geral P_3 de G. Claramente S é também um conjunto em posição geral geodésica de G_u. Se S contém dois vértices não-adjacentes, então $S \cup \{u\}$ não é um conjunto em posição geral geodésica de G_u; caso contrário, $S \cup \{u\}$ é uma clique e um conjunto em posição geral geodésica de G_u. Por outro lado, seja S' um conjunto em posição geral geodésica de G_u. Se S' contém u, então S' deve ser uma clique e portanto $S' \setminus \{u\}$ é uma clique de G. Caso contrário, S é também um conjunto em posição geral P_3 de G. □

Nós resolvemos agora a questão natural da NP-dificuldade do tempo de iteração geodésico, que está sem resposta desde quando o parâmetro foi definido, em 1981. Note que a prova do teorema abaixo depende fortemente do fato de que o tempo de iteração P_3 é NP-difícil (Teorema 3.2).

Teorema 4.2. *Dado um grafo G e um inteiro k, decidir se o tempo de iteração geodésico* $\mathrm{ti_g}(G)$ *é pelo menos k é um problema* NP*-completo mesmo em grafos com diâmetro dois.*

Demonstração. Direto da redução do Lemma 4.1 a partir do tempo de iteração na convexidade P_3, que é NP-difícil pelo Teorema 3.2. □

5. Número de posição geral é NP-difícil na convexidade monofônica

Como dito anteriormente, o número de posição geral na convexidade geodésica foi bastante investigado recentemente e, além disso, na convexidade P_3, esse parâmetro é equivalente ao número de dissociação, bastante investigado na literatura. Nesta seção, obtemos resultados de complexidade computacional do número de posição geral na convexidade monofônica.

Teorema 5.1. *Dado um grafo G e um inteiro $k > 0$, decidir se o número* $\mathrm{gp_m}(G)$ *de posição geral monofônica é pelo menos k é um problema* NP*-completo, mesmo em grafos com diâmetro dois.*

Demonstração. Vamos obter uma redução polinomial a partir do problema Clique, que tem como instância um grafo H e um inteiro positivo ℓ e pergunta se H possui uma clique de tamanho pelo

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174973
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174973

menos ℓ. Sejam $v_1, \ldots, v_n$ os vértices de H em que podemos assumir que $n \geq 3$ e H não possui vértices isolados. Vamos construir um grafo G a partir de H, adicionando para cada vértice v_i um vértice u_i adjacente a todos os vértices de H exceto v_i. Além disso, inclua o vértice u adjacente a todos os vértices $u_1, \ldots, u_n$. Note que todo caminho induzido em H também é induzido em G. Sejam $i, j, k \in [n]$ distintos.

Primeiramente note que $\mathrm{I_m}(\{v_i, u_i\}) = V(G)$, pois os vértices u e u_j pertencem ao caminho induzido $v_i - u_j - u - u_i$ e, se v_j é adjacente a v_i, então v_j pertence ao caminho induzido $v_i - v_j - u_i$, caso contrário, v_j pertence ao caminho induzido $v_i - u_k - v_j - u_i$.

Agora suponha que v_i e v_j não são adjacentes. Logo $\mathrm{I_m}(\{u_i, u_j\}) = V(G)$, pois o vértice u pertence ao caminho induzido $u_i - u - u_j$, o vértice v_k pertence ao caminho induzido $u_i - v_k - u_j$ e os vértices v_i, v_j e u_k pertencem ao caminho induzido $u_i - v_j - u_k - v_i - u_j$. Vamos provar também que $\mathrm{I_m}(\{v_i, v_j\}) = V(G)$. Se v_k é adjacente a v_i e v_j, então v_k pertence ao caminho induzido $v_i - v_k - v_j$. Se v_k é adjacente a v_i, mas não a v_j, então v_k pertence ao caminho induzido $v_i - v_k - u_i - v_j$. Se v_k é adjacente a v_j, mas não a v_i, então v_k pertence ao caminho induzido $v_i - u_j - v_k - v_j$. Se v_k não é adjacente a v_i nem v_j, então v_k pertence ao caminho induzido $v_i - u_j - v_k - u_i - v_j$. Além disso, o vértice u_k pertence ao caminho induzido $v_i - u_k - v_j$, e os vértices u, u_i e u_j pertencem ao caminho induzido $v_i - u_j - u - u_i - v_j$.

Seja então S um conjunto em posição geral monofônica com pelo menos 3 vértices. Portanto, S deve induzir uma clique em H e não pode conter dois vértices v_i e u_i para um mesmo i. Ademais, S não contém dois vértices u_i e u_j tais que v_i e v_j não são adjacentes. Além disso, S não pode conter três vértices u_i, u_j e v_k para i, j, k distintos, pois v_k está no caminho induzido $u_i - v_k - u_j$.

