São José dos Campos - SP
LV SBPO
LV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional
São José dos Campos, SP - 6 a 9 de novembro de 2023

Jogos da Posição Convexa, do Intervalo e da Envoltória em Grafos

Samuel N. Araújo
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), Crato, Brasil
samuel.araujo@ifce.edu.br

Raquel Folz, Rosiane de Freitas
Instituto de Computação, Universidade Federal do Amazonas (UFAM), Manaus, Brasil
{raquel.folz, rosiane} @ icomp.ufam.edu.br

João Marcos Brito, Rudini Sampaio
Departamento de Computação, Universidade Federal do Ceará (UFC), Fortaleza, Brasil
jmbmaluno@alu.ufc.br, rudini@dc.ufc.br

RESUMO

De acordo com Duchet (1987), o primeiro artigo de convexidade em grafos gerais é o artigo de 1981 entitulado "Convexity in graphs". Um dos seus autores, Frank Harary, introduziu em 1984 os primeiros jogos de convexidade em grafos, na convexidade geodésica, investigados em uma sequência de cinco artigos que terminou em 2003. Neste artigo, definimos novos jogos de convexidade de grafos, relacionados a parâmetros clássicos de convexidade, como o posto (*rank*) e o número de envoltória (*hull number*), estendemos os jogos antigos e os novos para qualquer convexidade de grafos e obtemos estratégias vencedoras a partir do jogo clássico Nim, bem como obtemos resultados de PSPACE-completude.

PALAVRAS CHAVE. convexidade de grafos, jogos de convexidade, jogo Nim, PSPACE.

Teoria dos Grafos, Complexidade Computacional, Análise de Algoritmos, Teoria dos Jogos.

ABSTRACT

Accordingly to Duchet (1987), the first paper of convexity on general graphs is the 1981 paper "Convexity in graphs". One of its authors, Frank Harary, introduced in 1984 the first graph convexity games, on the geodesic convexity, investigated in a sequence of five papers that ended in 2003. In this paper, we define new natural convexity games, related to classical graph convexity parameters, such as the rank and the hull number, extend the old games and the new ones to any graph convexity, and obtain winning strategies from the classical Nim game and PSPACE-hardness results.

KEYWORDS. convexity games, graph convexity, Nim game, PSPACE-hardness.

Graph Theory, Computational Complexity, Analysis of Algorithms, Game Theory.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174899
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174899

1. Introdução

Convexidade é um tema clássico, estudado em muitos ramos diferentes da matemática. O estudo de convexidades aplicadas a grafos começou recentemente, cerca de 50 anos atrás. O artigo de Erdős et al. [1972] é um dos primeiros neste tópico, focado em torneios. De acordo com Duchet [1987], o primeiro artigo em grafos gerais, publicado em inglês, é o artigo entitulado "*Convexity in graphs*" de Harary e Nieminem [1981]. Logo depois, Frank Harary [1984] introduziu os primeiros jogos de convexidade de grafos em seu resumo "*Convexity in graphs: achievement and avoidance games*". Esta linha de pesquisa sobre jogos de convexidade em grafos terminou em 2003 após uma sequência de cinco artigos – Harary [1984]; Buckley e Harary [1985b,a]; Nečásková [1988]; Haynes et al. [2003] – todos eles focados na convexidade geodésica[1]. Neste artigo, continuamos esta linha de pesquisa definindo novos jogos naturais de convexidade e obtendo resultados sobre os jogos antigos e os jogos novos para algumas convexidades clássicas de grafos. Para explicá-los precisamos de algumas definições básicas.

Segundo van de Vel [1993], uma *convexidade* $\mathcal{C}$ em um conjunto finito $V \neq \emptyset$ é uma família de subconjuntos de V tal que $\emptyset, V \in \mathcal{C}$ e $\mathcal{C}$ é fechado sob interseção. Ou seja, $S_1, S_2 \in \mathcal{C}$ implica $S_1 \cap S_2 \in \mathcal{C}$. Um membro de $\mathcal{C}$ é denominado um *conjunto $\mathcal{C}$-convexo*. Dado $S \subseteq V$, o *fecho $\mathcal{C}$-convexo* de S é o menor conjunto $\mathcal{C}$-convexo $\mathrm{hull}_{\mathcal{C}}(S)$ contendo S, também chamado de *envoltória $\mathcal{C}$-convexa*. Dizemos que S é um *conjunto de envoltória* em $\mathcal{C}$ se $\mathrm{hull}_{\mathcal{C}}(S) = V$. É fácil ver que $\mathrm{hull}_{\mathcal{C}}(\cdot)$ é um *operador de fecho (closure operator)*, ou seja, para todo $S, S' \subseteq V$:

(i) $S \subseteq \mathrm{hull}_{\mathcal{C}}(S)$ (extensividade),

(ii) $S \subseteq S' \Rightarrow \mathrm{hull}_{\mathcal{C}}(S) \subseteq \mathrm{hull}_{\mathcal{C}}(S')$ (monotonicidade),

(iii) $\mathrm{hull}_{\mathcal{C}}(\emptyset) = \emptyset$ (normalização[2]) e

(iv) $\mathrm{hull}_{\mathcal{C}}(S) = \mathrm{hull}_{\mathcal{C}}(\mathrm{hull}_{\mathcal{C}}(S))$ (idempotência).

