

A CONTAGEM DE INTERVALO DE UMA CLASSE DE GRAFOS *SPLIT*

Lívia Salgado Medeiros

Instituto de Matemática e Estatística – Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)

CEP 20550-900 – Rio de Janeiro – RJ – Brazil

liviasmedeiros@gmail.com

Fabiano de Souza Oliveira

Instituto de Matemática e Estatística – Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)

CEP 20550-900 – Rio de Janeiro – RJ – Brazil

fabiano.oliveira@ime.uerj.br

Jayme Luiz Szwarcfiter

COPPE, NCE, IM – Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)

CEP 21941-600 – Rio de Janeiro – RJ – Brazil

jayme@nce.ufrj.br

RESUMO

A complexidade do problema de determinar o menor número de tamanhos distintos de intervalo suficiente para representar um grafo de intervalo, conhecido como contagem de intervalo, está em aberto mesmo para grafos de intervalo *split*. Dizemos que um intervalo x está aninhado ao intervalo y em um modelo de intervalo se há dois intervalos intersectantes a y , um precedendo e outro sucedendo x no modelo. A profundidade de aninhamento desse modelo é o tamanho da maior cadeia de intervalos aninhados. A profundidade de aninhamento de um grafo de intervalo é a menor profundidade de aninhamento sobre todos os modelos associados, sendo um limite inferior natural para a contagem de intervalo. Cerioli et al. [2014] estabeleceram limites para a contagem de intervalo para subclasses de *split*, que também limitam a profundidade de aninhamento. Mostramos grafos *split* para os quais a contagem de intervalo é maior que a profundidade de aninhamento.

PALAVRAS CHAVE. Contagem de intervalo, Grafo de intervalo, Ordem de intervalo.

TAG – Teoria e Algoritmos em Grafos

ABSTRACT

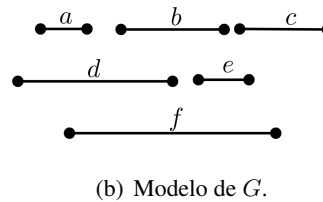
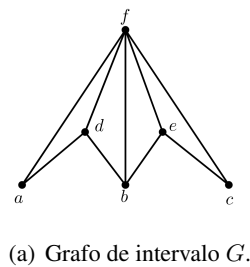
The complexity of determining the smallest number of distinct interval lengths which is sufficient to represent an interval graph, known as interval count, is open even for split interval graphs. We say that an interval x is nested to the interval y in an interval model if there are two intervals intersecting y , one preceding and the other succeeding x in the model. The nesting depth of this model is the size of the largest chain of nested intervals. The nesting depth of an interval graph is the smallest nesting depth over all corresponding models, being a natural lower bound for the interval count. Cerioli et al. [2014] established upper bounds on the interval count of subclasses of split graphs which are also upper bounds on the nesting depth. We show the existence of split graphs for which the interval count is greater than the nesting depth.

KEYWORDS. Interval count. Interval graph. Interval Order.

TAG - Theory and Algorithms in Graphs.

1. Introdução

Um grafo é um *grafo de intervalo* se o seu conjunto de vértices pode corresponder a uma família de intervalos na reta real, chamada *modelo*, tal que dois vértices distintos são adjacentes no grafo se e somente se os intervalos correspondentes se intersectam mutuamente. Uma *ordem de intervalo* é uma ordem parcial sobre um modelo em que a relação de precedência corresponde a dos intervalos, ou seja, cada elemento x da ordem está associado a um intervalo I_x do modelo e para todo par de elementos a, b da ordem, a precede b se e somente se I_a estiver inteiramente à esquerda de I_b . A Figura 1(a) apresenta um grafo de intervalo G e a Figura 1(b) apresenta um modelo de G . A Figura 1(c) descreve as comparabilidades da ordem de intervalo associada ao modelo da Figura 1(b).



$a \prec x$, para todo $x \in \{b, c, e\}$
 $b \prec c$
 $d \prec x$, para todo $x \in \{c, e\}$

(c) Ordem de intervalo P .

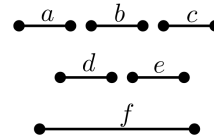


Figura 1: Um grafo de intervalo G e dois modelos com diferentes números de tamanhos distintos.

Ronald Graham propôs a questão de determinar o número mínimo de tamanhos de intervalo que é suficiente para representar um modelo de um dado grafo de intervalo G , que ficou conhecido como o *problema da contagem de intervalo*. Tal número mínimo de tamanhos é denotado por $IC(G)$, e por $IC(P)$ quando ao invés do grafo é dada certa ordem de intervalo P . A Figura 1(a) apresenta um exemplo de um grafo de intervalo G e dois modelos com diferentes números de tamanhos distintos. O modelo de G da Figura 1(b) apresenta quatro tamanhos distintos e aquele da Figura 1(d), também modelo de G , apresenta dois tamanhos distintos. Como o intervalo f é centro de $K_{1,3}$, o grafo não é de intervalo unitário. Portanto, a Figura 1(d) realiza a contagem de intervalo de G , que é igual a 2. Em outras palavras, $IC(G) = 2$.

