São José dos Campos - SP
LV SBPO
LV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional
São José dos Campos, SP - 6 a 9 de novembro de 2023

Revisitando experimentalmente modelos para o problema das p-medianas

Pedro B. Castellucci
Departamento de Informática e Estatística, Universidade Federal de Santa Catarina
Campus Universitário Reitor João David Ferreira Lima, s/nº, 88040-900, Florianópolis – SC
pedro.castellucci@ufsc.br

Eduardo D. Bernardes
Departamento de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Santa Cruz
Rod. Jorge Amado, km 16, 45662-900. Ilhéus – BA
edbernardes@uesc.br

Aline A. S. Leão
Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina
Rod. Celso Garcia Cid, PR-445, km 380, 86057-970, Londrina – PR
aasleao@uel.br

RESUMO

O problema das p-medianas é um dos problemas de localização discreta para o qual diversas extensões e aplicações são bastantes estudadas na literatura. Alguns modelos de programação linear inteira mista foram propostos para o problema, porém ainda não foi realizada uma comparação empírica entre modelos e pacotes computacionais. Neste trabalho, exploramos tal lacuna por avaliar pacotes comerciais e gratuitos atuais baseados no método *branch-and-cut* para instâncias clássicas. Além disso, atualizamos os resultados reportados na literatura para os modelos analisados. De modo geral, pacotes comerciais mostraram um desempenho superior, porém os pacotes gratuitos apresentaram resultados competitivos e, para algumas instâncias e critérios de avaliação, foram superiores.

PALAVRAS CHAVE. Programação linear inteira mista. Pacotes computacionais. Formulação.

PM - Programação Matemática

ABSTRACT

The p-median problem is a discrete location problem, for which many extensions and applications have been studied in the literature. Some mixed integer linear programming models have been proposed for the problem, however, an empirical comparison among mathematical models and optimization packages has not been performed. In this paper, we explore this gap by evaluating commercial and free open-source packages based on the branch-and-cut method for classical instances. In addition, we update the results in the literature for the analyzed models. In general, commercial solvers yielded a better performance, but free solvers show competitive results and, in some cases and metrics, even superior results.

KEYWORDS. Mixed integer linear programming. Optimization software. Formulation.

MP - Mathematical Programming

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174901
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174901

1. Introdução

O problema das p-medianas é um dos problemas fundamentais na área de localização discreta de facilidades [Marín e Pelegrín, 2019]. Os registros mais antigos de problemas de localização de facilidades foram feitos nos anos 1600s por Pierre de Fermat [Krarup e Vajda, 1997]. Desde então, diversas extensões e aplicações do problema têm sido exploradas.

Informalmente, o problema das p-medianas consiste em escolher um conjunto de p facilidades para serem abertas visando satisfazer a demanda de um conjunto de clientes. Cada cliente deve ser atribuído a uma das p facilidades de forma a minimizar o custo (distância) total de atendimento aos clientes pelas facilidades. Dentre as aplicações do problema estão: gerenciamento de resíduos sólidos [Antunes, 1999], localização de escolas [Pizzolato, 1994; Ndiaye et al., 2012], serviços de emergência [Dzator e Dzator, 2013; Takedomi et al., 2022] e localização de estacionamentos [Sayarshad, 2023].

O problema das p-medianas é NP-difícil [Kariv e Hakimi, 1979] desafiando métodos exatos para a solução de instâncias maiores. Em particular, o interesse deste trabalho é comparar experimentalmente diferentes pacotes computacionais baseados no método *branch-and-cut* para a solução de instâncias do problema das p-medianas. É de entendimento dos autores que essa comparação pode auxiliar tanto no desenvolvimento de métodos exatos de solução (p.e. geração de colunas e decomposição de Benders) quanto de *matheurísticas* baseadas em modelo, em situações em que o problema das p-medianas é o principal ou é utilizado como subproblema. Além de auxiliar na escolha de pacotes com melhor custo-benefício pela indústria. Ressalta-se que não é de nosso conhecimento nenhum trabalho avaliando comparativamente diferentes pacotes computacionais para a solução de instâncias do problema.

Mais especificamente, as contribuições desse artigo são: *(i)* identificação de bons pacotes computacionais (comerciais e gratuitos) para o problema das p-medianas; *(ii)* avaliação dos pacotes para dois modelos diferentes do problema; *(iii)* atualização e complementação dos resultados apresentados por Elloumi [2010].

O restante do manuscrito é estruturado da seguinte forma. Na Seção 2, é apresentada uma revisão da literatura especialmente concentrada em modelos para o problema das p-medianas. Na Seção 3, são apresentados os modelos utilizados na comparação experimental cujos resultados são discutidos na Seção 4. Por fim, são tecidas as conclusões na Seção 5.

2. Revisão da literatura

Esta seção apresenta uma revisão da literatura concentrada em modelos para o problema das p-medianas e avaliação experimental de pacotes computacionais baseados no método *branch-and-cut*. Para revisão sobre métodos de solução e mais especificamente sobre metaheurísticas o leitor pode encontrar um ponto de partida nos trabalhos de Reese [2006] e Mladenović et al. [2007] respectivamente.

Uma discussão recente sobre problemas de p-medianas foi realizada por Marín e Pelegrín [2019]. Os autores apresentam aplicações, formulações de programação inteira, procedimentos exatos e heurísticos, além de propriedades poliedrais das formulações. Dois dos modelos discutidos por Marín e Pelegrín [2019] são os propostos por ReVelle e Swain [1970] (modelo CF) e Cornuejols et al. [1980] (modelo AF). Os mesmos dois modelos também foram considerados por Elloumi [2010] que propõe um terceiro modelo (modelo NF). Church [2003] também propôs uma formulação diferente, eliminando variáveis com um processo de substituição.

Os três modelos (CF, AF e NF) fornecem o mesmo valor de solução para a relaxação linear, mas o modelo NF apresentou melhores resultados nos experimentos realizados por Elloumi [2010]. Apesar da superioridade empírica do modelo NF, formulações baseadas no modelo CF

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174901
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174901

continuam as mais frequentes na literatura [Marín e Pelegrín, 2019]. Algumas exceções são os trabalhos de Elloumi e Plateau [2010], de García et al. [2011] e de Duran-Mateluna et al. [2023].

