São José dos Campos - SP
LV SBPO
LV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional
São José dos Campos, SP - 6 a 9 de novembro de 2023

INTERVALOS DE CREDIBILIDADE PARA A INTENSIDADE DE TRÁFEGO DE FILAS MARKOVIANAS DE ÚNICO SERVIDOR

Eriky S. Gomes
Departamento de Estatística, ICEx, Universidade Federal de Minas Gerais
31270-901 – Belo Horizonte – MG, Brasil
eriky-tn@ufmg.br

F. R. B. Cruz
Departamento de Estatística, ICEx, Universidade Federal de Minas Gerais
31270-901 – Belo Horizonte – MG, Brasil
fcruz@est.ufmg.br

RESUMO

Este artigo considera filas markovianas de servidor único, nas quais o número de chegadas segue um processo de Poisson e os tempos de atendimento são distribuídos exponencialmente. Propõe-se analisar numericamente as amplitudes e coberturas médias de dois tipos de intervalos bayesianos de credibilidade: o intervalo de caudas iguais e o intervalo de máxima densidade. Os tipos propostos são estudados sob distribuições a priori subjetivas e objetivas. Conclui-se por meio de simulações Monte Carlo que o intervalo de caudas iguais apresenta desempenho similar ao intervalo de máxima densidade, sendo preferível pelo critério de menor complexidade computacional.

PALAVRAS CHAVE. Inferência Bayesiana, Intervalos de Credibilidade, Filas Markovianas.

Tópicos: EST&MP - Estatística e Modelos Probabilísticos; SIM - Simulação

ABSTRACT

This article considers single-server Markovian queues, that is, in which the number of arrivals follows a Poisson process and the departure times are independent and identically distributed according to an exponential distribution. A numerical analysis is proposed for the mean lengths and coverage of two types of Bayesian credible intervals: the equal-tailed interval and the maximum density interval. The proposed types are studied under subjective and objective prior distributions. It was concluded from Monte Carlo simulations that the equal-tailed interval presented similar performance to the highest density interval, being preferable considering the less computational complexity criterion.

KEYWORDS. Bayesian Inference. Credible Intervals. Markovian Queues.

Paper topics: EST&MP - Statistics and Probabilistic Models; SIM - Simulation

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174906
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174906

1. Introdução

A teoria de filas (TF) é o ramo da estatística que estuda sistemas em que há um desequilíbrio entre a busca por um serviço e a sua oferta, de forma que parte dos usuários precisa esperar para ser atendida. Muito embora a TF não esteja diretamente relacionada aos objetivos da Pesquisa Operacional (PO), qual seja a tomada de decisão, uma parte importante da informação necessária para realizar um estudo de PO é fundamentada na TF, o que inclui a estimação estatística dos parâmetros de tais sistemas para a determinação de suas medidas de desempenho.

Um modelo de fila simples, porém de grande aplicabilidade, é aquele em que as chegadas ocorrem segundo um processo de Poisson, com uma taxa λ, e os tempos entre partidas são independentes e identicamente distribuídos de acordo com uma distribuição exponencial, com uma taxa μ. Segundo a notação de Kendall, denotam-se tais modelos por filas $M/M/1$, que são o foco desse estudo, em que são desenvolvidos e avaliados métodos estatísticos para a estimação da razão λ/μ, uma importante medida de desempenho de sistemas em filas, denominada intensidade de tráfego ρ. Além de ser básica para determinação de outras medidas de desempenho, tais como o número médio de usuários ou o tamanho médio da fila, a intensidade de tráfego também fornece a fração do tempo em que o sistema está ocupado.

É relativamente recente a inferência em sistema de filas, iniciando-se com o trabalho pioneiro de Clarke [1957], que estimou as taxas λ e μ e a sua razão ρ, em uma fila $M/M/1$, por meio do método clássico da máxima verossimilhança. Tal trabalho foi seguido, mais tarde, por Schruben e Kulkarni [1982], que estudaram o problema do vício em estimação em filas. Também registram-se, na linha bayesiana, o trabalho de Muddapur [1972], um dos primeiros a estender o trabalho de Clarke, ou mesmo McGrath e Singpurwalla [1987], Armero e Conesa [2004], Almeida et al. [2020] e Cruz et al. [2021], para mencionar apenas alguns, dentre vários outros.

Nesse trabalho analisa-se numericamente o desempenho de intervalos bayesianos de credibilidade sob prioris subjetivas, pertencentes à família de distribuições beta, e sob a priori objetiva de Jeffreys. Consideram-se, para este fim, os comportamentos das amplitudes e das coberturas médias dos intervalos propostos, em função do tamanho de amostra e do parâmetro de interesse, qual seja a intensidade de tráfego ρ. Busca-se avaliar se o comportamento das amplitudes médias e coberturas médias é afetado negativamente pela escolha de um intervalo com menor complexidade computacional. Do melhor conhecimento dos autores, nunca foi realizado tal estudo, relevante para estimações na prática.

O artigo está organizado da seguinte forma. A Seção 2 apresenta a metologia utilizada. A Seção 3 apresenta e discute os resultados das simulações realizadas. Finalmente, algumas conclusões e observações finais são apresentadas na Seção 4, com sugestão de tópicos para pesquisas futuras na área.