O problema de decidir eficientemente se um grafo de intervalo ou ordem de intervalo admite um modelo utilizando um único tamanho encontra-se resolvido, uma vez que é equivalente ao problema de reconhecer grafos e ordens de intervalos unitários [Hell e Huang, 2005; Cornell et al., 1995; Lin et al., 2009; Gardi, 2007]. No entanto, decidir eficientemente se um grafo ou ordem de intervalo admite um modelo que utiliza no máximo k tamanhos está em aberto, para todo $k \geq 2$ [Fishburn, 1985; Cerioli et al., 2012; Klavík et al., 2019]. Embora o estudo do parâmetro da contagem de intervalo remonte ao final da década de 1970, apesar de todos os esforços, a maioria dos problemas sugeridos à época permanecem em aberto. Um *survey* sobre o problema pode ser encontrado em [Cerioli et al., 2012].

Nesse trabalho, como o problema de interesse é o problema da contagem de intervalo, só definida para grafos e ordens de intervalo, redefiniremos por conveniência os termos *grafo* e *ordem* para denotar um grafo de intervalo e uma ordem de intervalo, respectivamente. Com isso, omitiremos a qualificação “de intervalo” dos termos.

Dizemos que um intervalo x_1 está *aninhado* ao intervalo x_2 em um modelo de intervalo se há dois intervalos intersectantes a x_2 , um precedendo e outro sucedendo x_1 no modelo, conforme ilustra a Figura 2(a). A *profundidade de aninhamento* de um modelo é o tamanho da maior cadeia de intervalos aninhados. A Figura 2(b) ilustra um modelo com profundidade de aninhamento k . A *profundidade de aninhamento* de uma ordem é definida como aquela de um modelo dessa ordem, e a de um grafo é a menor profundidade de aninhamento sobre todos os modelos correspondentes ao grafo. Serão mostrados mais exemplos desses conceitos adiante.

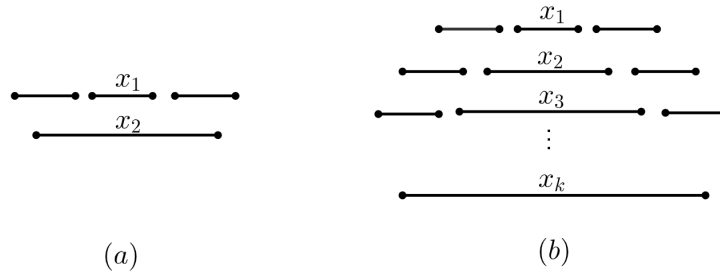


Figura 2: (a) $x_1 \prec_N x_2$; (b) $x_1 \prec_N x_2 \prec_N x_3 \prec_N \dots \prec_N x_k$.

A profundidade de aninhamento é um limite inferior da contagem de intervalo de ordens e grafos; afinal, se x é um intervalo aninhado ao intervalo y em um modelo associado a dada ordem, o tamanho de x será necessariamente menor que aquele de y em todos os modelos dessa ordem. Analogamente, a profundidade de aninhamento de um grafo é um limite inferior para sua contagem de intervalo. Em algumas classes, a profundidade de aninhamento de uma ordem ou grafo é igual à contagem de intervalo dessa ordem ou grafo. Em particular, Cerioli et al. [2011] mostraram que se P é uma ordem livre de touro estendido, então a contagem de intervalo de P é igual a profundidade de aninhamento de P . Um grafo G é um *touro estendido* se é isomorfo ao grafo obtido de um caminho induzido $x_1, y_1, \dots, y_r, x_2$, para algum $r \geq 2$, com o acréscimo de um vértice adjacente a todos os demais vértices exceto x_1 e x_2 .

Há exemplos em que uma ordem/grafos possui contagem de intervalo superior a sua profundidade de aninhamento. Fishburn mostrou que esses parâmetros podem estar arbitrariamente distantes. Fishburn [1985] apresentou uma família de ordens $\mathcal{D}_2$ de profundidade de aninhamento 2 para as quais a contagem de intervalo é arbitrariamente grande, estabelecendo o seguinte teorema.

Teorema 1. [Fishburn, 1985] Para todo natural $k \geq 1$, existe uma ordem de intervalo $P_k \in \mathcal{D}_2$ tal que $IC(P_k) \geq k + 1$.

O número de elementos envolvidos na construção de cada ordem $P_k \in \mathcal{D}_2$ cresce exponencialmente com k . A Figura 3 ilustra um modelo da ordem P_2 , para a qual $IC(P_2) \geq 3$.

Em [Cerioli et al., 2011], apresenta-se um algoritmo polinomial para se determinar a profundidade de aninhamento de um grafo G e de uma ordem P . Assim, tal algoritmo pode ser empregado para a determinação de $IC(G)$ ou $IC(P)$ se a contagem de intervalo de G ou P for igual a sua profundidade de aninhamento. De maneira independente, Klavík et al. [2019] elaboraram um algoritmo de tempo linear para computar a profundidade de aninhamento de um grafo.