Dizemos que $\mathrm{I}_{\mathcal{C}} : 2^V \to 2^V$ é uma *função intervalo* em V se, para todo $S, S' \subseteq V$ temos:

(i) $S \subseteq \mathrm{I}_{\mathcal{C}}(S)$ (extensividade),

(ii) $S \subseteq S' \Rightarrow \mathrm{I}_{\mathcal{C}}(S) \subseteq \mathrm{I}_{\mathcal{C}}(S')$ (monotonicidade) e

(iii) $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}(\emptyset) = \emptyset$ (normalização).

Note que funções de intervalo só não precisam satisfazer a propriedade (iv) de idempotência do fecho convexo. É fácil ver que toda função de intervalo $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}(\cdot)$ sobre V *induz* a convexidade $\mathcal{C}$ dos subconjuntos $S \subseteq V$ tais que $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}(S) = S$. Sabe-se que o fecho convexo de um conjunto S pode ser obtido aplicando exaustivamente a função de intervalo correspondente até obter um conjunto convexo. Dizemos que S é um *conjunto de intervalo* em $\mathcal{C}$ se $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}(S) = V$.

Dado um grafo finito G, dizemos que $\mathcal{C}$ é uma convexidade sobre G se é uma convexidade sobre $V(G)$ com uma função de intervalo $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}(\cdot)$ definida. Por exemplo, as convexidades *geodésica*, *monofônica* e P_3 são definidas tomando $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}(S)$ como sendo S mais todo vértice em um caminho entre dois vértices de S que seja mínimo, ou induzido, ou P_3, respectivamente.

[1] Alguns autores, como Pelayo [2013], usam o termo *geodética* como adjetivo do substantivo *geodésica*. No entanto, livros clássicos como van de Vel [1993] e Gruber e Wills [1993] usam apenas o termo *geodésica* para substantivo e adjetivo e não usam o termo *geodética*. Preferimos seguir esse padrão.

[2] van de Vel [1993] considera a propriedade de normalização na definição de operador de fecho.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174899
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174899

Dada uma convexidade $\mathcal{C}$ em G, seja o *número de envoltória* $\mathrm{hn}_{\mathcal{C}}(G)$ o tamanho de um conjunto mínimo de envoltória $\mathcal{C}$ de G. Seja também o *número de intervalo* $\mathrm{in}_{\mathcal{C}}(G)$ o tamanho de um conjunto mínimo de intervalo $\mathcal{C}$ de G. Quando não houver possibilidade de confusão, podemos omitir $\mathcal{C}$ do subscrito e escrever apenas *conjunto convexo*, *fecho convexo*, $\mathrm{hull}(S)$, *conjunto de envoltória*, *número de envoltória*, $\mathrm{I}(S)$, *conjunto de intervalo* e *número de intervalo*.

O número de envoltória é um dos parâmetros de convexidade mais estudados e foi introduzido por Everett e Seidman [1985], na convexidade geodésica. Existem vários resultados de complexidade computacional para o número de envoltória na literatura, como por exemplo a prova de que é NP–difícil na convexidade P_3 mesmo em subgrafos de grades e que é APX–difícil nas convexidades P_3 e geodésica (ver Araújo et al. [2018]). O número de intervalo foi introduzido por Harary et al. [1993], na convexidade geodésica, onde provou-se que é NP–difícil.

Um subconjunto de vértices S de um grafo G está em *posição geral* na convexidade $\mathcal{C}$ se S não contém 3 elementos x, y, z tais que z está no intervalo de x e y, ou seja, $z \notin \mathrm{I}_{\mathcal{C}}(\{x, y\})$. O *número de posição geral* $\mathrm{gp}_{\mathcal{C}}(G)$ de G é o maior subconjunto de $V(G)$ em posição geral em $\mathcal{C}$. O clássico problema *No-Three-in-Line* de Dudeney [1917][3] busca o maior número de vértices de uma grade $m \times m$ sem que três formem uma reta, problema o qual permanece em aberto para $m > 46$ de acordo com Flammenkamp [1998]. Motivados por isso, Manuel e Klavžar [2018] introduziram o número de posição geral $\mathrm{gp}_{\mathrm{g}}(G)$ na convexidade geodésica e provaram que este problema é NP-difícil. Recentemente, Araújo et al. [2023] provaram que o número de posição geral também é NP-difícil na convexidade P_3 mesmo em grafos planares com grau máximo quatro.

Um subconjunto S de vértices de um grafo G está em *posição convexa* (ou é *convexamente independente*) na convexidade $\mathcal{C}$ se S é o conjunto de pontos extremos de $\mathrm{hull}_{\mathcal{C}}(S)$, ou seja, nenhum $x \in S$ pertence a $\mathrm{hull}_{\mathcal{C}}(S \setminus \{x\})$; e *convexamente dependente* caso contrário. O *posto (rank)* de G, denotado por $\mathrm{rk}(G)$, é definido como o tamanho do maior subconjunto convexamente independente de $V(G)$. O posto foi introduzido por Jamison [1981] nos primórdios de convexidade em grafos. Nas convexidades monofônica e P_3, Ramos et al. [2014] provaram que o posto é NP-difícil. Na convexidade geodésica, Kanté et al. [2017] provaram que o posto é NP-difícil mesmo em grafos bipartidos e obtiveram algoritmo polinomial em grafos distância hereditária.

