São José dos Campos - SP
LV SBPO
LV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional
São José dos Campos, SP - 6 a 9 de novembro de 2023

# Otimizando o Empacotamento de Pedidos no Setor de Comércio Eletrônico

**Yuri Masakazu Mizusawa**
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - Universidade de São Paulo (USP)
Av. Trabalhador São-carlense, 13566-590, São Carlos - SP
yuri.mizusawa@usp.br

**Franklina Maria Bragion Toledo**
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - Universidade de São Paulo (USP)
Av. Trabalhador São-carlense, 13566-590, São Carlos - SP
fran@icmc.usp.br

**RESUMO**

O crescimento do comércio eletrônico tem impulsionado a busca por estratégias que visam a redução de seus custos e de seus impactos ambientais. Nesse contexto, a seleção de um conjunto de caixas para otimizar o empacotamento de encomendas contribui para reduzir o espaço vazio transportado, diminuindo os custos de entrega. A escolha de caixas mais compactas reflete no impacto ambiental, pois menos enchimento é necessário para complementá-la. Neste trabalho, dois modelos matemáticos da literatura foram adaptados para tratar o empacotamento de itens retangulares tridimensionais considerando a seleção de caixas. Foi analisado o uso de restrições alternativas, visando a redução dos tempos de resolução do problema. Estas restrições resultaram em melhores limitantes duais, mas não contribuíram para a redução dos tempos computacionais. Para os dois modelos estudados, os tempos computacionais de resolução ficaram abaixo de 3 minutos para as instâncias avaliadas e o espaço vazio foi reduzido em até 8%.

**PALAVRAS CHAVE. Empacotamento 3D, itens retangulares, comércio eletrônico.**

**PM – Programação Matemática; POI – PO na Indústria**

**ABSTRACT**

The rapid expansion of e-commerce has prompted the pursuit of cost-minimization strategies and the mitigation of social and environmental impacts. Thus, optimizing order packaging by selecting a set of boxes is investigated to reduce wasted space during transportation and delivery costs. The selection of more compact boxes results in less filling, with less environmental impact. In this study, two existing mathematical models to address the packing of three-dimensional regular items, considering box selection, were adapted and compared. Alternative constraints were evaluated, aiming to reduce execution times. These constraints resulted in better dual bounds, however, they could not reduce computational times. For both models, solving times were under 3 minutes for the instances evaluated, and the wasted volume was reduced up to 8%.

**KEYWORDS. 3D packing, rectangular items, e-commerce**

**DOI:** 10.59254/sbpo-2023-174892
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174892

## 1. Introdução

Nos últimos anos, o mercado global de comércio eletrônico (*e-commerce*) apresentou significativo crescimento. Somente em 2022, 131 bilhões de encomendas foram enviadas globalmente e esse número deve dobrar até 2026 [Bowes, 2021]. Devido a esse aumento, as cadeias logísticas de transporte de encomendas vêm procurando opções que contribuam para a redução dos custos e dos impactos negativos para a sociedade.

Dentre os impactos que esse crescimento gera em um ambiente urbano, pode-se citar os econômicos, como congestionamentos; sociais, relacionados à segurança de transporte e de pessoas; e ambientais [Comi e Savchenko, 2021]. Na parte dos custos, tem-se os custos diretos, como transporte e empacotamento (embalagem e enchimento) e custos indiretos, como taxas extras e longos tempos de entrega levando a redução de compras online [Baluch, 2021]. Nesse contexto, é necessária a busca de soluções que mitiguem os problemas logísticos mencionados.

Esses problemas podem ser abordados em diversas fases do processo de envio de encomendas. Dentre essas fases a separação e empacotamento dos itens (*"pick & packing"*) têm influência nos custos e impactos mencionados. O empacotamento, em especial, gera diversos desafios, como, melhorar o aproveitamento do transporte de pacotes ao diminuir o espaço residual das caixas enviadas (espaço vazio).