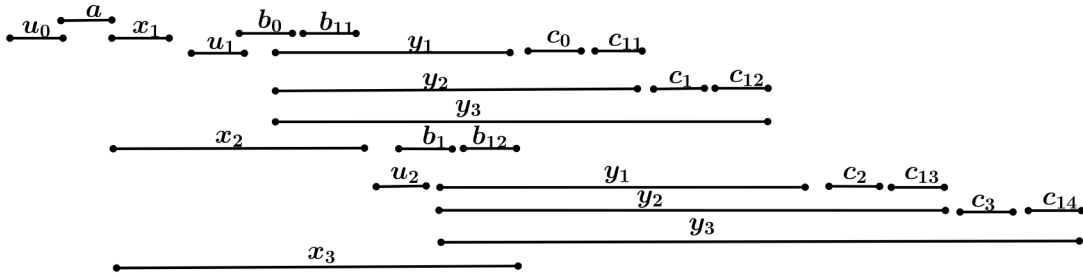


Figura 3: Modelo de P_2 da família $\mathcal{D}_2$.

Um grafo é *split* se o seu conjunto de vértices pode ser particionado em uma clique e um conjunto independente. Cerioli et al. [2014] estabeleceram a contagem de intervalo para subclasses de grafos *split* que foram chamadas de SPLIT^2 e SPLIT^3 . Os índices em superescrito no nome das classes prescrevem o valor da contagem de intervalo dos membros das respectivas subclasses. Para a classe geral de grafos *split*, a complexidade da computação da contagem de intervalo está em aberto, além da questão da existência ou não de grafos *split* para os quais a contagem de intervalo é maior que a profundidade de aninhamento. Mostramos adiante que, de fato, esse é o caso. Neste trabalho, estudamos o problema da contagem de intervalo restrito à classe de ordens e grafos *split* de profundidade de aninhamento dois.

Grafos de intervalo e ordens de intervalo são temas bem estudados na literatura, tanto pelo interesse teórico quanto no estudo de suas aplicações, com dezenas ou centenas de artigos publicados. Assim, o estudo da contagem de intervalo, uma questão de otimização natural para essa classe, tem importância por si só. Mas além disso, o parâmetro pode ser empregado também como uma forma de parametrizar os grafos/ordens de intervalo. Recentemente, Figueiredo et al. [2023] mostraram uma prova de NP-completude do problema de corte máximo (MAXCUT) quando restrito a grafos de intervalo com contagem de intervalo 4. Ainda está em aberto a complexidade de determinar o corte máximo para grafos de intervalo com contagem de intervalo no máximo 3, em particular, igual a 1 (grafos de intervalo próprio).

O trabalho está organizado da seguinte forma. Na Seção 2, apresentamos os conceitos e notações empregados no trabalho. Na Seção 3, apresentamos os resultados. As observações finais encontram-se na Seção 4.

2. Preliminares

Dados um grafo G e um vértice $v \in V(G)$, denotamos por $N(v)$ a *vizinhança* de v , que consiste do conjunto dos vértices de $V(G)$ adjacentes a v . A *vizinhança fechada* de v , denotada por $N[v]$, consiste de $N(v) \cup \{v\}$. Dois vértices distintos $u, v \in V(G)$ são chamados *gêmeos* se $N[u] = N[v]$. Dado $S \subseteq V(G)$, o *grafo induzido* $G[S]$ é tal que seu conjunto de vértices é S e seu conjunto de arestas é $\{(u, v) \mid u, v \in S, (u, v) \in E(G)\}$. Uma *clique* (resp. um *conjunto independente*) de G é um subconjunto de $V(G)$ tal que todo par de vértices distintos desse subconjunto são mutuamente adjacentes (resp. não adjacentes). Um vértice $v \in V(G)$ é dito ser *simplicial* se $N[v]$ é uma clique.

Um grafo G é *split* se $V(G)$ pode ser particionado em uma clique K e um conjunto independente I . Se todos os vértices de I forem adjacentes a todos os vértices de K , G é chamado de *grafo split completo*.

Um grafo G é chamado *grafo de intervalo* se existe uma família $\mathcal{M}$ de intervalos fechados na reta real na qual cada $x \in V(G)$ corresponde a um intervalo $I_x \in \mathcal{M}$ tal que, para todo $x, y \in V(G)$ com $x \neq y$, $(x, y) \in E(G)$ se e somente se $I_x \cap I_y \neq \emptyset$. Chamamos $\mathcal{M}$ de um *modelo* de G . Uma ordem $P = (X, \prec)$ é uma relação binária $\prec$ no conjunto X que é irreflexiva e transitiva. Além disso, $P = (X, \prec)$ é uma *ordem de intervalo* se existe um modelo de intervalo $\mathcal{M} = \{[\ell_x, r_x] \mid x \in X\}$ tal que $x \prec y$ se e somente se $r_x < \ell_y$. A notação $x \prec y$ denota que o elemento x precede y na ordem e, neste caso, dizemos que x e y são *comparáveis*. Caso contrário, se $x \not\prec y$ e $y \not\prec x$, x e y são ditos *incomparáveis*. O menor número $IC(G)$ (resp. $IC(P)$) de tamanhos distintos de intervalos suficiente para representar um modelo de G (resp. P) é chamado *contagem de intervalo* (do inglês, *interval count*) de G (resp. P). Formalmente, denotando por $IC(\mathcal{M})$ o número de tamanhos distintos de intervalo presentes no modelo $\mathcal{M}$, temos que

$$IC(P) = \min\{IC(\mathcal{M}) \mid \mathcal{M} \text{ é um modelo de } P\}$$

$$IC(G) = \min\{IC(\mathcal{M}) \mid \mathcal{M} \text{ é um modelo de } G\}$$

A contagem de intervalo pode diferir para ordens e grafos associados a um mesmo modelo devido à relação de precedência entre intervalos definida pelas ordens, que não está fixada pelos grafos. A Figura 4(a) realiza a contagem de intervalo da ordem P associada ao modelo, que é igual a 3, mesmo valor da profundidade de aninhamento do modelo. Se considerarmos o problema da contagem de intervalo ao grafo associado ao mesmo modelo, é possível rearranjar os intervalos de modo que a Figura 4(b) realiza a contagem de intervalo de G , que é igual a 2. De maneira geral, temos que se certo modelo é associado tanto a uma ordem P quanto a um grafo G , então $IC(G) \leq IC(P)$.