Entre os jogos introduzidos por Harary [1984] (que são melhor explicados em Buckley e Harary [1985a,b]), temos o "*jogo (do intervalo) geodésico*" e o "*jogo (do intervalo) geodésico fechado*". Buckley e Harary [1985b] resolveram os jogos de intervalo geodésicos para ciclos e grafos bipartidos completos . Nečásková [1988] melhorou alguns resultados de Buckley e Harary [1985b] e Haynes et al. [2003] obtiveram resultados para árvores e grafos multipartidos completos. Nenhum dos jogos mencionados nesses artigos envolve o conceito de fecho convexo. Em seu resumo sobre jogos de convexidade em grafos, Frank Harary [1984] mencionou "jogos envolvendo o fecho convexo", mas nenhum jogo desse tipo foi definido ou investigado na literatura.

Ao invés de fornecer a definição original desses jogos, definidos inicialmente para a convexidade geodésica, nossa primeira contribuição é fornecer definições gerais desses jogos para qualquer convexidade de grafos. Além disso, definimos ainda jogos naturais relacionados ao número de envoltória e ao posto (*rank*).

Definição 1.1. *Seja $\mathcal{C}$ uma convexidade em um grafo finito G. Nos jogos de convexidade abaixo, o conjunto L de vértices rotulados é inicialmente vazio e as definições de $f(L)$ e $g(L)$ mencionados abaixo dependem do jogo. Dois jogadores (Alice e Bob, iniciando por Alice) alternadamente rotulam um vértice ainda não rotulado v que não está em $f(L)$. O jogo termina quando $g(L) = V(G)$.*

[3]Definido inicialmente como *Puzzle with Pawns* no livro de Dudeney [1917], que é apresentado pela prestigiada revista Nature [1917].

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174899
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174899

- *No jogo JE$_\mathcal{C}$ da envoltória $\mathcal{C}$:* $f(L) = L$ *e* $g(L) = \mathrm{hull}_\mathcal{C}(L)$.
- *No jogo JI$_\mathcal{C}$ do intervalo $\mathcal{C}$:* $f(L) = L$ *e* $g(L) = \mathrm{I}_\mathcal{C}(L)$.
- *No jogo JEF$_\mathcal{C}$ da envoltória $\mathcal{C}$ fechada:* $f(L) = g(L) = \mathrm{hull}_\mathcal{C}(L)$.
- *No jogo JIF$_\mathcal{C}$ do intervalo $\mathcal{C}$ fechado:* $f(L) = g(L) = \mathrm{I}_\mathcal{C}(L)$.

Recentemente, Klavžar et al. [2022] introduziram o *jogo JPG$_\mathcal{C}$ da posição geral*. Nesse jogo, considerando uma convexidade $\mathcal{C}$ qualquer sobre um grafo G, o conjunto L dos vértices rotulados deve sempre estar em posição geral na convexidade $\mathcal{C}$, ou seja, não pode haver um vértice $v \in S$ tal que $v \in \mathrm{I}_\mathcal{C}(S \setminus \{v\})$. Com relação à complexidade computacional, Chandran S. V. et al. [2023] provaram que o jogo da posição geral na convexidade geodésica é PSPACE–completo mesmo em grafos com diâmetro 4, tanto na variante normal como na variante pobre (*misère*), que são definidas abaixo.

Neste artigo, introduzimos também o *jogo JPC$_\mathcal{C}$ da posição convexa*. Nesse jogo, considerando uma convexidade $\mathcal{C}$ qualquer sobre um grafo G, o conjunto L dos vértices rotulados deve sempre estar em posição convexa na convexidade $\mathcal{C}$, ou seja, não pode haver um vértice $v \in S$ tal que $v \in \mathrm{hull}_\mathcal{C}(S \setminus \{v\})$.

Cada um desses jogos tem 3 variantes: *normal*, onde o último a jogar vence; *pobre (misère)*, onde o último a jogar perde; e, *ótima* (ou *de otimização*), onde, além do grafo G, a instância também tem um inteiro $k > 0$, e Alice vence se no final $|L| \leq k$ nos jogos JE$_\mathcal{C}$, JI$_\mathcal{C}$, JEF$_\mathcal{C}$ e JIF$_\mathcal{C}$, ou se $|L| \geq k$ nos jogos JPG$_\mathcal{C}$ e JPC$_\mathcal{C}$. Ou seja, na variante ótima, Alice é a jogadora cooperativa que deseja otimizar L (minimizando ou maximizando, dependendo do jogo), enquanto Bob é o jogador não-cooperativo que deseja atrapalhar Alice, não importando quem termine o jogo. Do Teorema de Zermelo [1913], um dos jogadores tem estratégia vencedora em cada um desses jogos e suas variantes, pois são jogos finitos de informação perfeita e sem empate. Com isso, o problema de decisão desses jogos é decidir se Alice possui uma estratégia vencedora.