2. Materiais e Métodos

2.1. Filas $M/M/1$ e Função de Verossimilhança

Seja o modelo de filas $M/M/1$, em que se supõe que o número de chegadas segue uma distribuição de Poisson com taxa μ e que os tempos de atendimento são independentes e identicamente distribuídos segundo uma distribuição exponencial com taxa λ. Portanto, sob essa configuração markoviana, temos as seguintes funções densidade de probabilidade para os tempos entre chegadas e de serviço, respectivamente:

$$\begin{cases} a(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \\ b(t) = \mu e^{-\mu t}. \end{cases} \tag{1}$$

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174906
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174906

Sejam também $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias *iid* (independentes e identicamente distribuídas), entre as quais X_i denota o *número de chegadas durante o tempo de atendimento do i-ésimo cliente*. Observe que este é exatamente o esquema amostral usado por Srinivas et al. [2011] e é consideravelmente mais simples e fácil de implementar do que outros esquemas apresentados na literatura [cf. Almeida e Cruz, 2018].

Pode ser mostrado que, para tal fila $M/M/1$, a variável aleatória comum X_i segue uma distribuição geométrica, ou seja, $X_i \sim \text{Geom}(\frac{1}{1+\rho})$, conforme se segue:

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!} \mu e^{-\mu t} dt \\ &= \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^x \frac{1}{1+\rho},\ x = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{2}$$

em que $0 < \rho < 1$, para que a fila seja estável.

Assim, para uma dada amostra $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n\}$, de tamanho n, a seguinte função de verossimilhança pode ser escrita para o parâmetro ρ:

$$L(\rho, \mathbf{x}) = \rho^y (1+\rho)^{-n-y}, \tag{3}$$

em que $y = \sum_{i=1}^n x_i$, observando-se que a Eq. (3) é válida precisamente para o esquema amostral apresentado. Ou seja, sob diferentes esquemas amostrais, o tratamento matemático muda, assim como a função de verossimilhança.

2.2. Estimação Bayesiana

A abordagem bayesiana tem sido aplicada com sucesso na inferência em filas. Nesse ponto de vista, o parâmetro de interesse ρ é visto como uma variável aleatória que pode ser modelada por uma função de densidade de probabilidade no seu espaço paramétrico Ω, denominada distribuição a priori $\pi(\rho|\,\boldsymbol{\theta})$, que modela ρ por meio do vetor de hiper-parâmeros $\boldsymbol{\theta}$. A função de verossimilhança $L(\rho, \mathbf{x})$, dada pela Eq. (3), é definida em posse de uma amostra aleatória $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n\}$, de tamanho n. Então, o Teorema de Bayes pode ser usado para obter a distribuição posteriori de ρ, $p(\rho|\,\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$:

$$p(\rho|\,\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{L(\rho, \mathbf{x})\pi(\rho|\,\boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})},\ \rho \in \Omega, \tag{4}$$

em que Ω é o espaço paramétrico e $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \int_{\rho\in\Omega} L(\rho, \mathbf{x})\pi(\rho|\,\boldsymbol{\theta})d\rho$ é o inverso da constante de normalização, para que $p(\rho|\,\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ integre 1 no espaço paramétrico Ω.

Assim, por meio da distribuição a posteriori, dada pela Eq. (4), todas as inferências relacionadas ao parâmetro de interesse ρ podem ser executadas, como a obtenção de uma estimativa pontual ou um intervalo de credibilidade, que é uma região do espaço paramétrico na qual se associa uma certa probabilidade de que o parâmetro de interesse esteja incluído. Recentemente, distribuições a posteriori para ρ foram deduzidas por Singh et al. [2023], para diversas distribuições a priori, conforme apresentado a seguir.

2.2.1. Priori Beta

Uma escolha possível de distribuição a priori é a beta, cuja função densidade de probabilidade é dada por:

$$\pi_B(\rho|\alpha, \beta) = \frac{\rho^{\alpha-1}(1-\rho)^{\beta-1}}{\text{B}(\alpha, \beta)},\ 0 < \rho < 1, \tag{5}$$

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174906
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174906

em que $\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\int_0^1 \rho^{\alpha-1}(1-\rho)^{\beta-1}d\rho$ é a função beta, o inverso de uma constante de normalização (para a distribuição integrar 1 no espaço paramétrico), e $\alpha,\beta>0$ são denominados hiper-parâmetros, que definem o formato da distribuição.

Para uma dada amostra aleatória $\mathbf{x}=\{x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_n\}$, de tamanho n, tem-se a seguinte distribuição a posteriori.

$$\begin{aligned} p_B(\rho|\mathbf{x},\alpha,\beta) &= \frac{L(\rho,\mathbf{x})\times\pi_B(\rho|\alpha,\beta)}{\int_0^1 L(\rho,\mathbf{x})\times p_1(\rho|\alpha,\beta)d\rho} \\ &= \frac{\rho^{y+\alpha-1}(1-\rho)^{\beta-1}(1+\rho)^{-(n+y)}}{\mathrm{B}(y+\alpha,\beta)\,{}_2\mathrm{F}_1(n+y,y+\alpha,y+\alpha+\beta,-1)}, \end{aligned} \tag{6}$$

em que $y=\sum_{i=1}^n x_i$ e ${}_2\mathrm{F}_1(a,b,c,z)$ é a função hipergeométrica gaussiana, dada pela seguinte forma integral [Abramowitz e Stegun, 1964]:

$${}_2\mathrm{F}_1(a,b,c,z)=\frac{\int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-zu)^{-a}du}{\mathrm{B}(b,c-b)},\ z,c>b>0.$$