A comparação experimental de pacotes computacionais para a solução de problemas de Programação Linear Inteira Mista (*solvers*) é prática comum. A comparação empírica de alternativas é o principal método de avaliação desses pacotes/algoritmos [Bixby et al., 1998; Achterberg et al., 2006; Gleixner et al., 2021].

Com frequência, a avaliação de *solvers* é feita utilizando instâncias desafiadoras, selecionadas de diversas áreas do conhecimento [Gleixner et al., 2021; Mittelmann, 2022]. No entanto, como alertaram Bartz-Beielstein et al. [2020], esses resultados não devem ser generalizados para outros conjuntos de instâncias, que podem, inclusive, ser mais frequentes na prática. A própria literatura apresenta exemplos dessa situação. Os trabalhos de de Oliveira et al. [2016] e de Meindl e Templ [2012] apresentam resultados divergentes em relação ao pacote computacional de melhor desempenho. Em de Oliveira et al. [2016], o Gurobi forneceu os melhores resultados para um problema de transporte, enquanto que em Meindl e Templ [2012], o CPLEX apresentou os melhores resultados para um problema relacionado à segurança de dados.

Para avaliação experimental apresentada na Seção 4 foram utilizados os modelos de ReVelle e Swain [1970] e Elloumi [2010]. Os resultados apresentados configuram uma atualização e extensão dos resultados presentes no artigo original de Elloumi [2010], que utilizou apenas o pacote CPLEX e um subconjunto das instâncias utilizadas neste trabalho. Não foram encontradas referências que utilizaram o mesmo conjunto de instâncias e pacotes computacionais avaliados neste trabalho.

3. Modelos

Os modelos de Programação Linear Inteira Mista apresentados nesta seção são equivalentes às formulações CF e NF de Elloumi [2010]. O modelo (1)–(6) equivale ao CF e o modelo (7)–(13) equivale à formulação NF, proposta pelo autora.

Para a definição do problema das p-medianas, sejam N o número de clientes e M o número de facilidades possíveis de serem escolhidas (abertas). Também, seja $d_{ij} \geq 0$ a distância entre um cliente $i \in \{1, \ldots, N\}$ e uma facilidade $j \in \{1, \ldots, M\}$. O problema consiste em decidir p facilidades a serem abertas e atribuir cada cliente a uma dessas facilidades de forma a minimizar a distância total.

Um primeiro modelo (CF) pode ser definido considerando variáveis binárias $y_j, j = 1, \ldots, M$ que indicam se a facilidade j foi aberta ($y_j = 1$) e variáveis $x_{ij} \geq 0, i = 1, \ldots N, j = 1, \ldots, M$ denotando a atribuição do cliente i para a facilidade j ($x_{ij} = 1$). Com isso, pode ser definida a formulação (1)–(6). Essa formulação é utilizada por Elloumi [2010] e foi originalmente proposta por ReVelle e Swain [1970].

$$(CF) \min \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} d_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

sujeito a:

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174901
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174901

$$\sum_{j=1}^{M} y_j = p \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{M} x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots N \tag{3}$$

$$x_{ij} \leq y_i \qquad i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M, \tag{4}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M, \tag{5}$$

$$y_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, M \tag{6}$$

A função objetivo (1) minimiza a distância total para o atendimento das demandas. As restrições (2) garantem a escolha de exatamente p medianas. A conexão de cada ponto de demanda é garantida pelas restrições (3). São permitidas apenas conexões partindo de uma das p-medianas, de acordo com as restrições (4). Os domínios das variáveis são definidos pelas restrições (5) e (6). Note que não é necessário definir as variáveis x_{ij} como binárias, propriedade que foi demonstrada por ReVelle e Swain [1970].

Elloumi [2010] propôs uma formulação alternativa. Nessa formulação, são utilizados parâmetros auxiliares definidos da seguinte forma. Para cada cliente i, seja K_i o número de distâncias diferentes a partir de i para toda facilidade. Portanto $K_i \leq M$. Sejam $D_i^1 < D_i^2 < \dots < D_i^{K_i}$ tais distâncias ordenadas. Para $k = 1, \dots K_i$, considere $V_i^k = \{j : d_{ij} \leq D_i^k\}$ a k-ésima vizinhança do cliente i, ou seja, o conjunto de facilidades localizadas há uma distância não superior a D_i^k de i. Consequentemente, em uma solução ótima do problema das p-medianas, um cliente i é atribuído para a menor vizinhança contendo uma facilidade aberta.

Também, considere variáveis $z_i^k \in \{0, 1\}$ tal que $z_i^k = 1$ se, e somente se, todas as facilidades em V_i^k estão fechadas. Com isso, tem-se a formulação alternativa (7)–(13), proposta por Elloumi [2010].

$$(NF) \min \sum_{i=1}^{N} \left(D_i^1 + \sum_{k=1}^{K_1 - 1} (D_i^{k+1} - D_i^k) z_i^k \right) \tag{7}$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{M} y_j = p \tag{8}$$

$$z_i^1 + \sum_{j: d_{ij} = D_i^1} y_j \geq 1 \qquad i = 1, \dots, N \tag{9}$$

$$z_i^k + \sum_{j: d_{ij} = D_i^k} y_j \geq z_i^{k-1} \quad i = 1, \dots, N; k = 2, \dots, K_i \tag{10}$$

$$z_i^{K_i} = 0 \qquad i = 1, \dots, N \tag{11}$$

$$z_i^k \geq 0 \qquad i = 1, \dots, N; k = 1, \dots, K_i, \tag{12}$$

$$y_j \in \{0, 1\} \qquad j = 1, \dots, M \tag{13}$$

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174901
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174901

A função objetivo (7) é equivalente à função objetivo (1). A restrição (8) garante a escolha de exatamente p facilidades e é equivalente à (2). As restrições (9) e (10) relacionam a abertura de facilidades (variáveis y_j) com a facilidades fechadas em uma vizinhança V_i^k (variáveis z_i^k). Pelo menos p facilidades estão abertas, então $z_i^{K_i} = 0$ para cada cliente i (restrições (11)). Essa formulação, NF, tem a vantagem de ser potencialmente menor do que a formulação CF se a matriz de distâncias d_{ij} for esparsa ou se há muitas facilidades equidistantes a um dado cliente [Elloumi, 2010].