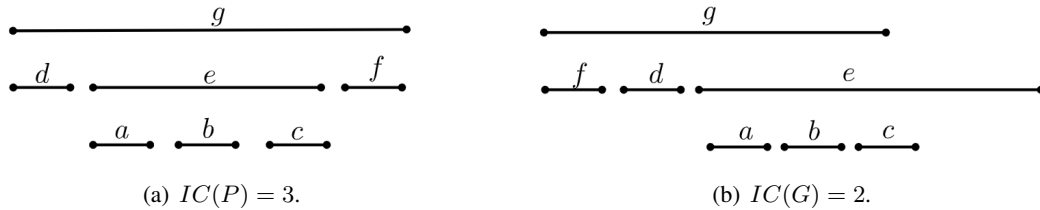


Figura 4: Contagem de intervalo para ordens e grafos.

Seja $P = (X, \prec)$, define-se a ordem *de aninhamento* $P_N = (X, \prec_N)$ por $x \prec_N y$ se existe $a, b \in X$ tal que $a \prec x \prec b$ e w é incomparável a y para todo $w \in \{a, x, b\}$. Veja a Figura 2(a) para uma representação visual da relação $x_1 \prec_N x_2$. Note que, de fato, $\prec_N$ é uma relação transitiva, uma vez que se $x \prec_N y$ e $y \prec_N z$, então $x \prec_N z$. Observe a Figura 2(b). A *profundidade de aninhamento de uma ordem* $P = (X, \prec)$ é o maior k para o qual observa-se que $x_1 \prec_N \dots \prec_N x_k$, o que será denotado por $\eta(P)$. A *profundidade de aninhamento de um grafo* G (denotado por $\eta(G)$) é a menor profundidade de aninhamento dentre todas as ordens que admitem um modelo comum a G , isto é, $\eta(G) = \min\{\eta(P) \mid P \text{ é uma ordem e existe um modelo comum a } P \text{ e a } G\}$. A profundidade de aninhamento é um limite inferior para o problema da contagem de intervalo, isto é, $IC(P) \geq \eta(P)$ e $IC(G) \geq \eta(G)$.

Dada uma ordem $P = (X, \prec)$, o *grafo de incomparabilidade* de P é o grafo G tal que $V(G) = X$ e $(u, v) \in E(G)$ se e somente se u e v são incomparáveis em P . Por simplicidade, permitiremos o abuso de linguagem de fazer proposições acerca de uma ordem quando queremos nos

referir acerca do respectivo grafo de incomparabilidade. Por exemplo, diremos que dois elementos de uma ordem são gêmeos querendo dizer que os respectivos vértices no grafo de incomparabilidade são gêmeos. Outro exemplo é dizer que uma ordem P pertence a determinada classe $\mathcal{C}$ definida como classe de grafos querendo dizer que o grafo de incomparabilidade de P pertence a $\mathcal{C}$ (ex.: diremos que P é uma ordem *split* quando o grafo de incomparabilidade de P for um grafo *split*).

3. Contagem de intervalo de subclasses de grafos *split*

Seja G um grafo *split* com partição $K \cup I = V(G)$, onde K é uma clique e I é um conjunto independente de G . Sem perda de generalidade, assumamos que G é livre de gêmeos, pois a introdução de vértices gêmeos a qualquer grafo não altera nem sua contagem de intervalo, nem sua profundidade de aninhamento. Além disso, também assumamos que a bipartição $K \cup I = V(G)$ é tal que todo vértice da clique é adjacente a algum vértice do conjunto independente (se esse não for o caso, podemos mover tais vértices da clique para o conjunto independente).

Seja $\mathcal{M}$ um modelo de G e P a ordem correspondente a $\mathcal{M}$. Para definir as subclasses de *split* que foram chamadas SPLIT^2 e SPLIT^3 introduzidas em Cerioli et al. [2014], empregou-se as partições $K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup U$ de K e $I_1 \cup I_2 \cup I_3$ de I definidas com respeito a P da seguinte forma (acompanhe as definições a seguir com a representação esquemática da Figura 5):

- U é o conjunto que consiste do vértice universal (vértice adjacente a todos os demais) se existente, ou $U = \emptyset$ caso contrário;
- $v \in K_1$ se v não sucede nenhum elemento de I ; $v \in K_2$ se v não precede nenhum elemento de I ; $v \in K_3$ caso suceda e preceda ao menos um elemento de I ;
- $v \in I_1$ se v precede algum elemento de K ; $v \in I_2$ se v sucede algum elemento de K ; $v \in I_3$ se v é incomparável a todos os elementos de K .