Com isso concluímos que S consiste de (a) uma clique de G (formada por uma clique de H com um vértice u_k), ou (b) de uma clique de H mais o vértice u, ou (c) $S \subseteq \{u_1, \ldots, u_n\}$ é tal que $\{v_i : u_i \in S\}$ induz uma clique de H. Desse modo, H possui uma clique de tamanho k se e só se G possui um conjunto em posição geral monofônica de tamanho $\ell = k + 1$. □

Corolário 5.2. *Seja G um grafo com diâmetro dois. O problema de decisão do conjunto em posição geral monofônica em G, quando parametrizado pelo tamanho k da solução, é $W[1]$-difícil. Ademais, o problema de obter o maior conjunto em posição geral monofônica de G não possui algoritmo polinomial com fator de aproximação $n^{1-\varepsilon}$ para nenhum $\varepsilon > 0$, a menos que $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$.*

Demonstração. Esses resultados saem diretamente da redução do teorema anterior, visto que é uma redução FPT que também preserva aproximação e que Clique é W[1]-difícil (Downey e Fellows [2012]) e $n^{1-\varepsilon}$-inaproximável para qualquer $\varepsilon > 0$, a menos que $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$ (Zuckerman [2006]). □

Referências

Anand, B. S., Chandran S. V., U., Changat, M., Klavžar, S., e Thomas, E. J. (2019). Characterization of general position sets and its applications to cographs and bipartite graphs. *Applied Mathematics and Computation*, 359:84–89.

Araujo, J., Campos, V., Giroire, F., Nisse, N., Sampaio, L., e Soares, R. (2013). On the hull number of some graph classes. *Theoretical Computer Science*, 475:1–12. ISSN 0304-3975.

Araújo, R. T., Sampaio, R. M., dos Santos, V. F., e Szwarcfiter, J. L. (2018). The convexity of induced paths of order three and applications: Complexity aspects. *Discrete Applied Mathematics*, 237:33–42.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174973
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174973

Araújo, R. T., Sampaio, R. M., e Szwarcfiter, J. L. (2013). The convexity of induced paths of order three. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 44:109–114. ISSN 1571-0653.

Barbosa, R. M., Coelho, E. M. M., Dourado, M. C., Rautenbach, D., e Szwarcfiter, J. L. (2012). On the carathéodory number for the convexity of paths of order three. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 26(3):929–939.

Carvalho, M. T. (2016). *O Número de Helly na Convexidade Geodética em Grafos*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Centeno, C. C., Dourado, M. C., e Szwarcfiter, J. L. (2009). On the convexity of paths of length two in undirected graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 32:11–18. DIMAP Workshop on Algorithmic Graph Theory.

Chandran S. V., U. e Parthasarathy, G. J. (2016). The geodesic irredundant sets in graphs. *International Journal of Mathematical Combinatorics*, 4:135–143.

Chandran S. V., U. e Thomas, E. J. (2020). Characterization of classes of graphs with large general position number. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 17:935–939.

Coelho, E. M. M., Dourado, M. C., e Sampaio, R. M. (2015). Inapproximability results for graph convexity parameters. *Theoretical Computer Science*, 600:49–58.

Dourado, M. C. e da Silva, A. R. (2017). Inapproximability results and bounds for the helly and radon numbers of a graph. *Discrete Applied Mathematics*, 232:134–141.

Dourado, M. C., Oliveira, R. A., Protti, F., e Rautenbach, D. (2016). On the geodetic iteration number of distance-hereditary graphs. *Discrete Mathematics*, 339(2):489–498.

Dourado, M. C., Protti, F., Rautenbach, D., e Szwarcfiter, J. L. (2012). On the convexity number of graphs. *Graphs and Combinatorics*, 28(3):333–345.

Dourado, M. C., Rautenbach, D., dos Santos, V. F., Schäfer, P. M., Szwarcfiter, J. L., e Toman, A. (2013). Algorithmic and structural aspects of the p3-radon number. *Annals of Operations Research*, 206:75–91.

Downey, R. e Fellows, M. (2012). *Parameterized Complexity*. Springer.

Duchet, P. (1987). Convexity in combinatorial structures. In *Proceedings of the 14th Winter School on Abstract Analysis*, p. 261–293. Circolo Matematico di Palermo. URL `http://eudml.org/doc/220736`. Proceedings of the 14th Winter School on Abstract Analysis.

Duchet, P. (1988). Convex sets in graphs, II. Minimal path convexity. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 44(3):307–316.

Dudeney, H. E. (1917). *Amusements in Mathematics*. Thomas Nelson and Sons Ltd, Edinburgh.