Definição 1.2. *As variantes de otimização induzem 6 novos parâmetros de convexidade:*

- Número $\mathrm{ghn}_\mathcal{C}(G)$ do jogo JE$_\mathcal{C}$ da envoltória $\mathcal{C}$,
- Número $\mathrm{gin}_\mathcal{C}(G)$ do jogo JI$_\mathcal{C}$ do intervalo $\mathcal{C}$,
- Número $\mathrm{cghn}_\mathcal{C}(G)$ do jogo JEF$_\mathcal{C}$ da envoltória $\mathcal{C}$ fechada *e*
- Número $\mathrm{cgin}_\mathcal{C}(G)$ do jogo JIF$_\mathcal{C}$ do intervalo $\mathcal{C}$ fechado,
- Número $\mathrm{ggp}_\mathcal{C}(G)$ do jogo JPG$_\mathcal{C}$ da posição geral $\mathcal{C}$,
- Número $\mathrm{grk}_\mathcal{C}(G)$ do jogo JPC$_\mathcal{C}$ da posição convexa $\mathcal{C}$,

que consistem do valor ótimo de k para o qual Alice tem estratégia vencedora na variante de otimização do jogo de convexidade correspondente na convexidade $\mathcal{C}$ sobre o grafo G.

Neste artigo, provamos que as variantes normal e pobre do jogo da posição convexa nas convexidades monofônica e geodeésica são PSPACE-completas, bem como para os jogos da envoltória. Também obtemos algoritmos polinomiais para decidir o jogador com estratégia vencedora nos jogos fechados da envoltória e do intervalo nas convexidades monofônica e geodésica em certas classes de grafos, a partir de estratégias vencedoras do clássico jogo Nim.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174899
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174899

2. Jogos de Convexidade: Resultados Preliminares

Nesta seção, provamos alguns resultados novos.

Lema 2.1. *Alice vence os 4 jogos da Definição 1.1 nas convexidades monofônica e geodésica no grafo completo K_n se e só se n é ímpar na variante normal ou n é par na variante pobre. Na convexidade P_3, Alice perde a variante normal e vence a variante pobre dos 4 jogos de convexidade em K_n. Todos os parâmetros da Definição 1.2 são iguais a n nas convexidades monofônica e geodésica e são iguais a 2 na convexidade P_3.*

Demonstração. Nas convexidades monofônica e geodésica, todo vértice de um grafo completo precisa ser rotulado em todos os jogos. Na convexidade P_3, todos os jogos terminam no segundo movimento, pois todo vértice está no fecho ceonvexo de quaisquer dois vértices de um grafo completo. □

Lema 2.2. *Seja $\mathcal{C}$ uma convexidade sobre um grafo G. Então:*

- $\mathrm{hn}_{\mathcal{C}}(G) \leq \mathrm{cghn}_{\mathcal{C}}(G) \leq \mathrm{ghn}_{\mathcal{C}}(G) \leq \min\left\{ 2 \cdot \mathrm{hn}_{\mathcal{C}}(G) - 1,\ n \right\}$,
- $\mathrm{in}_{\mathcal{C}}(G) \leq \mathrm{gin}_{\mathcal{C}}(G) \leq \min\left\{ 2 \cdot \mathrm{in}_{\mathcal{C}}(G) - 1,\ n \right\}$,
- $\mathrm{in}_{\mathcal{C}}(G) \leq \mathrm{cgin}_{\mathcal{C}}(G) \leq n$,
- $\mathrm{grk}_{\mathcal{C}}(G) \leq \mathrm{ggp}_{\mathcal{C}}(G) \leq \mathrm{gp}_{\mathcal{C}}(G)$,
- $\mathrm{grk}_{\mathcal{C}}(G) \leq \mathrm{rk}_{\mathcal{C}}(G) \leq \mathrm{gp}_{\mathcal{C}}(G)$

Demonstração. Considere primeiramente os jogos de envoltória. Os jogos obtém um conjunto de envoltória e portanto tem tamanho pelo menos $\mathrm{hn}_{\mathcal{C}}(G)$. Além disso, note que a restrição do jogo fechado afeta Bob apenas, pois não é bom para Alice selecionar vértices que já estão no fecho convexo dos já rotulados, visto que ela deseja minimizar o tamanho do conjunto. Portanto $\mathrm{cghn}_{\mathcal{C}}(G) \leq \mathrm{ghn}_{\mathcal{C}}(G)$. Finalmente note que o tamanho é no máximo o número n de vértices e que Alice pode simplesmente selecionar em cada uma de suas jogadas um vértice de um conjunto mínimo de envoltória. No pior caso, ocorrerão $\mathrm{hn}_{\mathcal{C}}(G)$ rodadas terminando com Alice e portanto serão selecionados no máximo $2 \cdot \mathrm{hn}_{\mathcal{C}}(G) - 1$ vértices. Analogamente para os jogos do intervalo.

As desigualdades sobre os jogos da posição geral e da posição convexa seguem do fato de que todo conjunto em posição convexa está em posição geral. □

Um exemplo no limite superior é o jogo da envoltória P_3 nos ciclos C_4 e C_6, pois $\mathrm{hn}_{\mathrm{P3}}(C_4)$=2, $\mathrm{cghn}_{\mathrm{P3}}(C_4)$=$\mathrm{ghn}_{\mathrm{P3}}(C_4)$=3, $\mathrm{hn}_{\mathrm{P3}}(C_6)$=3, $\mathrm{cghn}_{\mathrm{P3}}(C_6)$=4 e $\mathrm{ghn}_{\mathrm{P3}}(C_6)$=5. No limite inferior, temos os ciclos C_3 e C_5, pois $\mathrm{hn}_{\mathrm{P3}}(C_5)$=$\mathrm{cghn}_{\mathrm{P3}}(C_5)$=$\mathrm{ghn}_{\mathrm{P3}}(C_5)$=3. Um exemplo no meio é o ciclo C_7, pois $\mathrm{hn}_{\mathrm{P3}}(C_7)$=4 e $\mathrm{cghn}_{\mathrm{P3}}(C_7)$=$\mathrm{ghn}_{\mathrm{P3}}(C_5)$=$5 < 7$.