Para reduzir o volume residual, as empresas precisam analisar dois pontos: (i) como realizar um melhor empacotamento dos itens nas caixas existentes, e (ii) como escolher as caixas disponíveis em estoque. Alonso et al. [2016] e Fontaine e Minner [2022] desenvolvem modelos que buscam otimizar estas questões. Nestes trabalhos, o empacotamento considera estes dois pontos em conjunto, e ao empacotar cada pedido espera-se reduzir o volume residual e conjuntamente selecionar as caixas para tal.

Neste contexto, o problema abordado visa a seleção da(s) caixa(s) e o empacotamento dos itens de modo a minimizar o espaço residual. Este tipo de problema pertence a classe de problemas de empacotamento, podendo ser tratado como um problema de empacotamento de caixas (*Bin Packing Problem*) que busca minimizar a quantidade de caixas utilizadas ou um problema de carregamento de contêineres (*Container Loading Problem*) tendo como foco a maximização da ocupação do contêiner. Além disso, seguindo a classificação de Wäscher et al. [2007], o problema estudado é definido como um problema de empacotamento residual (*Residual Bin Packing Problem*).

Dois modelos da literatura foram utilizados para tratar o problema estudado no contexto de comércio eletrônico. O objetivo é melhorar o transporte de itens retangulares tridimensionais ao otimizar seu empacotamento em uma ou mais caixas.

Este trabalho está organizado em quatro seções. Primeiro, os modelos e suas formulações alternativas são descritos, na Seção 2. Em seguida, os experimentos computacionais e resultados são reportados na Seção 3. Finalmente, as conclusões e pesquisas futuras são apresentadas na Seção 4.

## 2. Descrição do Problema Estudado e Modelagem Matemática

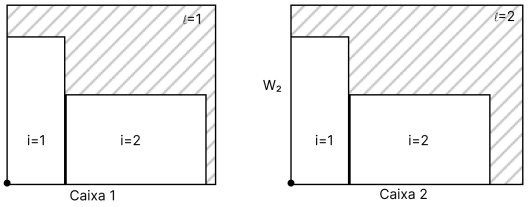
No âmbito do comércio eletrônico, uma compra pode conter vários itens, que devem ser empacotados e enviados ao cliente. Ao escolher a caixa para o empacotamento dos itens pode existir sobra de espaço que além de levar ao transporte de uma caixa maior que a necessária, também demanda seu preenchimento com material descartável para preservar a integridade dos itens empacotados.

Dessa forma, o problema estudado consiste em, dado um conjunto de caixas disponíveis para o empacotamento de uma encomenda, selecionar uma ou duas caixas que permitam empacotar todos os itens resultando no menor volume residual. O limite de duas caixas foi estabelecido para

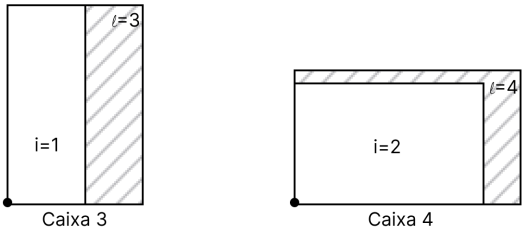
**DOI:** 10.59254/sbpo-2023-174892
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174892

minimizar o impacto logístico de tratar várias caixas para um único pedido. Assim, o espaço vazio transportado e o volume de material descartável utilizado são reduzidos. Na Figura 1, três possibilidades de empacotamento de uma encomenda que contem dois itens são ilustradas. No exemplo, há quatro caixas disponíveis. Na Figura 1a, a encomenda é empacotada em apenas uma caixa, neste caso, duas possibilidades de empacotamento que resultam em diferentes níveis de espaço vazio são apresentadas. Na Figura 1b, a encomenda é empacotada em duas caixas resultando num espaço vazio total menor.