4. Experimentos computacionais

Para os experimentos computacionais, foram utilizadas 40 instâncias propostas por Beasley [1985] disponíveis na OR-Library Beasley [1990]. Um subconjunto de 15 dessas instâncias foi utilizado por Elloumi [2010]. Os pacotes computacionais avaliados foram CBC 2.10, SCIP 8.0, CPLEX 22.1 e Gurobi 10.0. No trabalho de Elloumi [2010] foi utilizado apenas o pacote CPLEX 8.1. Os testes foram realizados em um computador *desktop*, com 16 GB de memória RAM, processador Intel® Core™ i7-8700CPU @ 3.2GHz e sistema operacional Ubuntu 22.04. Para cada instância foi utilizado uma *thread* e tempo limite de 3600s, todos os demais parâmetros da configuração padrão de cada pacote foram mantidos.

As instâncias variam em relação ao número de nós (entre 100 e 900), em relação ao número de arestas (entre 193 e 15879) e em relação ao número de medianas (5 e 200). Além disso, o número médio de distâncias diferentes (K_i) varia entre 38,1 e 83,5, aproximadamente. Esse parâmetro é particularmente relevante para o modelo NF. Notou-se que, no trabalho de Elloumi [2010], foram utilizadas instâncias com K_i médio relativamente baixo, o que favoreceria um tamanho reduzido do modelo NF.

Embora os pacotes comerciais tenham apresentado um ganho maior em tempo computacional ao se utilizar o modelo NF, também há benefícios para os pacotes não comerciais (Tabela 1). O CPLEX obteve o melhor ganho ao se utilizar o modelo NF, em média. O tempo computacional médio de solução do CPLEX com o modelo NF reduziu 86% quando comparado com o CF. Para o Gurobi, a redução foi de 56%. Enquanto para CBC e SCIP a redução foi de 42% e 36%, respectivamente.

Foram encontradas as soluções ótimas para pelo menos metade das instâncias em não mais de 30 segundos, independente do pacote computacional utilizado (Tabela 1). O SCIP (com o modelo CF) apresentou a maior mediana do tempo computacional, que foi três vezes maior que o tempo computacional mediano do CBC (com o modelo CF).

Em média e mediana, os limitantes inferiores obtidos nos nós raiz da árvore de *branch-and-cut* são aproximadamente os mesmos para os pacotes computacionais avaliados (Tabela 1). É sabido que que os limitantes provenientes da relaxação linear são os mesmos para as formulações CF e NF [Elloumi, 2010]. O limitante do nó raiz (Z^{rb}) pode ser uma melhoria em relação ao limitante da relaxação linear caso o pacote computacional consiga adicionar cortes eficazes, por exemplo. É interessante notar, mesmo quando o valor de Z^{rb} foi superior para algum pacote computacional, isso não se traduziu em um menor tempo computacional, em média. Para os pacotes CBC e SCIP, o modelo CF mostrou melhores valores de Z^{rb}.

CPLEX e Gurobi obtiveram soluções ótimas para todas as instâncias dentro do tempo limite para o modelo CF. Para o modelo NF, SCIP, CPLEX e Gurobi conseguiram obter soluções ótimas para as 40 instâncias (Tabelas 2, 3, 4 e 5). Embora com o desempenho inferior, apenas para uma instância o gap do CBC foi superior a 2% (**pmed38** com gap de 17%) com o modelo CF. Para o modelo NF, duas instâncias não puderam ser resolvidas na otimalidade com o CBC (**pmed38** e

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174901
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174901

Tabela 1: Resumo dos resultados médios e medianos de *gap*, tempo computacional (t em segundos) e limitante do nó raiz da árvore de *branch-and-cut* (Z^{rb}) para os pacotes CBC, SCIP, Cplex e Gurobi resolvendo instâncias com os modelos CF e NF,

Solver	Modelo	Média			Mediana		
		Gap	$t(s)$	Z^{rb}	**Gap**	$t(s)$	Z^{rb}
CBC	**CF**	0,56	580,65	5519,25	0,00	10,31	4754,50
	NF	0,79	339,75	5518,12	0,00	14,75	4754,25
SCIP	**CF**	0,01	366,46	5519,71	0,00	30,00	4754,25
	NF	0,00	233,36	5518,80	0,00	14,25	4754,45
Cplex	**CF**	0,00	83,04	5518,36	0,00	4,30	4754,50
	NF	0,00	11,23	5518,46	0,00	1,26	4754,50
Gurobi	**CF**	0,00	29,63	5517,67	0,00	4,45	4754,25
	NF	0,00	12,95	5517,67	0,00	1,12	4754,25

pmed39) com *gaps* de 22% e 10%, respectivamente. Para o modelo CF, o CBC não conseguiu provar a otimalidade para 4 instâncias (**pmed31**, **pmed35**, **pmed36**, **pmed38**).

Com o modelo CF, o Gurobi apresentou o menor tempo computacional com mais frequência. Para 23 (de 40) instâncias o Gurobi apresentou o menor tempo computacional. O CPLEX foi melhor que as alternativas em 16 instâncias enquanto que o CBC apresentou o menor tempo computacional para apenas um caso **pmed37**.

Com o modelo NF, o CPLEX apresentou o menor tempo computacional com mais frequência. Para 19 das instâncias, o CPLEX foi mais rápido que as alternativas. O Gurobi foi mais rápido em 17 das instâncias e em quatro das instâncias não houve diferença significativa entre CPLEX e Gurobi (**pmed5**, **pmed7**, **pmed17** e **pmed34**).

Em relação ao limitante do nó raiz, para o modelo CF (Tabelas 2 e 3), o CBC apresentou o melhor limitante para três instâncias (**pmed02**, **pmed03** e **pmed16**). O SCIP apresentou o melhor resultado para 12 instâncias. Também, o melhor limitante nunca foi encontrado apenas pelo CPLEX ou apenas pelo Gurobi. Além disso, o CPLEX encontrou maiores valores para Z^{rb} em uma comparação instância a instância com o Gurobi.