Lema 2.3. *Bob sempre vence as variantes normal e pobre dos 4 jogos da convexidade monofônica no ciclo C_n. Ademais, $\mathrm{ghn}_{\mathrm{m}}(C_n) = \mathrm{gin}_{\mathrm{m}}(C_n) = \mathrm{cghn}_{\mathrm{m}}(C_n) = \mathrm{cgin}_{\mathrm{m}}(C_n) = 3$.*

Demonstração. Na variante normal, Bob só precisa rotular um vértice não adjacente ao primeiro vértice rotulado por Alice. Na variante pobre, Bob apenas rotula um vértice adjacente ao primeiro vértice rotulado por Alice. □

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174899
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174899

Lema 2.4. *Alice vence a variante normal dos jogos JI$_g$ e JIF$_g$ no ciclo C_n se e só se n é ímpar. Ademais, Bob sempre vence a variante pobre dos jogos JI$_g$ e JIF$_g$ no ciclo C_n. Por fim,* $\mathrm{cghn}_g(C_n) = \mathrm{cgin}_g(C_n) = \mathrm{ghn}_g(C_n) = \mathrm{gin}_g(C_n) = 3$.

Demonstração. Considere C_n como o ciclo $v_1, v_2, \ldots, v_n$ e assuma que Alice rotula v_1 na primeira jogada. Na variante normal, Bob rotula $v_{\lceil n/2 \rceil}$ se n é par, vencendo o jogo; se n é ímpar, Bob não consegue gerar o grafo inteiro e portanto Alice vencerá na próxima jogada. Na variante pobre, Bob rotula $v_{\lfloor n/2 \rfloor}$ e Alice perde na próxima jogada. □

3. Estratégias vencedoras do jogo Nim para jogos fechados da envoltória

Nim é um jogo combinatório em que dois jogadores (Alice e Bob, começando com Alice) alternadamente removem objetos de pilhas separadas até que não haja mais objetos restantes. Em cada jogada, um jogador escolhe uma pilha não vazia e deve remover um número positivo de objetos dela. O jogo termina quando todos os objetos são removidos. Como de costume, o último a jogar vence na variante normal e perde na variante pobre.

Uma instância de Nim é dada por uma sequência $\Phi = (h_1, h_2, \ldots, h_k)$, onde k é o número de pilhas e $h_i \geq 1$ é o tamanho da i-ésima pilha. Nim desempenha um papel fundamental na Teoria Sprague-Grundy de jogos e foi matematicamente resolvido por Bouton [1901] para qualquer instância Φ, ou seja, o problema de decisão de decidir qual jogador possui uma estratégia vencedora é solucionável em tempo polinomial em ambas as variantes de Nim. Isso está relacionado com a **nim-soma**(Φ), sendo a operação xor bit a bit aplicada aos tamanhos das pilhas $h_1, \ldots, h_k$.

Demonstramos a seguir, na prova do seguinte lema, a conexão entre o jogo Nim e o jogo de convexidade monofônica fechado no caminho P_n.

Lema 3.1. *Seja $n \geq 4$. Se n é ímpar (resp. par), Alice (resp. Bob) tem uma estratégia vencedora no jogo monofônico da envoltória fechada no caminho P_n em ambas as variantes normal e pobre. O mesmo é válido para a convexidade geodésica e para o jogo de intervalo fechado.*

Demonstração. Sabe-se que no jogo Nim com instância (h, h) com $h \geq 2$, Bob é o vencedor em ambas as variantes, normal e misère. Assim, considere o jogo da envoltória fechada monofônica no caminho $v_1 v_2 \ldots v_n$ com $n \geq 4$. Se n é par, o jogo é equivalente ao Nim com instância $\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$, vencido por Bob em ambas as variantes normal e pobre. Se n é ímpar, Alice rotula o vértice central $v_{\lceil n/2 \rceil}$ e, a partir da segunda jogada, o jogo é novamente equivalente a Nim com instância $\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$, vencido por Alice em ambas as variantes normal e pobre. □

Seja $\Phi = (h_1, \ldots, h_k)$ uma instância do jogo Nim. Seja Φ-**estrela** o grafo obtido a partir de k caminhos $v_{i,1}, \ldots, v_{i,h_i}$, com $i = 1 \ldots, k$, fazendo com que os primeiros vértices desses caminhos sejam adjacentes a um novo vértice c (o centro da estrela). Seja também a Φ-**aranha** o grafo obtido a partir de k caminhos $v_{i,1}, \ldots, v_{i,h_i}$, com $i = 1 \ldots, k$, fazendo com que os primeiros vértices desses caminhos sejam adjacentes mutuamente, isto é, $v_{1,1}, v_{2,1}, \ldots, v_{k,1}$ é uma clique. O seguinte lema mostra que as estratégias vencedoras para Bob no Nim determinam estratégias vencedoras nos jogos do intervalo e da envoltória fechados nas convexidades monofônica e geodésica nas Φ-estrelas e Φ-aranhas.