Figura 1: Exemplos de empacotamentos de uma encomenda com dois itens ($i = 1, 2$) considerando quatro caixas ($\ell = 1, 2, 3, 4$) disponíveis. Nas imagens, a área hachurada mostra espaço vazio da caixa $\ell$ ($Res_\ell$).




(a) Empacotamento em uma caixa ($Res_1 < Res_2$).




(b) Encomenda em duas caixas ($Res_4 + Res_3 < Res_1 < Res_2$).

Para tratar o problema estudado, são explorados dois modelos matemáticos da literatura para o empacotamento de retângulos tridimensionais (3D). Chen et al. [1995] propuseram um modelo matemático para o problema de empacotamento 3D com várias caixas disponíveis. O modelo está descrito na Seção 2.1. Tsai et al. [1993] desenvolveram um modelo matemático que visa maximizar a ocupação de uma caixa ao empacotar a maior quantidade de itens possível. O modelo foi adaptado para considerar a seleção de caixas e o empacotamento de todos os itens. Esse modelo está descrito na Seção 2.2. Por fim, com base em formulações alternativas propostas para o problema de localização de facilidades, busca-se melhorar a resolução dos modelos estudados.

### 2.1. Modelo de Chen, Lee e Shen

Chen et al. [1995] apresentam um modelo para o empacotamento tridimensional de múltiplos itens em múltiplas caixas, tendo como objetivo empacotar todos os itens de forma a minimizar o volume residual do empacotamento.

Para a representação das caixas, os autores assumem como ponto de origem das caixas o ponto (0,0,0), como ilustrado na Figura 2. No trabalho original, a rotação dos itens é permitida, contudo para simplificar o modelo, neste estudo, não é considerada essa possibilidade. O modelo é definido por (1) – (17), seus parâmetros e suas variáveis estão descritos na Tabela 1.

**DOI:** 10.59254/sbpo-2023-174892
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174892

Figura 2: Ilustração em duas dimensões da origem de três caixas no modelo de Chen et al. [1995].

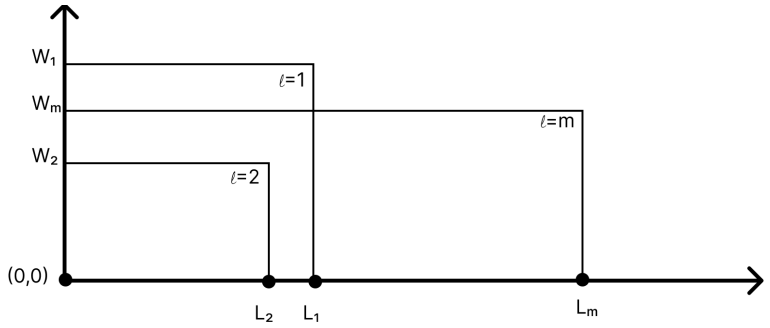



Tabela 1: Parâmetros e variáveis do modelo de Chen et al. [1995] sem rotações.

| | |
|---|---|
| **Parâmetros** | |
| $n$ | número de itens a serem empacotados |
| $m$ | número de caixas disponíveis para o empacotamento |
| $(l_i, w_i, h_i)$ | comprimento, largura e altura do item $i$ |
| $(L_\ell, W_\ell, H_\ell)$ | comprimento, largura e altura da caixa $\ell$ |
| $v_i$ | volume to item $i$ ($v_i = l_i\ h_i\ w_i$) |
| $V_\ell$ | volume da caixa $\ell$ ($V_\ell = L_\ell\ H_\ell\ W_\ell$) |
| $(ML, MW, MH)$ | número suficientemente grande com relação ao eixo x, definido como o maior $(L_\ell, W_\ell, H_\ell)$, respectivamente |
| $Q$ | número máximo de caixas em que os itens podem ser empacotados |
| **Variáveis** | |
| $(x_i, y_i, z_i)$ | posição em que o item $i$ é posicionado nos eixos $x$, $y$ e $z$ (variáveis contínuas) |
| $\beta_\ell$ | assume o valor 1 se a caixa $\ell$ for usada para o empacotamento dos itens, caso contrário é igual a 0 (variável binária) |
| $\alpha_{i\ell}$ | assume o valor 1 se o item $i$ for empacotado na caixa $\ell$, caso contrário é igual a 0 (variável binária) |
| $a_{ij}$ $(b_{ij})$ | assume o valor 1 se o item $i$ estiver a esquerda (direita) do item $j$, caso contrário é igual a 0 (variável binária) |
| $c_{ij}$ $(d_{ij})$ | assume o valor 1 se o item $i$ estiver a atrás (em frente) do item $j$, caso contrário é igual a 0 (variável binária) |
| $e_{ij}$ $(f_{ij})$ | assume o valor 1 se o item $i$ estiver a acima (abaixo) do item $j$, caso contrário é igual a 0 (variável binária) |