2.2.2. Priori de Jeffreys

Caso o analista de dados não se sinta confortável usando uma informação prévia subjetiva, pode ser preferível utilizar-se apenas dos dados. A priori de Jeffreys é uma distribuição a priori objetiva, definida a partir da informação de Fisher de uma amostra aleatória. Neste modelo, a função de densidade de probabilidade da prior de Jeffreys pode ser expressa por:

$$\pi_J(\rho)\propto[I(\rho)]^{1/2}=\rho^{-1/2}(1+\rho)^{-1/2},\ 0<\rho<1. \tag{7}$$

Assim, para uma dada amostra $\mathbf{x}=\{x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n\}$, de tamanho n, a distribuição a posteriori a partir da priori de Jeffreys é dada por:

$$p_J(\rho|\mathbf{x})=\frac{\rho^{(y+1/2)-1}(1+\rho)^{-(n+y+1/2)}}{\mathrm{B}(y+1/2,n)\,\mathrm{I}_{\frac{1}{2}}(y+1/2,n)}, \tag{8}$$

em que $y=\sum_{i=1}^n x_i$ e $\mathrm{I}_\xi(\eta_1,\eta_2)$ e função beta incompleta regularizada [Abramowitz e Stegun, 1964], dada por:

$$\mathrm{I}_\xi(\eta_1,\eta_2)=\frac{1}{\mathrm{B}(\eta_1,\eta_2)}\int_0^\xi u^{\eta_1-1}(1-u)^{\eta_2-1}du.$$

2.3. Intervalos de Credibilidade

Intervalos de credibilidade são o equivalente bayesiano dos intervalos de confiança da inferência clássica. Nesse contexto, as inferências são expressas por limites obtidos da distribuição a posteriori $p(\rho|\mathbf{x},\boldsymbol{\theta})$ e levam a interpretações mais diretas, como a região a posteriori onde se tem $(1-\gamma)100\%$ de crença de estar o parâmetro de interesse.

Assim, para se obter um intervalo de credibilidade para ρ, baseado em um distribuição a posterior $p(\rho|\mathbf{x},\boldsymbol{\theta})$, com seu vetor de hiper-parâmetros $\boldsymbol{\theta}$, precisamos calcular os limites l e u tais que:

$$\int_l^u p(\rho|\mathbf{x},\boldsymbol{\theta})d\rho=1-\gamma. \tag{9}$$

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174906
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174906

Note-se que, a partir dessa definição, há vários intervalos de credibilidade que podem ser construídos. Um deles é o intervalo de caudas iguais (ou ETI, do inglês, *equal-tailed interval*), notável por sua simplicidade computacional, definido por:

$$\int_0^l p(\rho|\mathbf{x},\boldsymbol{\theta})d\rho = \int_u^1 p(\rho|\mathbf{x},\boldsymbol{\theta})d\rho = \gamma/2, \tag{10}$$

em que l e u são os limites inferior e superior, respectivamente.

Outro intervalo de credibilidade muito útil é o intervalo de credibilidade simétrico (ou SCI, do inglês *symmetrical credible interval*), que apresenta simetria em relação a um estimativa pontual $\hat{\rho}$, também bastante simples de ser obtido computacionalmente, definido por:

$$\int_{\hat{\rho}-\delta}^{\hat{\rho}+\delta} p(\rho|\mathbf{x},\boldsymbol{\theta})d\rho = 1-\gamma, \tag{11}$$

em que $\hat{\rho}-\delta$ e $\hat{\rho}+\delta$ são os limites inferior e superior, respectivamente.

Há também o intervalo de máxima densidade (ou HDI, do inglês, *highest-density interval*), que tem a vantagem de ter amplitude mínima, mas tem, reconhecidamente, maior complexidade computacional. Note-se que a amplitude do HDI é a menor dentre todos e os limites são tais que os pontos dentro do intervalo de credibilidade terão maior densidade do que qualquer ponto fora desse intervalo. Além disso, no caso de distribuições simétricas, tais como, por exemplo, a normal ou a distribuição t de Student, os intervalos HDI e ETI coincidem.

2.4. Experimentos Numéricos

Simulações Monte Carlo foram utilizadas para a avaliação do desempenho dos intervalos de credibilidade obtidos, por meio de *scripts* escritos em R [R Core Team, 2020], disponíveis a pedido diretamente com os autores. Os experimentos foram executados em um PC rodando Microsoft Windows(c) 10 Home com Intel(R) Core(TM) i5-7200U CPU @ 2.50GHz - 2.71 GHz 12 GB de RAM.