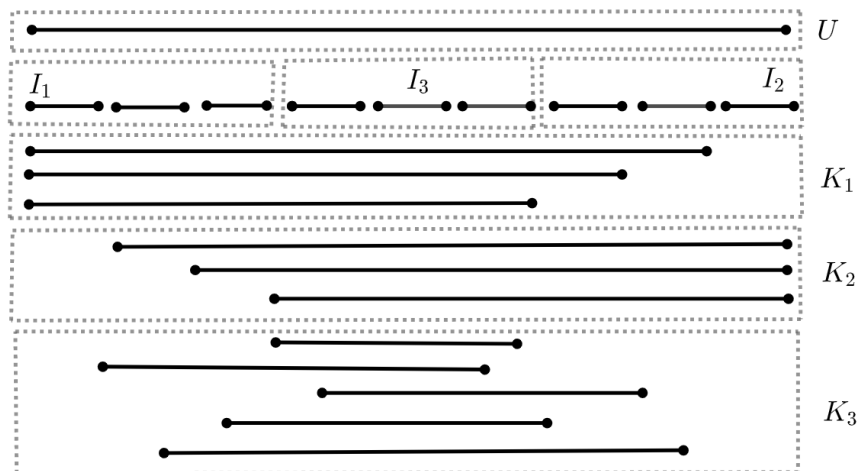


Figura 5: Esquema da partição de $K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup U = K$ e $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = I$ de uma ordem *split*.

Chamaremos tais partições de *canônicas*. Note que, por construção, temos que $G[K_1 \cup I_1]$ e $G[K_2 \cup I_2]$ são grafos *split* completos, assim como $G[K_i \cup I_3]$ para todo $1 \leq i \leq 3$.

A partir de tais partições, Cerioli et al. [2014] definiram as classes de grafos $SPLIT^2$ e $SPLIT^3$ da seguinte maneira. Um grafo G pertence a $SPLIT^3$ se existe um modelo $\mathcal{M}$ de G , associado a uma ordem P , tal que para todo $v \in K_3$, ou $N(v) \cap I \subseteq I_1 \cup I_3$, ou $N(v) \cap I \subseteq I_2 \cup I_3$. Além disso, G pertence a $SPLIT^2$ se $K_3 = \emptyset$. Portanto, por definição, temos que $SPLIT^2 \subset SPLIT^3 \subset SPLIT$, sendo a última classe aquela dos grafos *split*.

Teorema 2 ([Cerioli et al., 2014]). Se $G \in SPLIT^2$, então $IC(G) \leq 2$.

Teorema 3 ([Cerioli et al., 2014]). Se $G \in SPLIT^3$, então $IC(G) \leq 3$.

Nesse trabalho, estamos interessados na diferença entre $IC(G)$ e $\eta(G)$ para grafos *split* G . Assim, em primeiro lugar, notamos que a profundidade de aninhamento dos grafos nas subclasses $SPLIT^2$ e $SPLIT^3$ deve ser limitada, uma vez que a contagem de intervalo é limitada. De fato, para qualquer grafo G , $\eta(G) \leq IC(G)$. Essa observação está formalizada a seguir.

Lema 1. Se $G \in SPLIT^2$, então $\eta(G) \leq 2$. Se $G \in SPLIT^3$, então $\eta(G) \leq 3$.

Note que as desigualdades do Lema 1 são justas: um vértice de $K_1 \cup K_2 \cup U$ não pode ser aninhado por nenhum outro, mas pode aninhar um vértice de $K_3 \cup I$. Por sua vez, um vértice de K_3 não pode aninhar nenhum outro de K_3 , uma vez que $G[K_3 \cup I_3]$ é *split* completo e para todo $v \in K_3$, ou $N(v) \cap I \subseteq I_1 \cup I_3$, ou $N(v) \cap I \subseteq I_2 \cup I_3$. Mas um vértice de K_3 pode aninhar um vértice de I , que por sua vez não pode aninhar nenhum outro vértice. Consequentemente, pode-se obter uma cadeia de aninhamento de tamanho 2 no caso dos grafos $SPLIT^2$, e de tamanho 3 no caso dos grafos $SPLIT^3$.

Como o interesse é investigar se $IC(G) > \eta(G)$ para algum grafo *split* G , é natural a pergunta se, mesmo para tais classes mais restritas, existe um grafo $G \in SPLIT^3$ com $IC(G) = 3$ e $\eta(G) = 2$. Nesse trabalho, respondemos afirmativamente essa pergunta. A Figura 6 apresenta um exemplo de um modelo cujo grafo/ordem correspondente possui essa propriedade.

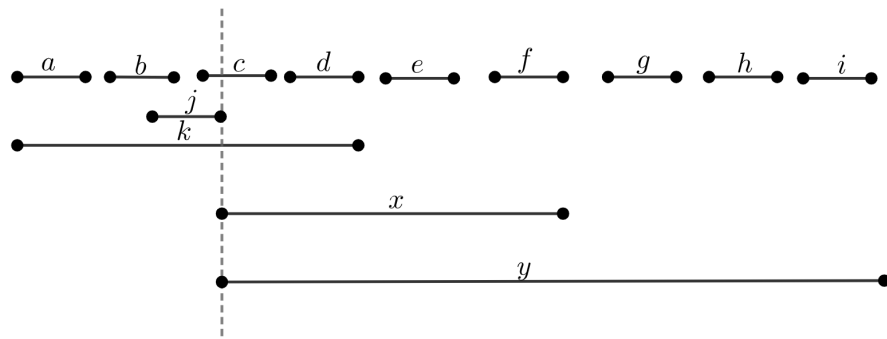


Figura 6: Exemplo de um modelo de uma ordem *split* P de profundidade de aninhamento 2 e $IC(P) = 3$.