Ainda em relação ao limitante do nó raiz, para o modelo NF (Tabelas 4 e 5), o CBC apresentou o melhor limitante da raiz para uma instância (**pmed03**). Novamente, o SCIP apresentou o melhor resultado para 12 instâncias. O CPLEX apresentou o maior valor de Z^{rb} para quatro instâncias. Em uma comparação direta entre CPLEX e Gurobi, o CPLEX apresentou melhor valor de Z^{rb} para 17 instâncias e não foi superado pelo Gurobi em nenhuma instância.

5. Conclusões e trabalhos futuros

Neste trabalho, considerando o problema das p-medianas não capacitado, avaliamos o desempenho de quatro pacotes computacionais (dois comerciais e dois gratuitos) considerando duas formulações de programação linear inteira mista. Um dos objetivos dessa análise é guiar para as escolhas de um pacote computacional, seja para a implementação de métodos exatos que têm como base o *branch-and-cut* ou para a resolução de problemas reais modelados como o problema das p-medianas. Não foram encontrados estudos prévios comparando experimentalmente os pacotes CBC, SCIP, CPLEX e Gurobi.

Os resultados indicam que, independente do pacote computacional, o Modelo NF produz melhores resultados, considerando o tempo computacional e o número de soluções ótimas. Notamos também que, com o Modelo CF, o Gurobi teve um menor tempo computacional quando comparado

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174901
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174901

Tabela 2: Detalhes dos resultados do modelo CF para os pacotes CBC e SCIP, São apresentados, para cada instância, o valor do limitante da raiz da árvore de *branch-and-cut* (Z^{rb}), os melhores limitantes inferior (LB) e superior (UB), o *gap* e o tempo computacional (em segundos, TL indica que o tempo limite foi atingido,

	CBC					SCIP				
Id	Z^{rb}	UB	LB	**Gap**	t **(s)**	Z^{rb}	UB	LB	**Gap**	t **(s)**
pmed01	5819,00	5819,00	5819,00	0,00	0,33	5819,00	5819,00	5819,00	0,00	0,80
pmed02	4105,00	4093,00	4093,00	0,00	1,10	4093,00	4093,00	4093,00	0,00	0,65
pmed03	4253,00	4250,00	4250,00	0,00	1,35	4246,25	4250,00	4250,00	0,00	1,28
pmed04	3034,00	3034,00	3034,00	0,00	0,13	3034,00	3034,00	3034,00	0,00	0,33
pmed05	1355,00	1355,00	1355,00	0,00	0,13	1355,00	1355,00	1355,00	0,00	0,31
pmed06	7790,64	7824,00	7824,00	0,00	24,64	7795,24	7824,00	7824,00	0,00	44,49
pmed07	5631,00	5631,00	5631,00	0,00	1,65	5631,00	5631,00	5631,00	0,00	5,20
pmed08	4445,00	4445,00	4445,00	0,00	0,61	4445,00	4445,00	4445,00	0,00	2,27
pmed09	2734,00	2734,00	2734,00	0,00	0,59	2734,00	2734,00	2734,00	0,00	1,62
pmed10	1255,00	1255,00	1255,00	0,00	0,57	1255,00	1255,00	1255,00	0,00	1,31
pmed11	7696,00	7696,00	7696,00	0,00	92,83	7696,00	7696,00	7696,00	0,00	20,62
pmed12	6631,39	6634,00	6634,00	0,00	40,23	6633,89	6634,00	6634,00	0,00	26,26
pmed13	4374,00	4374,00	4374,00	0,00	1,61	4374,00	4374,00	4374,00	0,00	10,08
pmed14	2968,00	2968,00	2968,00	0,00	5,63	2967,20	2968,00	2968,00	0,00	12,86
pmed15	1729,00	1729,00	1729,00	0,00	1,44	1729,00	1729,00	1729,00	0,00	7,37
pmed16	8107,19	8162,00	8162,00	0,00	765,13	8102,35	8162,00	8162,00	0,00	195,38
pmed17	6970,00	6999,00	6999,00	0,00	128,46	6977,51	6999,00	6999,00	0,00	143,08
pmed18	4809,00	4809,00	4809,00	0,00	23,54	4808,50	4809,00	4809,00	0,00	42,82
pmed19	2845,00	2845,00	2845,00	0,00	2,94	2845,00	2845,00	2845,00	0,00	17,00
pmed20	1789,00	1789,00	1789,00	0,00	2,81	1789,00	1789,00	1789,00	0,00	28,28
pmed21	9138,00	9138,00	9138,00	0,00	102,66	9138,00	9138,00	9138,00	0,00	62,15
pmed22	8544,02	8579,00	8579,00	0,00	513,77	8546,99	8579,00	8579,00	0,00	361,67
pmed23	4619,00	4619,00	4619,00	0,00	5,37	4619,00	4619,00	4619,00	0,00	29,85
pmed24	2961,00	2961,00	2961,00	0,00	5,11	2961,00	2961,00	2961,00	0,00	18,08
pmed25	1828,00	1828,00	1828,00	0,00	4,65	1828,00	1828,00	1828,00	0,00	20,67
pmed26	9853,80	9917,00	9917,00	0,00	1703,55	9859,05	9917,00	9917,00	0,00	576,53
pmed27	8301,78	8307,00	8307,00	0,00	417,83	8302,67	8307,00	8307,00	0,00	236,91
pmed28	4498,00	4498,00	4498,00	0,00	9,32	4498,00	4498,00	4498,00	0,00	30,14
pmed29	3033,00	3033,00	3033,00	0,00	7,73	3033,00	3033,00	3033,00	0,00	24,63
pmed30	1989,00	1989,00	1989,00	0,00	7,08	1989,00	1989,00	1989,00	0,00	41,00
pmed31	10026,00	10112,00	10026,00	0,85	TL	10032,58	10086,00	10086,00	0,00	932,10
pmed32	9292,60	9297,00	9297,00	0,00	1280,51	9294,04	9297,00	9297,00	0,00	723,13
pmed33	4700,00	4700,00	4700,00	0,00	13,76	4700,00	4700,00	4700,00	0,00	46,10
pmed34	3013,00	3013,00	3013,00	0,00	11,30	3013,00	3013,00	3013,00	0,00	47,01
pmed35	10302,00	10501,00	10302,00	1,90	TL	10305,23	10400,00	10400,00	0,00	1507,27
pmed36	9834,26	9934,00	9834,26	1,00	TL	9837,41	9934,00	9883,52	0,51	TL
pmed37	5057,00	5057,00	5057,00	0,00	19,96	5057,00	5057,00	5057,00	0,00	78,11
pmed38	10947,10	13274,00	10947,13	17,53	TL	10950,35	11060,00	11060,00	0,00	2865,25
pmed39	9364,18	9466,00	9364,18	1,08	TL	9366,33	9423,00	9423,00	0,00	2807,69
pmed40	5128,00	5128,00	5128,00	0,00	27,58	5128,00	5128,00	5128,00	0,00	88,26
Média	**5519,25**	**5594,90**	**5524,56**	**0,56**	**580,65**	**5519,71**	**5535,30**	**5534,04**	**0,01**	**366,46**
Mediana	**4754,50**	**4754,50**	**4754,50**	**0,00**	**10,31**	**4754,25**	**4754,50**	**4754,50**	**0,00**	**30,00**