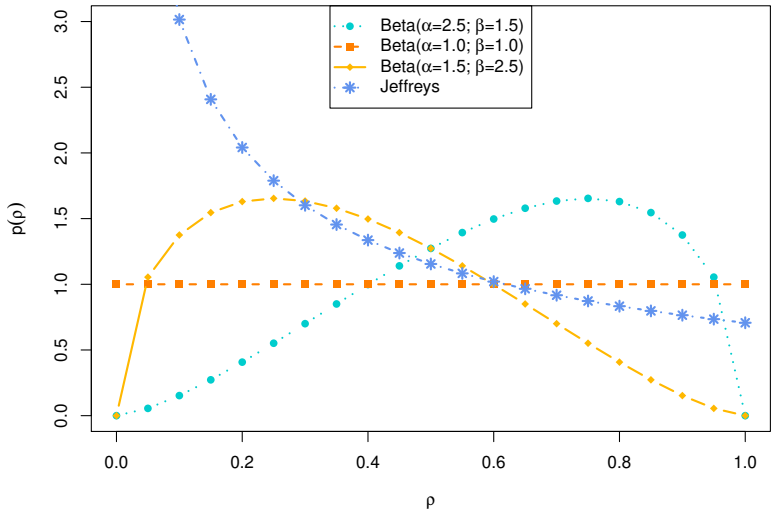


Figura 1: Distribuições a priori beta e a de Jeffreys

Na Figura 1 estão ilustradas as combinações de hiper-parâmetros para a distribuição a priori beta que foram consideradas, representando diversos possíveis conhecimentos a priori sobre o parâmetro ρ. Também foi testada a priori objetiva de Jeffreys.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174906
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174906

Foram geradas 1.000 replicações Monte Carlo (número menores e maiores de replicações, não apresentadas, foram testados, sem alteração significativa das conclusões aqui relatadas), para os seguintes valores da intensidades de tráfego, $\rho \in \{0{,}01; 0{,}10; 0{,}20; 0{,}50; 0{,}70; 0{,}90; 0{,}99\}$, e tamanhos de amostra, $n \in \{10; 20; 50; 100; 200\}$. Foram testados o ETI e o HDI.

3. Resultados Computacionais

As Tabelas 1 e 2 apresentam, respectivamente, as amplitudes e coberturas médias dos intervalos de credibilidade obtidos, para as diversas distribuições a priori consideradas. Da Tabela 1 observa-se que as amplitudes médias do ETI e HDI são similares. Além disso, nota-se que as amplitudes decrescem em função do tamanho de amostra n e da proximidade aos limites do espaço paramétrico, como é esperado.

A Tabela 2 indica que as coberturas médias de ambos os intervalos são próximas ao valor nominal de 0.95. Além disso, observa-se que o aumento do tamanho de amostra n não implica necessariamente em coberturas mais precisas para o ETI. Por outro lado, o HDI apresenta coberturas estáveis em todos os resultados obtidos.

As Figuras 2 e 3 apresentam, respectivamente, as amplitudes médias dos intervalos de credibilidade, como funções do parâmetro ρ e do tamanho da amostra n. Nota-se que o HDI apresenta amplitude menor que o ETI, como esperado. Como já discutido para as tabelas, nota-se também na Figura 3 que as coberturas do ETI e do HDI são próximas ao valor nominal de 0.95. Similarmente, quando observados em função do tamanho de amostra n, ambos os intervalos apresentam redução na amplitude com o aumento do tamanho da amostra, o que é desejável.

Finalmente, a Figura 4 apresenta as coberturas médias dos intervalos de credibilidade, que asseguram valores simulados bastante próximos da cobertura nominal de 95%. Embora o intervalo de caudas iguais gere coberturas com maior variabilidade nas bordas do espaço paramétrico, pode-se contornar esse comportamento adotando-se tolerâncias menores para os métodos numéricos envolvidos, ao custo de uma maior demanda computacional.

4. Conclusões e Observações Finais

A determinação de estimativas intervalares de parâmetros de interesse é um problema fundamental da Estatística. Neste trabalho, analisou-se numericamente o desempenho de dois tipos de intervalos bayesianos de credibilidade para inferência da intensidade de tráfego em filas $M/M/1$, no que tange às suas amplitudes e coberturas médias. Os métodos propostos são computacionalmente intensivos, mas podem ser executados em um computador pessoal em poucos segundos.

O intervalo de máxima densidade possui maior complexidade computacional, mas gera estimativas intervalares estáveis em todo o espaço paramétrico, com a menor amplitude, o que são propriedades desejáveis. O intervalo de caudas iguais possui menor complexidade computacional e apresenta desempenho similar ao intervalo de máxima densidade em quase todo o espaço paramétrico, com exceção apenas para valores extremos de intensidade de tráfego ($\rho \approx 0$ ou $\rho \approx 1$), o que indica que esse intervalo pode ser preferível em sistemas de filas $M/M/1$ com intensidade de tráfego distante dos valores extremos.

Alguns tópicos para pesquisa futura incluem o estudo de outros tipos de intervalos, como o intervalo de credibilidade simétrico (SCI), ou a aplicação dos métodos aqui analisados em outros modelos de filas, como filas multi-servidoras e filas determinísticas. Esses são alguns poucos exemplos de pesquisas futuras que podem ser realizadas nessa área, que atrai cada vez mais pesquisadores interessados no desenvolvimento de ferramentas para a PO.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174906
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174906