Lema 3.2. *Seja $\Phi = (h_1, \ldots, h_k)$ uma instância do jogo Nim com $k \geq 3$ e suponha que Bob tem uma estratégia vencedora em Φ no Nim. Então Alice (resp. Bob) tem uma estratégia vencedora na Φ-estrela (resp. Φ-aranha) na variante correspondente ao jogo monofônico hull fechado. O mesmo é válido para a convexidade geodésica e para o jogo de intervalo fechado.*

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174899
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174899

Demonstração. Na Φ-estrela, a estratégia vencedora de Alice é rotular o vértice c e depois seguir a estratégia vencedora de Bob no Nim. Na Φ-aranha, a estratégia vencedora de Bob é seguir sua estratégia no Nim, mas tomando cuidado para rotular em seu primeiro movimento um vértice em um caminho diferente do primeiro vértice rotulado por Alice, o que é sempre possível. Observe que, quando Bob rotula um vértice em um caminho diferente em seu primeiro movimento, todos os vértices iniciais de ambos os caminhos não podem mais ser rotulados nos jogos fechados na Φ-aranha. □

Para finalizar esta seção, provamos um caso que faltou no lema anterior.

Lema 3.3. *Seja $\Phi = (h_1, \ldots, h_k)$ uma instância de Nim com $k \geq 3$ e suponha que Alice possui uma estratégia vencedora para Φ no jogo Nim. Então Bob tem uma estratégia vencedora para a Φ-estrela no jogo fechado da envoltória monofônica, a menos que uma pilha tenha um número ímpar de objetos e o segundo bit menos signficativo desse número é o único com valor 1 entre todas as pilhas. O mesmo vale para a convexidade geodésica e para o jogo fechado do intervalo.*

Demonstração. Seja T a Φ-estrela. Seja v_{ij} o j-ésimo vértice do i-ésimo caminho de T. Pela conexão mostrada entre o jogo fechado monofônico e o jogo Nim, selecionar um vértice v_{ij} no jogo fechado é equivalente a remover j objetos da i-ésima pilha. De acordo com Bouton [1901] sobre o jogo Nim, se Alice tem estratégia vencedora em Φ no jogo Nim, então a **nim-soma** $h_1 \oplus h_2 \ldots \oplus h_k \neq 0$. Alice não pode rotular c em sua primeira jogada pois Bob poderia usar a estratégia vencedora de Alice no jogo Nim. Além disso, Alice evitará rotular v_{ij} tal que $h_1 \oplus h_2 \ldots \oplus (h_i - j) \oplus \ldots \oplus h_k = 0$, pois Bob pode rotular c e depois seguir a estratégia vencedora de Alice no jogo Nim, sempre mantendo a **nim-soma** igual a 0.

Suponha que não existe uma pilha com número ímpar de objetos tal que o segundo bit menos significativo é o único com valor 1 entre todas as pilhas. Seja v_{ij} o primeiro vértice selecionado por Alice. Seja $x = h_1 \oplus h_2 \ldots \oplus (h_i - j) \oplus \ldots \oplus h_k \neq 0$, e seja m tal que o m^{th} bit é o mais significativo na representação binária de x. Pelo menos uma pilha tem o m^{th} bit igual a 1 e, sem perda de generalidade, seja h_1 esta pilha. Consideramos agora 2 casos:

1. $i \neq 1$: Seja $h'_1 = x \oplus h_1$. Note que $h'_1 < h_1$, pois seu m-ésimo bit é 0. Logo, uma jogada mudando de h_1 para h'_1 é possível no jogo Nim. Isso implica que

$$\begin{aligned} h'_1 \oplus h_2 \ldots \oplus (h_i - j) \oplus \ldots \oplus h_k = \\ x \oplus h_1 \oplus h_2 \ldots \oplus (h_i - j) \oplus \ldots \oplus h_k = \\ x \oplus x = 0 \end{aligned}$$

   A estratégia de Bob é portanto rotular $v_{1j'}$, onde $j' = h_1 - h'_1$, vencendo o jogo fechado da envoltória monofônica mantendo a **nim-soma** igual a 0. Note que $c \in \text{hull}(v_{ij}, v_{1j'})$ pois existe um caminho induzido entre vértices v_{ij} e $v_{1j'}$ passando por c, já que $i \neq 1$. Se $i = 1$ e h_1 não é a única pilha cujo m-ésimo bit é igual a 1, o caso é análogo a este.

2. $i = 1$ **e** h_1 **é a única pilha cujo** m**-ésimo bit é igual a 1**

   Seja x' o número composto pelos primeiros m bits de h_1 e os demais bits iguais a 0. Seja $h'_1 = h_1 \oplus x'$. Note que $h'_1 < h_1$, pois os primeiros m bits de h'_1 são 0 e os demais são iguais aos de h_1. Assim analisamos os seguintes subcasos:

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174899
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174899

(a) $h'_1 = 0$: A estratégia vencedora de Bob é rotular v_{11}. Isso garante que $(h_1 - j) \oplus h_2 \oplus \ldots \oplus h_k \neq 0$, não estando c rotulado ainda. Além disso, h_1 ainda é a única pilha cujo m-ésimo bit é igual a 1. Se Alice rotula o próximo vértice em um caminho diferente do primeiro caminho, o vértice c estará no fecho convexo dos vértices rotulados, e a soma-nim será diferente de 0 no jogo Nim, o que implica que Bob possui uma estratégia vencedora. Caso contrário, se Alice rotula um vértice no mesmo caminho, a estratégia de Bob é a mesma do Caso 1.