$$Z_{CLS} = \min \sum_{\ell=1}^{m} V_\ell\ \beta_\ell - \sum_{i=1}^{n} v_i \tag{1}$$

s.a.

*// Restrições de posicionamento*

$$x_i + l_i \leq L_\ell + ML\ (1 - \alpha_{i\ell}) \qquad i = 1, ..., n; \ell = 1, ..., m; \tag{2}$$

$$y_i + w_i \leq W_\ell + MW\ (1 - \alpha_{i\ell}) \qquad i = 1, ..., n; \ell = 1, ..., m; \tag{3}$$

**DOI:** 10.59254/sbpo-2023-174892
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174892

$$z_i + h_i \leq H_\ell + MH\ (1 - \alpha_{i\ell}) \qquad i = 1, ..., n; \ell = 1, ..., m; \qquad (4)$$

*// Restrições de não sobreposição*

$$x_i + l_i \leq x_j + ML(1 - a_{ij}) \qquad i = 1, ..., n-1; j = i+1, ...n; \qquad (5)$$

$$x_j + l_j \leq x_i + ML(1 - b_{ij}) \qquad i = 1, ..., n-1; j = i+1, ...n; \qquad (6)$$

$$y_i + w_i \leq y_j + MW(1 - c_{ij}) \qquad i = 1, ..., n-1; j = i+1, ...n; \qquad (7)$$

$$y_j + w_j \leq y_i + MW(1 - d_{ij}) \qquad i = 1, ..., n-1; j = i+1, ...n; \qquad (8)$$

$$z_i + h_i \leq z_j + MH(1 - e_{ij}) \qquad i = 1, ..., n-1; j = i+1, ...n; \qquad (9)$$

$$z_j + h_j \leq z_i + MH(1 - f_{ij}) \qquad i = 1, ..., n-1; j = i+1, ...n; \qquad (10)$$

$$a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} + d_{ij} + e_{ij} + f_{ij} \geq \alpha_{i\ell} + \alpha_{j\ell} - 1 \qquad i = 1, ..., n-1; j = i+1, ...n; \ell = 1, ..., m; \qquad (11)$$

*// Restrições de empacotamento*

$$\sum_{\ell=1}^{m} \alpha_{i\ell} = 1 \qquad i = 1, ..., n; \qquad (12)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i\ell} \leq n\ \beta_\ell \qquad \ell = 1, ..., m; \qquad (13)$$

$$\sum_{\ell=1}^{m} \beta_\ell \leq Q \qquad (14)$$

*// Domínio das variáveis*

$$\alpha_{i\ell}, \beta_\ell \in \{0, 1\} \qquad i = 1, ..., n; \ell = 1, ..., m; \qquad (15)$$

$$a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}, e_{ij}, f_{ij} \in \{0, 1\} \qquad i = 1, ..., n-1; j = i+1, ...n; \qquad (16)$$