Tabela 1: Amplitudes médias dos intervalos de credibilidade

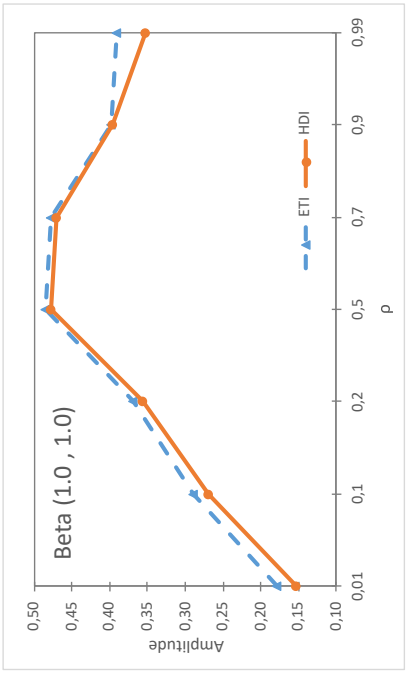
		tamanho da amostra n									
		10		20		50		100		200	
Priori	ρ	ETI	HDI	ETI	HDI	ETI	HDI	ETI	HDI	ETI	HDI
B(2, 5; 1, 5)	0,01	0,715	0,668	0,375	0,347	0,146	0,132	0,075	0,070	0,042	0,039
	0,10	0,740	0,706	0,485	0,467	0,224	0,230	0,142	0,147	0,103	0,098
	0,20	0,731	0,716	0,547	0,551	0,310	0,316	0,205	0,208	0,148	0,141
	0,50	0,650	0,660	0,614	0,593	0,470	0,462	0,334	0,345	0,253	0,243
	0,70	0,557	0,603	0,571	0,535	0,456	0,442	0,367	0,366	0,292	0,287
	0,90	0,529	0,552	0,488	0,468	0,371	0,364	0,287	0,299	0,235	0,238
	0,99	0,611	0,523	0,465	0,442	0,338	0,327	0,241	0,258	0,212	0,194
B(1, 0; 1, 0)	0,01	0,493	0,411	0,214	0,193	0,097	0,082	0,053	0,048	0,032	0,030
	0,10	0,658	0,565	0,367	0,355	0,190	0,196	0,130	0,135	0,100	0,094
	0,20	0,742	0,667	0,479	0,488	0,283	0,290	0,195	0,198	0,145	0,137
	0,50	0,722	0,703	0,641	0,620	0,476	0,475	0,335	0,347	0,253	0,242
	0,70	0,601	0,649	0,616	0,564	0,483	0,462	0,382	0,382	0,302	0,297
	0,90	0,565	0,590	0,516	0,485	0,383	0,368	0,291	0,299	0,239	0,238
	0,99	0,672	0,552	0,493	0,454	0,343	0,323	0,235	0,251	0,212	0,185
B(1, 5; 2, 5)	0,01	0,457	0,401	0,245	0,222	0,110	0,098	0,060	0,055	0,036	0,033
	0,10	0,540	0,485	0,354	0,341	0,193	0,198	0,131	0,136	0,100	0,094
	0,20	0,595	0,546	0,423	0,429	0,274	0,280	0,193	0,195	0,144	0,137
	0,50	0,616	0,601	0,535	0,528	0,413	0,412	0,309	0,318	0,242	0,233
	0,70	0,555	0,591	0,535	0,519	0,426	0,418	0,341	0,342	0,273	0,269
	0,90	0,545	0,568	0,484	0,485	0,377	0,377	0,294	0,306	0,236	0,240
	0,99	0,592	0,550	0,475	0,469	0,352	0,352	0,259	0,277	0,217	0,209
Jeffreys	0,01	0,293	0,240	0,136	0,125	0,073	0,061	0,044	0,039	0,028	0,026
	0,10	0,513	0,422	0,302	0,294	0,174	0,181	0,124	0,129	0,098	0,092
	0,20	0,665	0,565	0,421	0,433	0,268	0,275	0,190	0,193	0,143	0,135
	0,50	0,733	0,691	0,622	0,610	0,460	0,464	0,330	0,341	0,251	0,240
	0,70	0,614	0,664	0,622	0,577	0,486	0,467	0,380	0,382	0,301	0,296
	0,90	0,584	0,615	0,527	0,505	0,394	0,379	0,297	0,306	0,242	0,242
	0,99	0,686	0,578	0,510	0,475	0,353	0,334	0,241	0,257	0,215	0,189

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174906
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174906

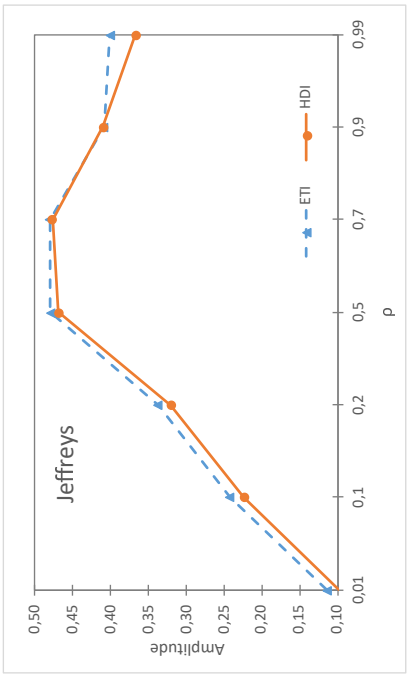
Tabela 2: Coberturas médias dos intervalos de credibilidade