(b) $h'_1 > 0$: Seja $j' = j + h'_1$. Nesse caso, a estratégia vencedora de Bob é rotular o vértice $v_{1j'}$, e as próximas jogadas serão similares ao do Caso 2a.

Finalmente note que o Caso 2a não é possível se o primeiro vértice rotulado por Alice é v_{11} e por isso há a restrição do teorema para haver uma pilha com número ímpar de objetos cujo segundo bit menos significativo é o único com valor 1 entre todas as pilhas. □

4. Jogos da Posição Convexa são PSPACE-Completos

Nesta seção, provamos que as variantes normal e pobre de vários jogos nas convexidades monofônica e geodésica são PSPACE-difíceis mesmo em grafos com diâmetro 2, a saber, o jogo da posição convexa JPC, o jogo da envoltória JE e o jogo da envoltória fechada JEF. Como mencionado acima, consideramos os jogos como problemas de decisão: dado um grafo, Alice tem uma estratégia vencedora? Como o número de rodadas é no máximo n e, em cada rodada, o número de possíveis vértices a rotular é no máximo n, todos esses jogos são jogos polinomialmente limitados de dois jogadores, o que implica que eles estão em PSPACE, segundo Hearn e Demaine [2009].

Começamos com o jogo da posição convexa monofônica JPC$_m$. De fato, provamos que uma versão simplificada é PSPACE-difícil. No *jogo simplificado da posição convexa*, a instância é um grafo G e um vértice v de G, que já está rotulado antes do início do jogo. Claramente, Bob tem uma estratégia vencedora no jogo da posição convexa em G se e somente se Alice tem uma estratégia vencedora no jogo simplificado da posição convexa em (G, v) para todo vértice v de G.

Obtemos reduções do jogo de formação de cliques, que foi provado PSPACE-completo por Schaefer [1978]. Neste jogo, dado um grafo G, dois jogadores, Alice e Bob, começando por Alice, selecionam alternadamente vértices e o subconjunto dos vértices escolhidos deve induzir uma clique. Quem joga por último vence. Isso está relacionado ao jogo Node Kayles, que também é PSPACE-completo Schaefer [1978], cujo objetivo é obter um conjunto independente, ao invés de uma clique. O jogo de formação de cliques é o jogo Node Kayles jogado no complemento do grafo, e vice-versa.

Teorema 4.1. *A variante pobre do jogo simplificado da posição convexa monofônica JPC$_m$ é PSPACE-completa mesmo em grafos com diâmetro dois.*

Demonstração. Seja H uma instância do jogo de formação de cliques. Podemos assumir que H não é completo. Seja G o grafo obtido a partir de H adicionando dois novos vértices u_1 e u_2 adjacentes a todos os vértices de H. Observe que G tem diâmetro 2. Além disso, considere u_1 como o vértice que já está rotulado. Provamos que Alice tem uma estratégia vencedora no jogo de formação de cliques em H se e somente se ela tem uma estratégia vencedora na variante pobre do jogo simplificado da posição convexa monofônica em (G, u_1). Se um jogador rotula u_2, é o último a jogar, perdendo imediatamente, pois $\mathrm{hull}_m(u_1, u_2) = V(G)$. Além disso, se um jogador rotular um vértice v_j de H no jogo da posição convexa e houver um vértice rotulado não adjacente v_i em H, então também perde imediatamente, pois $\mathrm{hull}_m(v_i, v_j) = V(G)$. Portanto, podemos assumir

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174899
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174899

que o conjunto L de vértices rotulados forma uma clique em todas as rodadas, exceto na última. Isso está diretamente relacionado ao jogo de formação de cliques em H. Se Alice tem uma estratégia vencedora no jogo de formação de cliques em H, então Bob é o primeiro a rotular um vértice de G com um vértice rotulado não vizinho, o que implica que ele perde na variante pobre do jogo da envoltória. Analogamente, se Bob tem uma estratégia vencedora no jogo de formação de cliques em H. □

Teorema 4.2. *A variante normal do jogo simplificado da posição convexa monofônica JPC$_m$ é PSPACE-completa mesmo em grafos com diâmetro dois.*

Demonstração. Considere a mesma redução do Teorema 4.1, mas adicionando a G um novo vértice w, que é isolado. Como antes, seja u_1 o vértice já rotulado em G. Se um jogador rotular w (resp. u_2) quando u_2 (resp. w) não estiver rotulado, perderá imediatamente, pois o oponente rotula u_2 (resp. w), ganhando a variante normal, já que $\mathrm{hull}_m(u_1, u_2, w) = V(G)$. Além disso, se um jogador rotular um vértice v_j de H no jogo da posição convexa e houver um vértice rotulado não adjacente v_i em H, então o jogador perderá imediatamente, pois o oponente rotula w, ganhando o jogo já que $\mathrm{hull}_m(v_i, v_j, w) = V(G)$. Portanto, podemos assumir que o conjunto L de vértices rotulados forma uma clique em todas as rodadas, exceto na última. Como antes, isso está diretamente relacionado ao jogo de formação de cliques em H: Alice tem uma estratégia vencedora na variante normal da posição convexa em G se e somente se ela tem uma estratégia vencedora no jogo de formação de cliques em H. □