A Figura 6 ilustra um modelo de uma ordem $P \in SPLIT^3$, com $K_1 = \{k\}$, $K_2 = \{y\}$, $K_3 = \{j, x\}$, $U = \emptyset$, $I_1 = \{a, b\}$, $I_2 = \{d, e, f, g, h, i\}$ e $I_3 = \{c\}$. Note que j é aninhado por k e não existem três intervalos x_1, x_2, x_3 nesse modelo tais que $x_1 \prec_N x_2 \prec_N x_3$. Portanto, $\eta(P) = 2$. Mostraremos que $IC(P) = 3$.

Teorema 4. Seja $P \in SPLIT^3$ a ordem associada ao modelo da Figura 6. Temos que $IC(P) = 3$.

Demonstração. O modelo da Figura 6 emprega três tamanhos. Suponha, por contradição, que exista um modelo $\mathcal{M}$ de P com dois tamanhos. Dadas as relações de aninhamento existentes no modelo, é necessário que os intervalos b, c, d, e, f, g, h, j tenham o menor tamanho, enquanto os intervalos k, x, y tenham o maior tamanho. Sem perda de generalidade, podemos assumir que os intervalos a e i possuem o menor tamanho; em qualquer modelo, é sempre possível incrementar à esquerda do intervalo a e decrementar a direita do intervalo b até que seja esse o caso. Pelo fato de j ter o menor tamanho, e j não ser um vértice simplicial, o menor tamanho não pode ser 0. Sem perda de generalidade, considerando a operação de expandir/comprimir proporcionalmente o modelo, assumimos que o menor tamanho é igual a 1 e que o maior tamanho é igual a $\alpha > 1$. Assim, sabemos o tamanho que devemos considerar, entre ser igual a 1 ou igual a α , para cada intervalo.

Observe que dois intervalos i, j quaisquer de um certo modelo possuem o mesmo tamanho se, e somente se, $r_i - r_j = \ell_i - \ell_j$; isto é, a diferença entre os extremos direitos desses intervalos deve ser a mesma que a diferença que os respectivos extremos esquerdos. Dado que x e y tem o mesmo tamanho em $\mathcal{M}$, temos que mostrar que $r_y - r_x = \ell_y - \ell_x$. Por um lado, pelo fato do intervalo da reta real $[r_x, r_y]$ incluir propriamente os intervalos g, h do modelo, temos:

$$r_y - r_x > 2$$

Agora, note que, por conta do caminho b, j, c , temos que

$$r_b \geq \ell_j = r_j - 1 \geq \ell_c - 1 = r_c - 2$$

o que resulta que $r_c - r_b \leq 2$. Por outro lado, temos que $r_b < \ell_x \leq r_c$ e $r_b < \ell_y \leq r_c$, o que implica

$$\ell_y - \ell_x < 2$$

contradizendo $r_y - r_x = \ell_y - \ell_x$. Logo não existe um modelo $\mathcal{M}$ de P com dois tamanhos. $\square$

Se $P \in \text{SPLIT}^3$, como sabemos que $IC(P) \leq 3$, a diferença entre $IC(P)$ e $\eta(P)$ é no máximo 1. Por outro lado, $IC(P)$ é arbitrariamente grande para ordens *split* P , como mostra a Figura 7. Portanto, surge naturalmente a questão da possibilidade dessa diferença ser maior quando $P \in \text{SPLIT}$. O próximo resultado mostra que, se o aninhamento da ordem é dois, a diferença continua limitada a um.

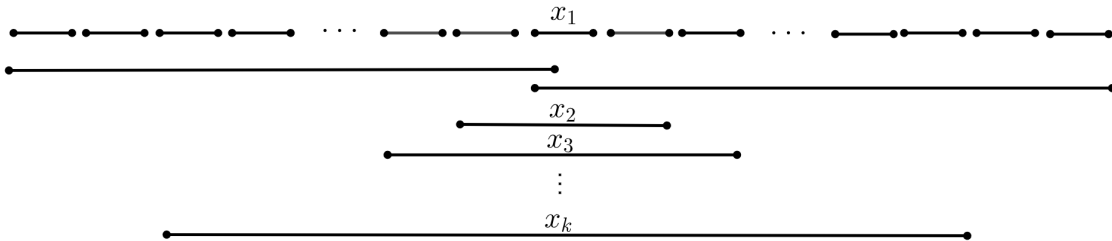


Figura 7: Exemplo esquemático de ordem *split* P com $IC(P) = k$ para $k \geq 2$.