$$x_i, y_i, z_i \geq 0 \qquad i = 1, ..., n. \qquad (17)$$

A função objetivo (1) minimiza a soma dos volumes residuais das caixas selecionadas. As restrições (2) a (4) asseguram que o item esteja totalmente contido na caixa em que ele for alocado, ou seja, a posição $(x_i, y_i, z_i)$ mais suas dimensões $(l_i, w_i, h_i)$ estão dentro dos limites ($L_\ell$, $W_\ell$ e $H_\ell$) da caixa $\ell$ se $\alpha_{i\ell} = 1$. Caso o item não seja posicionado na caixa $\ell$, então as restrições correspondentes a ela não estão ativas. As restrições (5) a (10) garantem a não sobreposição dos itens. Contudo, essas restrições somente estão ativas quando dois itens estão posicionados na mesma caixa ($\alpha_{i\ell} = \alpha_{j\ell} = 1$), garantido pelas restrições (11). As restrições (12) asseguram que um item seja empacotado em apenas uma caixa e que todos os itens sejam empacotados. As restrições (13) impõem que se houver ao menos um item empacotado em uma caixa $\ell$ então esta caixa está sendo utilizada, logo $\beta_\ell$ deve ser igual a 1. Como todos os itens podem estar numa mesma caixa, a soma dos itens empacotados deve ser menor ou igual a $n$. Para limitar a quantidade de caixas que podem ser utilizadas num empacotamento ($Q$) a restrição (14) é adicionada ao modelo de Chen et al. [1995]. O domínio das variáveis é definido por (15) a (17).

### 2.2. Modelo de Tsai et al. [1993] adaptado

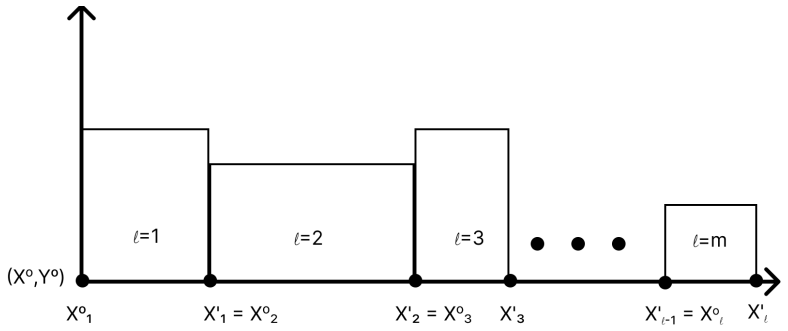
O segundo modelo foi adaptado de Tsai et al. [1993]. Os autores desenvolveram um modelo de empacotamento 3D que tem como objetivo maximizar o volume ocupado pelos itens em uma única caixa.

Neste trabalho, o modelo foi adaptado para selecionar dentre várias caixas qual ou quais utilizar para empacotar todos os itens. Logo, dois pontos foram adaptados: (i) adicionar as variáveis

**DOI:** 10.59254/sbpo-2023-174892
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174892

binárias $\alpha_{i\ell}$ que determinam em qual caixa $\ell$ o item $i$ é empacotado, e (ii) considerar várias caixas simultaneamente. As caixas foram representadas alinhadas ao longo do eixo $x$ como ilustrado na Figura 3. Logo, cada caixa tem seus pontos de início $(L^o_\ell, 0, 0)$ e final $(L'_\ell, W_\ell, H_\ell)$, onde $L^o_\ell + L_\ell = L'_\ell = L^o_{\ell+1}$.

Figura 3: Ilustração em duas dimensões da origem de $m$ caixas para o modelo de Tsai et al. [1993] adaptado.




O modelo é definido por (18) – (30). Como muitos parâmetros e variáveis são iguais aos definidos para o modelo de [Chen et al., 1995], na Tabela 2, são descritos apenas os parâmetros e as variáveis adicionais do modelo.