		tamanho da amostra n											
		10		20		50		100		200			
Priori	ρ	ETI	HDI	ETI	HDI	ETI	HDI	ETI	HDI	ETI	HDI		
B(2, 5; 1, 5)	0,01	0,950	0,950	0,951	0,950	0,953	0,949	0,954	0,951	0,957	0,951		
	0,10	0,950	0,950	0,951	0,950	0,951	0,950	0,952	0,950	0,952	0,950		
	0,20	0,950	0,950	0,951	0,950	0,951	0,950	0,951	0,950	0,952	0,950		
	0,50	0,950	0,950	0,950	0,950	0,951	0,950	0,951	0,950	0,951	0,950		
	0,70	0,951	0,950	0,950	0,950	0,951	0,950	0,951	0,950	0,951	0,950		
	0,90	0,951	0,950	0,951	0,950	0,951	0,950	0,951	0,950	0,951	0,950		
	0,99	0,951	0,950	0,951	0,950	0,952	0,950	0,952	0,950	0,953	0,950		
B(1, 0; 1, 0)	0,01	0,957	0,950	0,956	0,951	0,968	0,949	0,962	0,951	0,960	0,949		
	0,10	0,953	0,950	0,952	0,950	0,952	0,950	0,952	0,950	0,953	0,950		
	0,20	0,951	0,950	0,951	0,950	0,951	0,950	0,952	0,950	0,952	0,950		
	0,50	0,951	0,950	0,950	0,950	0,951	0,950	0,950	0,950	0,951	0,950		
	0,70	0,951	0,950	0,951	0,950	0,951	0,950	0,951	0,950	0,951	0,950		
	0,90	0,952	0,950	0,951	0,950	0,952	0,950	0,954	0,950	0,954	0,950		
	0,99	0,951	0,950	0,953	0,950	0,953	0,950	0,955	0,950	0,958	0,950		
B(1, 5; 2, 5)	0,01	0,950	0,950	0,952	0,950	0,952	0,951	0,953	0,950	0,962	0,949		
	0,10	0,951	0,950	0,952	0,950	0,951	0,950	0,953	0,950	0,953	0,950		
	0,20	0,951	0,950	0,951	0,950	0,951	0,950	0,951	0,950	0,952	0,950		
	0,50	0,951	0,950	0,950	0,950	0,951	0,950	0,951	0,950	0,951	0,950		
	0,70	0,951	0,950	0,950	0,950	0,951	0,950	0,951	0,950	0,951	0,950		
	0,90	0,951	0,950	0,950	0,950	0,951	0,950	0,951	0,950	0,951	0,950		
	0,99	0,951	0,950	0,951	0,950	0,951	0,950	0,951	0,950	0,952	0,950		
Jeffreys	0,01	0,975	0,950	0,975	0,950	0,966	0,950	0,960	0,952	0,961	0,948		
	0,10	0,959	0,950	0,954	0,950	0,952	0,950	0,952	0,950	0,953	0,950		
	0,20	0,953	0,950	0,953	0,950	0,951	0,950	0,951	0,950	0,952	0,950		
	0,50	0,950	0,950	0,951	0,950	0,951	0,950	0,951	0,950	0,951	0,950		
	0,70	0,951	0,950	0,951	0,950	0,950	0,950	0,951	0,950	0,951	0,950		
	0,90	0,952	0,950	0,951	0,950	0,952	0,950	0,953	0,950	0,953	0,950		
	0,99	0,951	0,950	0,952	0,950	0,953	0,950	0,955	0,950	0,956	0,950		

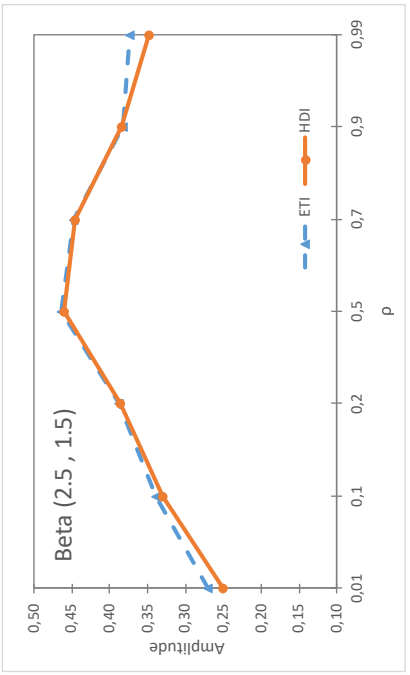
DOI: 10.59254/sbpo-2023-174906
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174906