Teorema 5. *Seja P uma ordem split. Se $\eta(P) = 2$, então $IC(P) \leq 3$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{M}$ um modelo de P . Sem perda de generalidade, assuma que todos os extremos de intervalo são distintos. Como $P = (X, \prec)$ é uma ordem *split*, seja $K \cup I$ a bipartição

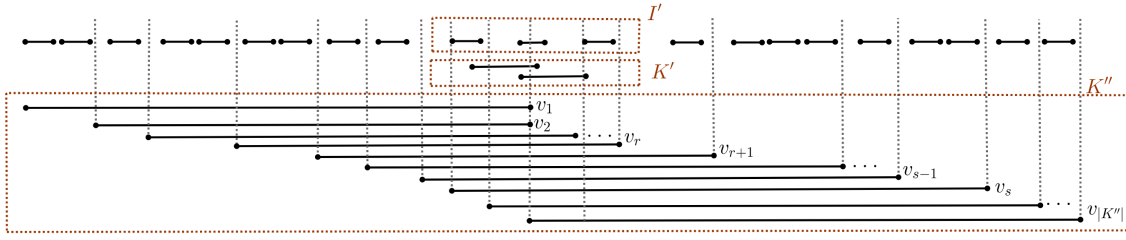


Figura 8: Esquema para a demonstração do Teorema 5.

de seus elementos. Seja $K' \subseteq K$ o conjunto dos elementos que estão aninhados por algum outro elemento de K , isto é, $K' = \{x \in K \mid \text{existe } y \in K \text{ tal que } x \prec_N y\}$. Seja I' o subconjunto de I com os elementos incomparáveis a algum elemento de K' , isto é, $I' = \{x \in I \mid \text{existe } y \in K' \text{ incomparável a } x\}$. Como $\eta(P) = 2$, então nenhum elemento de K' aninha um elemento de I . Seja P' a subordem de P que consiste apenas dos elementos $K' \cup I'$. Veja a Figura 8. Mostraremos primeiramente que $IC(P') = 1$.

De fato, como cada elemento $x \in K'$ é aninhado por algum outro de K , x não pode aninhar nenhum elemento de K' ou de I' . Como I' é um conjunto independente, então $\eta(P') = 1$, o que significa que P' é uma ordem de intervalo unitário; portanto, $IC(P') = 1$. Seja $\mathcal{M}' = \{[\ell'_x, r'_x] \mid x \in K' \cup I'\}$ um modelo unitário de P' . Seja $I_{\mathcal{M}'}$ o intervalo $[\min\{\ell'_x \mid x \in K' \cup I'\}, \max\{r'_x \mid x \in K' \cup I'\}]$. Note que todo o modelo $\mathcal{M}'$ está incluído no intervalo $I_{\mathcal{M}'}$. Seja $\alpha > |I_{\mathcal{M}'}|$. Construa o modelo $\mathcal{M}^* = \{[\ell_x, r_x] \mid x \in K \cup I\}$ de P conforme descrito a seguir.

Em primeiro lugar, atribua inicialmente $[\ell_x, r_x] = [\ell'_x, r'_x]$ para todo $x \in K' \cup I'$. Agora, para todo $x \in I'$, incremente ℓ_x e/ou decamente r_x até que tais extremos se tornem coincidentes, isto é, o intervalo associado a x se torne um ponto. Essa transformação é possível pelo fato de x ser um vértice simplicial no grafo correspondente.

Seja $K'' = K \setminus K'$. Nenhum elemento de K'' está aninhado a outro de K'' ; caso contrário, o intervalo aninhado deveria estar em K' . Modifique $\mathcal{M}$ de forma que não haja um intervalo de K'' incluído em outro de K'' , da seguinte forma: se $x, y \in K''$ e o intervalo x está incluído em y em $\mathcal{M}$, é possível decrementar o extremo esquerdo de x ou incrementar o extremo direito de x até que x deixe de estar incluído em y . Caso isso não fosse possível, seria devido a existência de elementos a, b tais que $a \prec x \prec b$ com y incomparável a ambos a, b . Mas isso significaria que x está aninhado em y , o que não é possível. Seja $\sigma = v_1, \dots, v_{|K''|}$ a ordem dos elementos de K'' do menor para o maior extremo esquerdo dos intervalos em $\mathcal{M}$. Note que tal ordem é a mesma daquela em relação aos extremos direitos. De posse de tal ordem, definiremos os intervalos $[\ell_x, r_x]$ em $\mathcal{M}^*$ para cada $x \in (K \cup I) \setminus (K' \cup I')$.

Observe que cada intervalo de K'' deve terminar, passar, ou começar no intervalo $I_{\mathcal{M}'}$. Em especial, aqueles que devem terminar em $I_{\mathcal{M}'}$ formam um prefixo $v_1, \dots, v_r$ de σ , enquanto aqueles que começam em $I_{\mathcal{M}'}$ formam um sufixo $v_s, \dots, v_{|K''|}$ de σ . Para todo $1 \leq i \leq r$, posicione r_{v_i} coincidindo com o ponto ℓ_x mais à direita associado a um elemento $x \in K' \cup I'$ incomparável a v_i ; em seguida, faça $\ell_{v_i} = r_{v_i} - \alpha$. Analogamente, para todo $s \leq i \leq |K''|$, posicione ℓ_{v_i} coincidindo com o ponto r_x mais à esquerda associado a um elemento $x \in K' \cup I'$ incomparável a v_i ; em seguida, faça $r_{v_i} = \ell_{v_i} + \alpha$. Em seguida, posicione os pontos $\ell_{v_{r+1}}, \dots, \ell_{v_{s-1}}$, nessa sequência, em quaisquer posições do intervalo (ℓ_{v_r}, ℓ_{v_s}) ; em seguida, faça $r_{v_i} = \ell_{v_i} + \alpha$, para todo $r < i < s$. Finalmente, para cada $x \in I \setminus I'$, faça os intervalos consistirem de pontos, isto é, $\ell_x = r_x$. A posição de cada ponto depende se x precede ou sucede os elementos de $I_{\mathcal{M}'}$. Se preceder, posicione ℓ_x no