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174901
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174901

Tabela 3: Detalhes dos resultados do modelo CF para os pacotes CPLEX e Gurobi, São apresentados, para cada instância, o valor do limitante da raiz da árvore de *branch-and-cut* (Z^{rb}), os melhores limitantes inferior (LB) e superior (UB), o *gap* e o tempo computacional (em segundos, TL indica que o tempo limite foi atingido,

	CPLEX					Gurobi				
Id	Z^{rb}	UB	LB	**Gap**	t	Z^{rb}	UB	LB	**Gap**	t **(s)**
pmed01	5819,00	5819,00	5819,00	0,00	0,10	5819,00	5819,00	5819,00	0,00	0,10
pmed02	4093,00	4093,00	4093,00	0,00	0,25	4088,50	4093,00	4093,00	0,00	0,26
pmed03	4242,59	4250,00	4250,00	0,00	0,26	4240,50	4250,00	4250,00	0,00	0,22
pmed04	3034,00	3034,00	3034,00	0,00	0,07	3034,00	3034,00	3034,00	0,00	0,06
pmed05	1355,00	1355,00	1355,00	0,00	0,06	1355,00	1355,00	1355,00	0,00	0,05
pmed06	7788,53	7824,00	7824,00	0,00	2,69	7783,50	7824,00	7824,00	0,00	2,9
pmed07	5631,00	5631,00	5631,00	0,00	0,43	5631,00	5631,00	5631,00	0,00	0,45
pmed08	4445,00	4445,00	4445,00	0,00	0,33	4445,00	4445,00	4445,00	0,00	0,36
pmed09	2734,00	2734,00	2734,00	0,00	0,29	2734,00	2734,00	2734,00	0,00	0,32
pmed10	1255,00	1255,00	1255,00	0,00	0,28	1255,00	1255,00	1255,00	0,00	0,31
pmed11	7695,51	7696,00	7696,00	0,00	3,88	7693,33	7696,00	7696,00	0,00	2,99
pmed12	6626,85	6634,00	6634,00	0,00	3,97	6625,75	6634,00	6634,00	0,00	2,52
pmed13	4374,00	4374,00	4374,00	0,00	0,85	4374,00	4374,00	4374,00	0,00	1,06
pmed14	2968,00	2968,00	2968,00	0,00	1,99	2967,20	2968,00	2968,00	0,00	2,09
pmed15	1729,00	1729,00	1729,00	0,00	0,80	1729,00	1729,00	1729,00	0,00	0,86
pmed16	8095,00	8162,00	8162,00	0,00	11,42	8092,00	8162,00	8162,00	0,00	9,48
pmed17	6969,92	6999,00	6999,00	0,00	9,43	6968,67	6999,00	6999,00	0,00	9,87
pmed18	4809,00	4809,00	4809,00	0,00	6,58	4808,50	4809,00	4809,00	0,00	6,46
pmed19	2845,00	2845,00	2845,00	0,00	1,71	2845,00	2845,00	2845,00	0,00	1,88
pmed20	1789,00	1789,00	1789,00	0,00	3,84	1789,00	1789,00	1789,00	0,00	1,81
pmed21	9138,00	9138,00	9138,00	0,00	4,62	9138,00	9138,00	9138,00	0,00	5,14
pmed22	8544,38	8579,00	8579,00	0,00	42,78	8544,02	8579,00	8579,00	0,00	19,56
pmed23	4619,00	4619,00	4619,00	0,00	3,38	4619,00	4619,00	4619,00	0,00	3,68
pmed24	2961,00	2961,00	2961,00	0,00	3,55	2961,00	2961,00	2961,00	0,00	3,75
pmed25	1828,00	1828,00	1828,00	0,00	3,20	1828,00	1828,00	1828,00	0,00	3,44
pmed26	9855,29	9917,00	9917,00	0,00	62,71	9853,80	9917,00	9917,00	0,00	31,75
pmed27	8301,93	8307,00	8307,00	0,00	48,71	8301,78	8307,00	8307,00	0,00	21,6
pmed28	4498,00	4498,00	4498,00	0,00	10,32	4498,00	4498,00	4498,00	0,00	6,29
pmed29	3033,00	3033,00	3033,00	0,00	8,00	3033,00	3033,00	3033,00	0,00	6,04
pmed30	1989,00	1989,00	1989,00	0,00	7,20	1989,00	1989,00	1989,00	0,00	5,62
pmed31	10028,09	10086,00	10086,00	0,00	105,00	10026,00	10086,00	10086,00	0,00	31,17
pmed32	9293,62	9297,00	9297,00	0,00	118,03	9292,60	9297,00	9296,11	0,00	30,65
pmed33	4700,00	4700,00	4700,00	0,00	16,86	4700,00	4700,00	4700,00	0,00	13,31
pmed34	3013,00	3013,00	3013,00	0,00	12,04	3013,00	3013,00	3013,00	0,00	12,07
pmed35	10302,95	10400,00	10400,00	0,00	272,89	10302,00	10400,00	10400,00	0,00	53,12
pmed36	9834,17	9934,00	9934,00	0,00	1682,75	9833,26	9934,00	9933,29	0,00	508,64
pmed37	5057,00	5057,00	5057,00	0,00	27,41	5057,00	5057,00	5057,00	0,00	21,01
pmed38	10947,54	11060,00	11060,00	0,00	447,37	10947,12	11060,00	11060,00	0,00	177,97
pmed39	9364,18	9423,00	9423,00	0,00	357,02	9364,18	9423,00	9423,00	0,00	154,07
pmed40	5128,00	5128,00	5128,00	0,00	38,62	5128,00	5128,00	5128,00	0,00	32,46
Média	**5518,36**	**5535,30**	**5535,30**	**0,00**	**83,04**	**5517,67**	**5535,30**	**5535,26**	**0,00**	**29,63**
Mediana	**4754,50**	**4754,50**	**4754,50**	**0,00**	**4,30**	**4754,25**	**4754,50**	**4754,50**	**0,00**	**4,45**