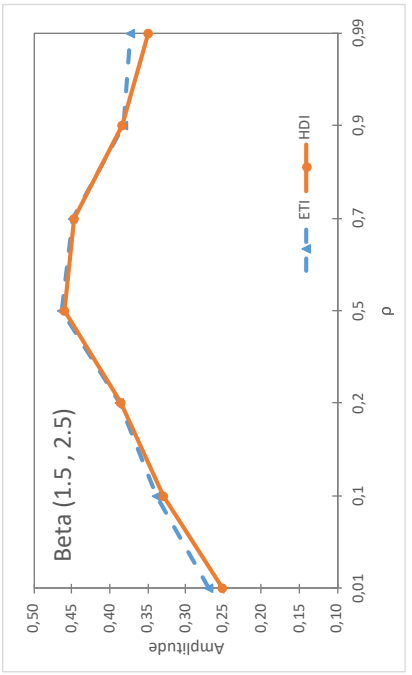
(b) priori B$(1, 0; 1, 0)$



(d) priori de Jeffreys



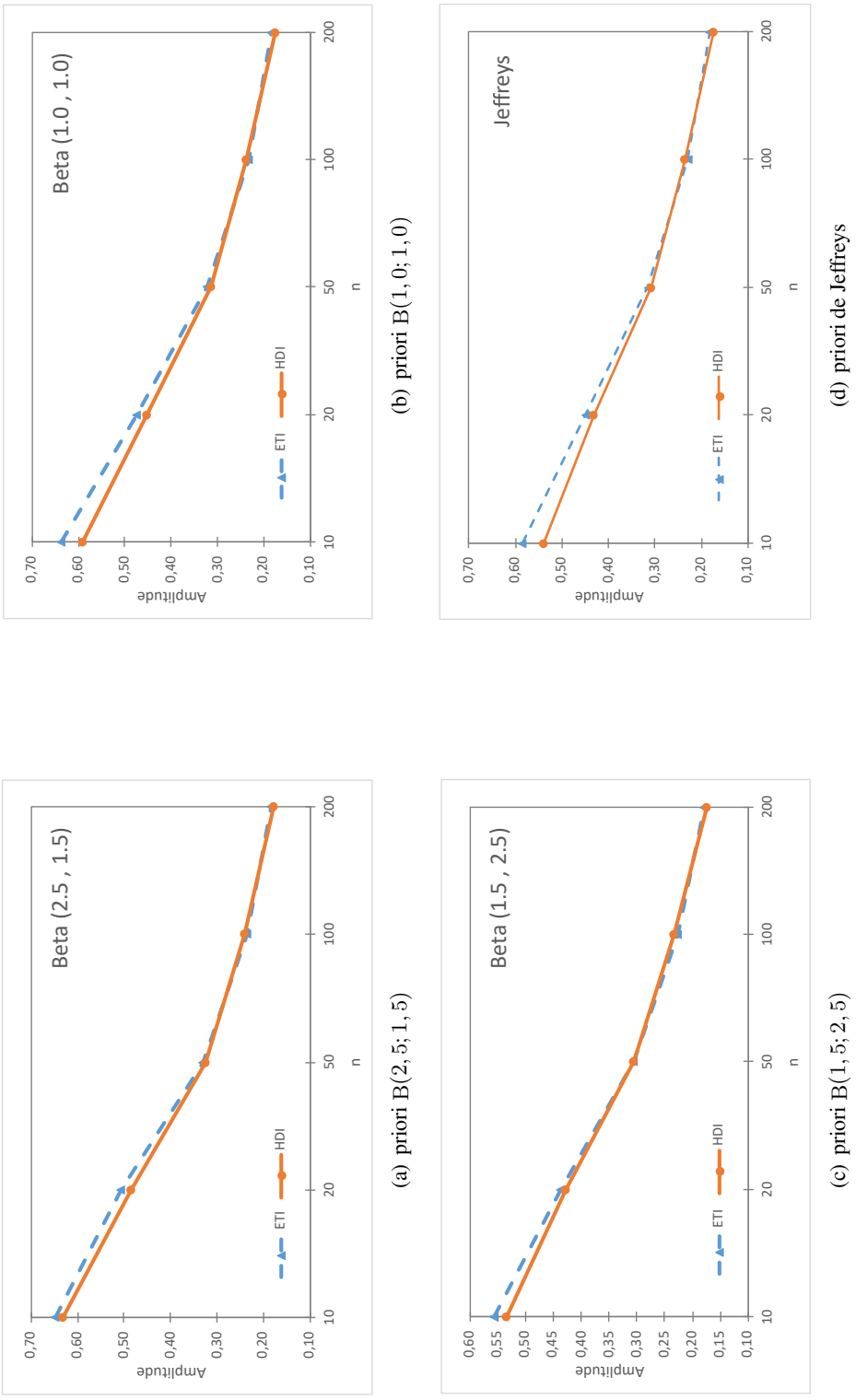
(a) priori B$(2, 5; 1, 5)$



(c) priori B$(1, 5; 2, 5)$

Figura 2: Amplitudes médias dos intervalos de credibilidade em função de ρ

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174906
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174906