Ertem, Z., Lykhovyd, E., Wang, Y., e Butenko, S. (2020). The maximum independent union of cliques problem: complexity and exact approaches. *Journal of Global Optimization*, 76:545–562.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174973
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174973

Everett, M. G. e Seidman, S. B. (1985). The hull number of a graph. *Discrete Mathematics*, 57(3): 217–223.

Farber, M. e Jamison, R. E. (1986). Convexity in graphs and hypergraphs. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 7(3):433–444.

Flammenkamp, A. (1998). Progress in the no-three-in-line problem, ii. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 81(1):108–113.

Froese, V., Kanj, I., Nichterlein, A., e Niedermeier, R. (2017). Finding points in general position. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 27:277–296.

Gruber, P. M. e Wills, J. M. (1993). *Handbook of Convex Geometry*. North Holland.

Harary, F., Loukakis, E., e Tsouros, C. (1993). The geodetic number of a graph. *Mathematical and Computer Modelling*, 17(11):89–95.

Harary, F. e Nieminem, J. (1981). Convexity in graphs. *Journal of Differential Geometry*, 16(1): 185–190.

Jamison, R. E. (1982). A perspective on abstract convexity: classifying alignments by varieties. *Convexity and Related Combinatorial Geometry*.

Kanté, M. M., Sampaio, R. M., dos Santos, V. F., e Szwarcfiter, J. L. (2017). On the geodetic rank of a graph. *Journal of Combinatorics*, 8(2):323–340.

Klavžar, S., Kuziak, D., Peterin, I., e Yero, I. G. (2021a). A steiner general position problem in graph theory. *Computational and Applied Mathematics*, 40(6):artigo 223.

Klavžar, S., Patkós, B., Rus, G., e Yero, I. G. (2021b). On general position sets in Cartesian products. *Results in Mathematics*, 76:artigo 123.

Klavžar, S. e Rus, G. (2021). The general position number of integer lattices. *Applied Mathematics and Computation*, 390:artigo 125664.

Klavžar, S. e Yero, I. G. (2019). The general position problem and strong resolving graphs. *Open Mathematics*, 17:1126–1135.

Ku, C. Y. e Wong, K. B. (2018). On no-three-in-line problem on m-dimensional torus. *Graphs and Combinatorics*, 34:355–364.

Körner, J. (1995). On the extremal combinatorics of the hamming space. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 71:112–126.

Manuel, P. e Klavžar, S. (2018a). A general position problem in graph theory. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 98(2):177–187.

Manuel, P. e Klavžar, S. (2018b). The graph theory general position problem on some interconnection networks. *Fundamenta Informaticae*, 163:339–350.

Marcilon, T. e Sampaio, R. M. (2018). The maximum time of 2-neighbor bootstrap percolation: Complexity results. *Theoretical Computer Science*, 708:1–17.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174973
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174973

Misiak, A., Stcedillaonepień, Z., Szymaszkiewicz, A., Szymaszkiewicz, L., e Zwierzchowski, M. (2016). A note on the no-three-in-line problem on a torus. *Discrete Mathematics*, 339:217–221.

Moscarini, M. (2020). On the geodetic iteration number of a graph in which geodesic and monophonic convexities are equivalent. *Discrete Applied Mathematics*, 283:142–152.

Parvathy, K. S. e Vijayakumar, A. (1998). Geodesic iteration number. In *Conference on Graph Connections*, p. 91–94, Allied Publishers, New Delhi, India.

Patkós, B. (2020). On the general position problem on Kneser graphs. *Ars Mathematica Contemporanea*, 18:273–280.

Payne, M. S. e Wood, D. R. (2013). On the general position subset selection problem. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 27(4):1727–1733.

Pelayo, I. M. (2013). *Geodesic Convexity in Graphs*. Springer. ISBN 9781461486992.

Ramos, I., dos Santos, V. F., e Szwarcfiter, J. L. (2014). Complexity aspects of the computation of the rank of a graph. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, 16(2).

Tian, J. e Xu, K. (2021). The general position number of Cartesian products involving a factor with small diameter. *Applied Mathematics and Computation*, 403:artigo 126206.

Tian, J., Xu, K., e Klavžar, S. (2021). The general position number of the Cartesian product of two trees. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 104:1–10.

van de Vel, M. L. J. (1993). *Theory of convex structures*, volume 50. Elsevier.

Yannakakis, M. (1981). Node-deletion problems on bipartite graphs. *SIAM Journal on Computing*, 10(2):310–327.

Zuckerman, D. (2006). Linear degree extractors and the inapproximability of max clique and chromatic number. In *ACM*, STOC'06, p. 681–690.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174973
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174973