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174901
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174901

Tabela 4: Detalhes dos resultados do modelo NF para os pacotes CBC e SCIP, São apresentados, para cada instância, o valor do limitante da raiz da árvore de *branch-and-cut* (Z^{rb}), os melhores limitantes inferior (LB) e superior (UB), o *gap* e o tempo computacional (em segundos, TL indica que o tempo limite foi atingido,

	CBC					SCIP				
Id	Z^{rb}	UB	LB	**Gap**	t (s)	Z^{rb}	LB	UB	**Gap**	t (s)
pmed01	5819,00	5819,00	5819,00	0,00	0,25	5819,00	5819,00	5819,00	0,00	1,63
pmed02	4093,00	4093,00	4093,00	0,00	1,08	4093,00	4093,00	4093,00	0,00	0,75
pmed03	4249,27	4250,00	4250,00	0,00	1,14	4248,39	4250,00	4250,00	0,00	1,60
pmed04	3034,00	3034,00	3034,00	0,00	0,13	3034,00	3034,00	3034,00	0,00	0,20
pmed05	1355,00	1355,00	1355,00	0,00	0,11	1355,00	1355,00	1355,00	0,00	0,17
pmed06	7785,55	7824,00	7824,00	0,00	63,90	7790,94	7824,00	7824,00	0,00	24,43
pmed07	5631,00	5631,00	5631,00	0,00	0,62	5631,00	5631,00	5631,00	0,00	4,82
pmed08	4445,00	4445,00	4445,00	0,00	0,83	4445,00	4445,00	4445,00	0,00	3,82
pmed09	2734,00	2734,00	2734,00	0,00	0,41	2734,00	2734,00	2734,00	0,00	0,84
pmed10	1255,00	1255,00	1255,00	0,00	0,29	1255,00	1255,00	1255,00	0,00	0,40
pmed11	7693,33	7696,00	7696,00	0,00	47,72	7695,78	7696,00	7696,00	0,00	26,68
pmed12	6626,55	6634,00	6634,00	0,00	81,73	6627,17	6634,00	6634,00	0,00	28,81
pmed13	4374,00	4374,00	4374,00	0,00	3,80	4374,00	4374,00	4374,00	0,00	6,01
pmed14	2967,20	2968,00	2968,00	0,00	14,69	2967,67	2968,00	2968,00	0,00	6,24
pmed15	1729,00	1729,00	1729,00	0,00	0,63	1729,00	1729,00	1729,00	0,00	0,74
pmed16	8092,00	8162,00	8162,00	0,00	325,56	8095,03	8162,00	8162,00	0,00	140,98
pmed17	6970,21	6999,00	6999,00	0,00	479,14	6971,76	6999,00	6999,00	0,00	89,50
pmed18	4808,50	4809,00	4809,00	0,00	17,97	4808,90	4809,00	4809,00	0,00	24,38
pmed19	2845,00	2845,00	2845,00	0,00	3,35	2845,00	2845,00	2845,00	0,00	5,68
pmed20	1789,00	1789,00	1789,00	0,00	1,06	1789,00	1789,00	1789,00	0,00	1,08
pmed21	9138,00	9138,00	9138,00	0,00	5,92	9138,00	9138,00	9138,00	0,00	25,19
pmed22	8544,02	8579,00	8579,00	0,00	121,23	8545,73	8579,00	8579,00	0,00	220,83
pmed23	4619,00	4619,00	4619,00	0,00	14,80	4619,00	4619,00	4619,00	0,00	12,84
pmed24	2961,00	2961,00	2961,00	0,00	4,21	2961,00	2961,00	2961,00	0,00	5,26
pmed25	1828,00	1828,00	1828,00	0,00	1,26	1828,00	1828,00	1828,00	0,00	1,63
pmed26	9854,17	9917,00	9917,00	0,00	641,39	9855,75	9917,00	9917,00	0,00	359,98
pmed27	8301,78	8307,00	8307,00	0,00	91,74	8302,44	8307,00	8307,00	0,00	215,70
pmed28	4498,00	4498,00	4498,00	0,00	32,93	4498,00	4498,00	4498,00	0,00	15,65
pmed29	3033,00	3033,00	3033,00	0,00	5,56	3033,00	3033,00	3033,00	0,00	7,50
pmed30	1989,00	1989,00	1989,00	0,00	1,59	1989,00	1989,00	1989,00	0,00	1,77
pmed31	10026,00	10086,00	10086,00	0,00	882,19	10028,51	10086,00	10086,00	0,00	499,32
pmed32	9292,60	9297,00	9297,00	0,00	188,23	9293,74	9297,00	9297,00	0,00	287,30
pmed33	4700,00	4700,00	4700,00	0,00	24,33	4700,00	4700,00	4700,00	0,00	22,61
pmed34	3013,00	3013,00	3013,00	0,00	9,53	3013,00	3013,00	3013,00	0,00	5,21
pmed35	10302,00	10400,00	10400,00	0,00	569,86	10304,05	10400,00	10400,00	0,00	751,48
pmed36	9833,26	9934,00	9934,00	0,00	2669,93	9835,14	9934,00	9934,00	0,00	3595,41
pmed37	5057,00	5057,00	5057,00	0,00	42,04	5057,00	5057,00	5057,00	0,00	28,42
pmed38	10947,10	14040,00	10947,13	22,03	TL	10948,58	11060,00	11060,00	0,00	1132,12
pmed39	9364,18	10357,00	9364,18	9,59	TL	9365,31	9423,00	9423,00	0,00	1744,43
pmed40	5128,00	5128,00	5128,00	0,00	39,04	5128,00	5128,00	5128,00	0,00	32,99
Média	**5518,12**	**5633,15**	**5531,01**	**0,79**	**339,75**	**5518,80**	**5535,30**	**5535,30**	**0,00**	**233,36**
Mediana	**4754,25**	**4754,50**	**4754,50**	**0,00**	**14,75**	**4754,45**	**4754,50**	**4754,50**	**0,00**	**14,25**