Observe que os grafos construídos nas reduções não são necessariamente de distância hereditária, ou seja, as convexidades monofônica e geodésica podem ser diferentes neles. No entanto, não é difícil verificar que os mesmos argumentos são válidos para a convexidade geodésica. Além disso, é possível verificar que os argumentos também saõ válidos para o jogo da envoltória JE e para o jogo da envoltória fechada JEF.

Corolário 4.3. *As variantes normal e pobre do jogo da posição convexa JPC, do jogo da envoltória JE e do jogo da envoltória fechada JEF nas convexidades monofônica e geodésica são PSPACE-completas, mesmo em grafos com diâmetro dois.*

Referências

Araújo, J., Dourado, M. C., Protti, F., e Sampaio, R. M. (2023). The general position number and the iteration time in the p3 convexity.

Araújo, R. T., Sampaio, R. M., dos Santos, V. F., e Szwarcfiter, J. L. (2018). The convexity of induced paths of order three and applications: Complexity aspects. *Discrete Applied Mathematics*, 237:33–42.

Bouton, C. L. (1901). Nim, a game with a complete mathematical theory. *Annals of Mathematics*, 3(1/4):35–39.

Buckley, F. e Harary, F. (1985a). Closed geodetic games for graphs. *Congressus Numerantium*, 47: 131–138. Proc. of 16th Southeastern Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing.

Buckley, F. e Harary, F. (1985b). Geodetic games for graphs. *Quaestiones Mathematicae*, 8:321–334.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174899
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174899

Chandran S. V., U., Klavžar, S., Neethu P. K., e Sampaio, R. M. The general position avoidance game and hardness of general position games. A ser publicado em Theoretical Computer Science, 2023.

Duchet, P. (1987). Convexity in combinatorial structures. In *Proceedings of the 14th Winter School on Abstract Analysis*, p. 261–293. Circolo Matematico di Palermo. URL `http://eudml.org/doc/220736`. Proceedings of the 14th Winter School on Abstract Analysis.

Dudeney, H. E. (1917). *Amusements in Mathematics*. Thomas Nelson and Sons Ltd, London, Edimburgh and New York.

Erdős, P., Fried, E., Hajnal, A., e Milner, E. C. (1972). Some remarks on simple tournaments. *Algebra universalis*, 2:238–245.

Everett, M. G. e Seidman, S. B. (1985). The hull number of a graph. *Discrete Mathematics*, 57(3): 217–223.

Flammenkamp, A. (1998). Progress in the no-three-in-line problem, ii. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 81(1):108–113.

Gruber, P. M. e Wills, J. M. (1993). *Handbook of Convex Geometry*. North Holland.

Harary, F. (1984). Convexity in graphs: Achievement and avoidance games. In Rosenfeld, M. e Zaks, J., editors, *Convexity and Graph Theory*, volume 87 of *North-Holland Mathematics Studies*, p. 323. North-Holland.

Harary, F., Loukakis, E., e Tsouros, C. (1993). The geodetic number of a graph. *Mathematical and Computer Modelling*, 17(11):89–95.

Harary, F. e Nieminem, J. (1981). Convexity in graphs. *Journal of Differential Geometry*, 16(1): 185–190.

Haynes, T. W., Henning, M. A., e Tiller, C. (2003). Geodetic achievement and avoidance games for graphs. *Quaestiones Mathematicae*, 26:389–397.

Hearn, R. e Demaine, E. (2009). *Games, Puzzles and Computation*. A. K. Peters Ltd.

Jamison, R. E. (1981). Partition numbers for trees and ordered sets. *Pacific Journal of Mathematics*, 96(1):115 – 140.

Kanté, M. M., Sampaio, R. M., dos Santos, V. F., e Szwarcfiter, J. L. (2017). On the geodetic rank of a graph. *Journal of Combinatorics*, 8(2):323–340.

Klavžar, S., Neethu P. K., e Chandran S. V., U. (2022). The general position achievement game played on graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 317:109–116.

Manuel, P. e Klavžar, S. (2018). A general position problem in graph theory. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 98(2):177–187.

Nature (1917). Amusements in mathematics. *Nature*, 100:302–303.

Nečásková, M. (1988). A note on the achievement geodetic games. *Quaestiones Mathematicae*, 12: 115–119.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174899
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174899

Pelayo, I. M. (2013). *Geodesic Convexity in Graphs*. Springer. ISBN 9781461486992.

Ramos, I., dos Santos, V. F., e Szwarcfiter, J. L. (2014). Complexity aspects of the computation of the rank of a graph. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, 16(2).

Schaefer, T. J. (1978). On the complexity of some two-person perfect-information games. *Journal of Computer and System Sciences*, 16(2):185–225.

van de Vel, M. L. J. (1993). *Theory of convex structures*, volume 50. Elsevier.

Zermelo, E. (1913). Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. In *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians*, p. 501–504.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174899
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174899