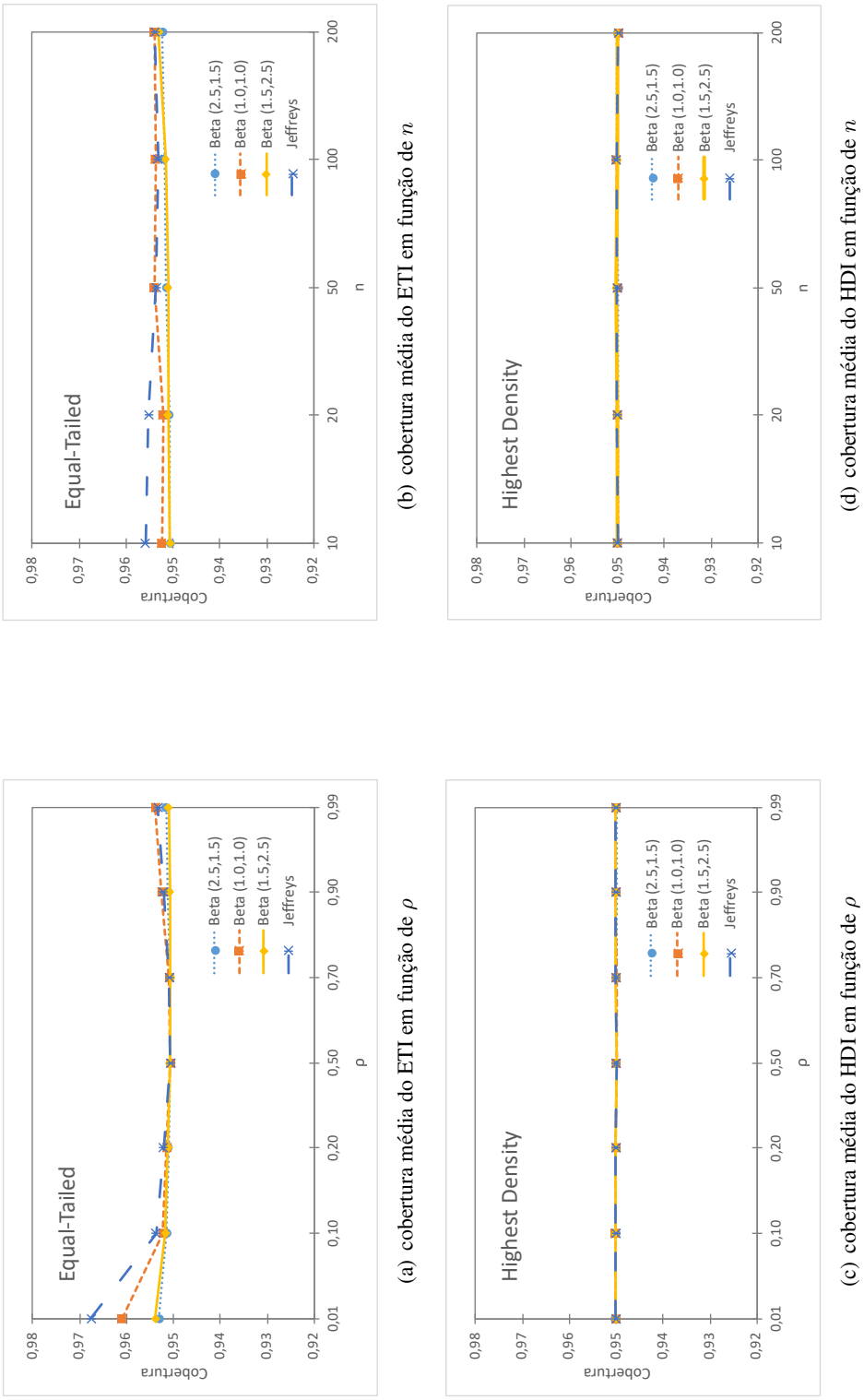


(a) priori $\mathrm{B}(2,5;1,5)$ (b) priori $\mathrm{B}(1,0;1,0)$

(c) priori $\mathrm{B}(1,5;2,5)$ (d) priori de Jeffreys

Figura 3: Amplitudes médias dos intervalos de credibilidade em função de n

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174906
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174906



(a) cobertura média do ETI em função de ρ

(b) cobertura média do ETI em função de n

(c) cobertura média do HDI em função de ρ

(d) cobertura média do HDI em função de n

Figura 4: Desempenho das coberturas médias dos intervalos de credibilidade

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174906
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174906

Agradecimentos

Os autores agradecem à CAPES, processo 88887.823719/2023-00, à FAPEMIG, processo CEX-PPM-00564-17, e ao CNPq, processo 305515/2018-7, pelo apoio parcial a este trabalho.

Referências

Abramowitz, M. e Stegun, I. A. (1964). *Handbook of mathematical functions*. Dover, New York, NY.

Almeida, M. A. C. e Cruz, F. R. B. (2018). A note on Bayesian estimation of traffic intensity in single-server Markovian queues. *Communications in Statistics - Simulation & Computation*, 47 (9):2577–2586.

Almeida, M. A. C., Cruz, F. R. B., Oliveira, F. L. P., e de Souza, G. (2020). Bias correction for estimation of performance measures of a Markovian queue. *Operational Research*, 20(2):943–958.

Armero, C. e Conesa, D. (2004). Statistical performance of a multiclass bulk production queueing system. *European Journal of Operational Research*, 158(3):649–661.

Clarke, A. B. (1957). Maximum likelihood estimates in a simple queue. *The Annals of Mathematical Statistics*, 28(4):1036–1040.

Cruz, F. R. B., Santos, M. A. C., Oliveira, F. L. P., e Quinino, R. C. (2021). Estimation in a general bulk-arrival Markovian multi-server finite queue. *Operational Research*, 21(1):73–89.

McGrath, M. F. e Singpurwalla, N. D. (1987). A subjective Bayesian approach to the theory of queues II - Inference and information in $M/M/1$ queues. *Queueing Systems*, 1(4):335–353.

Muddapur, M. V. (1972). Bayesian estimates of parameters in some queueing models. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 24(1):327–331.

R Core Team. *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2020. URL `https://www.R-project.org/`.

Schruben, L. e Kulkarni, R. (1982). Some consequences of estimating parameters for the $M/M/1$ queue. *Operations Research Letters*, 1(2):75–78.

Singh, S. K., Cruz, F. R. B., Gomes, E. S., e Banik, A. D. (2023). Classical and Bayesian estimations of performance measures in a single server markovian queueing system based on arrivals during service times. *Communications in Statistics - Theory and Methods (in press)*, 1–30. URL `https://doi.org/10.1080/03610926.2022.2155789`.

Srinivas, V., Rao, S. S., e Kale, B. K. (2011). Estimation of measures in $M/M/1$ queue. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 40(18):3327–3336.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174906
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174906