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174901
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174901

Tabela 5: Detalhes dos resultados do modelo NF para os pacotes CPLEX e Gurobi, São apresentados, para cada instância, o valor do limitante da raiz da árvore de *branch-and-cut* (Z^{rb}), os melhores limitantes inferior (LB) e superior (UB), o *gap* e o tempo computacional (em segundos, TL indica que o tempo limite foi atingido,

	CPLEX					Gurobi				
Id	Z^{rb}	UB	LB	**Gap**	t**(s)**	Z^{rb}	UB	LB	**Gap**	t**(s)**
pmed01	5819,00	5819,00	5819,00	0,00	0,19	5819,00	5819,00	5819,00	0,00	0,09
pmed02	4090,17	4093,00	4093,00	0,00	0,23	4088,50	4093,00	4093,00	0,00	0,19
pmed03	4247,13	4250,00	4250,00	0,00	0,17	4240,50	4250,00	4250,00	0,00	0,15
pmed04	3034,00	3034,00	3034,00	0,00	0,05	3034,00	3034,00	3034,00	0,00	0,06
pmed05	1355,00	1355,00	1355,00	0,00	0,05	1355,00	1355,00	1355,00	0,00	0,05
pmed06	7789,24	7824,00	7824,00	0,00	1,47	7783,50	7824,00	7824,00	0,00	1,60
pmed07	5631,00	5631,00	5631,00	0,00	0,31	5631,00	5631,00	5631,00	0,00	0,31
pmed08	4445,00	4445,00	4445,00	0,00	0,21	4445,00	4445,00	4445,00	0,00	0,23
pmed09	2734,00	2734,00	2734,00	0,00	0,18	2734,00	2734,00	2734,00	0,00	0,20
pmed10	1255,00	1255,00	1255,00	0,00	0,13	1255,00	1255,00	1255,00	0,00	0,18
pmed11	7695,27	7696,00	7696,00	0,00	1,79	7693,33	7696,00	7696,00	0,00	1,10
pmed12	6629,90	6634,00	6634,00	0,00	1,80	6625,75	6634,00	6634,00	0,00	1,73
pmed13	4374,00	4374,00	4374,00	0,00	0,40	4374,00	4374,00	4374,00	0,00	0,38
pmed14	2967,60	2968,00	2968,00	0,00	0,73	2967,20	2968,00	2968,00	0,00	0,54
pmed15	1729,00	1729,00	1729,00	0,00	0,24	1729,00	1729,00	1729,00	0,00	0,26
pmed16	8093,50	8162,00	8162,00	0,00	4,23	8092,00	8162,00	8162,00	0,00	5,67
pmed17	6969,44	6999,00	6999,00	0,00	3,60	6968,67	6999,00	6999,00	0,00	3,60
pmed18	4809,00	4809,00	4809,00	0,00	0,90	4808,50	4809,00	4809,00	0,00	1,14
pmed19	2845,00	2845,00	2845,00	0,00	0,53	2845,00	2845,00	2845,00	0,00	0,55
pmed20	1789,00	1789,00	1789,00	0,00	0,43	1789,00	1789,00	1789,00	0,00	0,47
pmed21	9138,00	9138,00	9138,00	0,00	2,27	9138,00	9138,00	9138,00	0,00	1,34
pmed22	8546,26	8579,00	8579,00	0,00	8,96	8544,02	8579,00	8579,00	0,00	8,40
pmed23	4619,00	4619,00	4619,00	0,00	1,05	4619,00	4619,00	4619,00	0,00	0,97
pmed24	2961,00	2961,00	2961,00	0,00	0,82	2961,00	2961,00	2961,00	0,00	0,81
pmed25	1828,00	1828,00	1828,00	0,00	0,65	1828,00	1828,00	1828,00	0,00	0,71
pmed26	9855,31	9917,00	9917,00	0,00	10,59	9853,80	9917,00	9917,00	0,00	11,58
pmed27	8302,07	8307,00	8307,00	0,00	6,01	8301,78	8307,00	8307,00	0,00	11,05
pmed28	4498,00	4498,00	4498,00	0,00	1,57	4498,00	4498,00	4498,00	0,00	1,36
pmed29	3033,00	3033,00	3033,00	0,00	1,05	3033,00	3033,00	3033,00	0,00	1,09
pmed30	1989,00	1989,00	1989,00	0,00	0,92	1989,00	1989,00	1989,00	0,00	0,99
pmed31	10026,00	10086,00	10086,00	0,00	34,74	10026,00	10086,00	10086,00	0,00	11,91
pmed32	9293,67	9297,00	9297,00	0,00	9,68	9292,60	9297,00	9297,00	0,00	7,26
pmed33	4700,00	4700,00	4700,00	0,00	2,07	4700,00	4700,00	4700,00	0,00	1,92
pmed34	3013,00	3013,00	3013,00	0,00	1,51	3013,00	3013,00	3013,00	0,00	1,51
pmed35	10302,58	10400,00	10400,00	0,00	21,68	10302,00	10400,00	10400,00	0,00	78,51
pmed36	9835,19	9934,00	9934,00	0,00	129,88	9833,26	9934,00	9934,00	0,00	92,14
pmed37	5057,00	5057,00	5057,00	0,00	2,73	5057,00	5057,00	5057,00	0,00	15,16
pmed38	10947,13	11060,00	11060,00	0,00	154,42	10947,12	11060,00	11060,00	0,00	124,01
pmed39	9364,86	9423,00	9423,00	0,00	37,36	9364,18	9423,00	9423,00	0,00	112,10
pmed40	5128,00	5128,00	5128,00	0,00	3,73	5128,00	5128,00	5128,00	0,00	16,86
Média	**5518,46**	**5535,30**	**5535,30**	**0,00**	**11,23**	**5517,67**	**5535,30**	**5535,30**	**0,00**	**12,95**
Mediana	**4754,50**	**4754,50**	**4754,50**	**0,00**	**1,26**	**4754,25**	**4754,50**	**4754,50**	**0,00**	**1,12**