intervalo $(\ell_{v_j}, \ell_{v_{j+1}})$, onde j é o maior inteiro para o qual x é incomparável a v_j (se mais de um ponto é designado para essa região, mantenha entre eles a ordem de P). Se x suceder posicione ℓ_x no intervalo $(r_{v_{j-1}}, r_{v_j})$, onde j é o menor inteiro para o qual x é incomparável a v_j (se mais de um ponto é designado para essa região, mantenha entre eles a ordem de P).

Isso conclui a construção do modelo $\mathcal{M}^*$ de P , que possui os tamanhos distintos de intervalo 0 (os intervalos de I), 1 (os intervalos de K') e α (os intervalos de K''), estabelecendo o resultado. $\square$

Teorema 6. *Existe um grafo $G \in \text{SPLIT}$ tal que $\eta(G) = 2$ e $IC(G) = 3$.*

Demonstração. Seja G o grafo associado ao modelo $\mathcal{M}$ da Figura 6. Pelo modelo, sabemos que $\eta(G) = 2$. Em G , há o caminho induzido a, k, x, e . Em qualquer modelo de G , a ordenação de cliques associadas a esse caminho $(\{a, k\}, \{k, x\}, \{x, e\})$ ocorrem nessa ordem, da esquerda para direita, ou em ordem reversa. O mesmo vale para a ordenação de cliques dos caminhos induzidos: a, k, x, f ; a, k, y, e ; a, k, y, f ; a, k, y, g ; a, k, y, h ; a, k, y, i . Isso implica que, a menos de reversão, as únicas trocas de comparabilidades entre os intervalos de $\mathcal{M}$ estão limitadas a:

- troca da ordem entre os intervalos e, f ;
- permutar os intervalos g, h, i .

Note que, considerando as trocas de comparabilidades listadas acima, é trivial adaptar a prova do Teorema 4 para que funcione de modo análogo com as trocas efetuadas. Logo, a contagem de intervalo da ordem associada ao modelo resultante é igual a 3. Portanto, $IC(G) = 3$. $\square$

Teorema 7. *Seja G um grafo split. Se $\eta(G) = 2$, então $IC(G) \leq 3$.*

Demonstração. Se $\eta(G) = 2$, então existe um modelo $\mathcal{M}$ de G tal que $\eta(\mathcal{M}) = 2$. Seja P a ordem *split* associada a $\mathcal{M}$. Pelo Teorema 5, $IC(P) \leq 3$. Como todo modelo de P é também um modelo de G , temos que $IC(G) \leq IC(P) \leq 3$. $\square$

4. Conclusão

Estudamos o problema da contagem de intervalo restrito à classe das ordens e grafos *split* cuja profundidade de aninhamento se limita a dois e mostramos que a contagem de intervalo desses grafos/ordens é no máximo três. Mostramos a existência de ordem/grafos *split* com profundidade de aninhamento igual a 2 e contagem de intervalo 3. Como trabalho futuro, propomos expandir os estudos para classes dos grafos *split* cuja profundidade de aninhamento se limita a $k \geq 3$ e determinar a contagem de intervalo.

Agradecimento

Os autores foram parcialmente financiados por FAPERJ, CAPES e CNPq.

Referências

- Cerioli, M., Oliveira, F., e Szwarcfiter, J. (2012). The interval count of interval graphs and orders: a short survey. *Journal of the Brazilian Computer Society*, 18:103–112.
- Cerioli, M., Oliveira, F., e Szwarcfiter, J. (2014). Interval count of generalizations of threshold graphs. *Matemática Contemporânea*, 42:9–16.
- Cerioli, M., Oliveira, F., e Szwarcfiter, J. (2011). On counting interval lengths of interval graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 159(7):532–543.
- Cornell, D., Kim, H., Natarajan, S., Olariu, S., e Sprague, A. (1995). Simple linear time recognition of unit interval graphs. *Information Processing Letters*, 55(2):99–104.
- Figueiredo, C., Melo, A., Oliveira, F., e Silva, A. (2023). Maximum cut on interval graphs of interval count four is NP-complete. *Discrete and Computational Geometry*, (a aparecer).
- Fishburn, P. (1985). *Interval Orders and Interval Graphs*. John Wiley and Sons.
- Gardi, F. (2007). The Roberts characterization of proper and unit interval graphs. *Discrete Mathematics*, 307(22):2906–2908.
- Hell, P. e Huang, J. (2005). Certifying lexbfs recognition algorithms for proper interval graphs and proper interval bigraphs. *Discrete Mathematics*, 18(3):554–570.
- Klavík, P., Otachi, Y., e Sejnoha, J. (2019). On the classes of interval graphs of limited nesting and count of lengths. *Algorithmica*, 81:1490–1511.
- Lin, M., Soulignac, F., e Szwarcfiter, J. (2009). Short models for unit interval graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 35:247–255.