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174901
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174901

com o CPLEX, porém, com o Modelo NF, a relação se inverte com com uma sensível diferença. Além disso, em situações em que o tempo computacional não é crítico, os pacotes computacionais gratuitos se mostram competitivos, particularmente com a formulação NF. Os resultados destacam a importância de investir no desenvolvimento de boas formulações.

Como trabalhos futuros, é interessante investigar se a relação de desempenho entre os pacotes se mantém para extensões/variações do problema das p-medianas (p.e. localização de facilidades). Além de avaliar outros pacotes e conjuntos de instâncias.

Referências

Achterberg, T., Koch, T., e Martin, A. (2006). Miplib 2003. *Operations Research Letters*, 34(4): 361–372.

Antunes, A. P. (1999). Location analysis helps manage solid waste in central portugal. *Interfaces*, 29(4):32–43.

Bartz-Beielstein, T., Doerr, C., Berg, D. v. d., Bossek, J., Chandrasekaran, S., Eftimov, T., Fischbach, A., Kerschke, P., La Cava, W., Lopez-Ibanez, M., et al. (2020). Benchmarking in optimization: Best practice and open issues. *arXiv preprint arXiv:2007.03488*.

Beasley, J. E. (1985). A note on solving large p-median problems. *European Journal of Operational Research*, 21(2):270–273.

Beasley, J. E. (1990). Or-library: distributing test problems by electronic mail. *Journal of the operational research society*, 41(11):1069–1072. URL `http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/info.html`.

Bixby, R. E., Ceria, S., McZeal, C. M., e Savelsbergh, M. W. (1998). An updated mixed integer programming library: Miplib 3.0. Technical report, Rice University.

Church, R. L. (2003). Cobra: A new formulation of the classic p-median location problem. *Annals of Operations Research*, 122.

Cornuejols, G., Nemhauser, G. L., e Wolsey, L. A. (1980). A canonical representation of simple plant location problems and its applications. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, 1(3): 261–272.

de Oliveira, C. R. V., Schmidt, C. E., e da Silva, A. C. L. (2016). Análise da resolução do problema de transporte com custo fixo utilizando o Cplex e o Gurobi.

Duran-Mateluna, C., Alès, Z., e Elloumi, S. (2023). An efficient benders decomposition for the p-median problem. *European Journal of Operational Research*, 308(1):84–96.

Dzator, M. e Dzator, J. (2013). An effective heuristic for the p-median problem with application to ambulance location. *Opsearch*, 50:60–74.

Elloumi, S. (2010). A tighter formulation of the p-median problem. *Journal of combinatorial optimization*, 19(1):69–83.

Elloumi, S. e Plateau, A. (2010). A computational study for the p-median problem. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 36:455–462.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174901
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174901

García, S., Labbé, M., e Marín, A. (2011). Solving large p-median problems with a radius formulation. *INFORMS Journal on Computing*, 23(4):546–556.

Gleixner, A., Hendel, G., Gamrath, G., Achterberg, T., Bastubbe, M., Berthold, T., Christophel, P., Jarck, K., Koch, T., Linderoth, J., et al. (2021). Miplib 2017: data-driven compilation of the 6th mixed-integer programming library. *Mathematical Programming Computation*, 13(3):443–490.

Kariv, O. e Hakimi, S. L. (1979). An algorithmic approach to network location problems. i: The p-centers. *SIAM journal on applied mathematics*, 37(3):513–538.

Krarup, J. e Vajda, S. (1997). On torricelli's geometrical solution to a problem of fermat. *IMA Journal of Management Mathematics*, 8(3):215–224.

Marín, A. e Pelegrín, M. (2019). *p-Median Problems*, p. 25–50. Springer International Publishing, Cham. ISBN 978-3-030-32177-2. URL https://doi.org/10.1007/978-3-030-32177-2_2.

Meindl, B. e Templ, M. (2012). Analysis of commercial and free and open source solvers for linear optimization problems. *Eurostat and Statistics Netherlands within the project ESSnet on common tools and harmonised methodology for SDC in the ESS*, 20.

Mittelmann, H. (2022). Benchmarks for optimization software. URL http://plato.asu.edu/bench.html.

Mladenović, N., Brimberg, J., Hansen, P., e Moreno-Pérez, J. A. (2007). The p-median problem: A survey of metaheuristic approaches. *European Journal of Operational Research*, 179(3):927–939.

Ndiaye, F., Ndiaye, B. M., e Ly, I. (2012). Application of the p-median problem in school allocation.

Pizzolato, N. D. (1994). A heuristic for large-size p-median location problems with application to school location. *Annals of operations research*, 50:473–485.

Reese, J. (2006). Solution methods for the p-median problem: An annotated bibliography. *NETWORKS: an international Journal*, 48(3):125–142.

ReVelle, C. S. e Swain, R. W. (1970). Central facilities location. *Geographical analysis*, 2(1): 30–42.

Sayarshad, H. (2023). Designing intelligent public parking locations for autonomous vehicles. *Expert Systems with Applications*, 222:119810.

Takedomi, S., Ishigaki, T., Hanatsuka, Y., e Mori, T. (2022). Facility location optimization with pmp modeling incorporating waiting time prediction function for emergency road services. *Computers & Industrial Engineering*, 164:107859.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174901
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174901