Tabela 2: Parâmetros e variáveis adicionais do modelo Tsai et al. [1993] adaptado.

| **Parâmetros Adicionais** | |
|---|---|
| $L^o_\ell$ | coordenada inicial da caixa $\ell$ (comprimento) |
| $L'_\ell$ | coordenada final da caixa $\ell$ (comprimento) |
| **Variáveis Adicionais** | |
| $u_1^{ij}, u_2^{ij}, u_3^{ij}$ | variáveis auxiliares para ativação das restrições de não sobreposição entre os itens $i$ e $j$ (variáveis binárias) |

$$\text{Z} = \min \sum_{\ell=1}^{m} V_\ell \cdot \beta_\ell - \sum_{i=1}^{n} v_i \tag{18}$$

s.a.

*// Restrições de posicionamento*

$$x_i \geq L^o_\ell - L^o_\ell(1 - \alpha_{i\ell}) \qquad i = 1, ..., n;\ \ell = 1, ..., m; \tag{19}$$

$$x_i + l_i \leq L^{'}_\ell + ML\ (1 - \alpha_{i\ell}) \qquad i = 1, ..., n;\ \ell = 1, ..., m; \tag{20}$$

*(3) - (4)*

*// Restrições de não sobreposição*

$$x_i + l_i \leq x_j + ML\ (u_2^{ij} + u_3^{ij}) \qquad i = 1, ..., n-1; j = i+1, ...n; \tag{21}$$

$$x_j + l_j \leq x_i + ML\ (u_1^{ij} + u_3^{ij}) \qquad i = 1, ..., n-1; j = i+1, ...n; \tag{22}$$

$$y_i + w_i \leq y_j + MW\ (u_1^{ij} + u_2^{ij}) \qquad i = 1, ..., n-1; j = i+1, ...n; \tag{23}$$

$$y_j + w_j \leq y_i + MW\ (2 - (u_1^{ij} + u_2^{ij})) \qquad i = 1, ..., n-1; j = i+1, ...n; \tag{24}$$

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174892
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174892

$$z_i + h_i \leq z_j + MH\ (2 - (u_2^{ij} + u_3^{ij})) \qquad i = 1, ..., n-1; j = i+1, ...n; \qquad (25)$$

$$z_j + h_j \leq z_i + MH\ (2 - (u_1^{ij} + u_3^{ij})) \qquad i = 1, ..., n-1; j = i+1, ...n; \qquad (26)$$

$$1 \leq u_1^{ij} + u_2^{ij} + u_3^{ij} \leq 2 \qquad i = 1, ..., n-1; j = i+1, ...n; \qquad (27)$$

*// Restrições de empacotamento*

$(12) - (14)$

*// Dominio das variáveis*

$$u_1^{ij}, u_2^{ij}, u_3^{ij} \in \{0, 1\} \qquad i = 1, ..., n-1;\ j = i+1, ...n; \qquad (28)$$

$$\alpha_{i\ell}, \beta_\ell \in \{0, 1\} \qquad i = 1, ...n;\ \ell = 1, ...m; \qquad (29)$$

$$x_i, y_i, z_i \geq 0 \qquad i = 1, ...n. \qquad (30)$$

A função objetivo (18) visa minimizar o volume residual das caixas selecionadas. As restrições (19) e (20) definem os limites de posicionamentos para os itens. Neste modelo, as caixas estão alinhadas no eixo $x$ (Figura 3), então se a variável $\alpha_{i\ell}$ é igual para 1 para $(i, \ell)$ o valor de $x_i$ é limitado pelas restrições (19) e (20) aos limites da caixa $\ell$ ($L_\ell^0 \leq x_i \leq L_\ell^{'} - l_i$). Da mesma forma que no modelo de Chen et al. [1995], este modelo utiliza as restrições (3) e (4) para garantir que os itens estejam dentro dos limites da caixa selecionada $\ell$ com relação a sua largura e a sua altura ($W_\ell$ e $Z_\ell$). Diferentemente do modelo anterior, a não sobreposição dos itens é determinada pelas restrições (21) a (27), onde as restrições (27) garantem que sempre exista pelo menos uma restrição entre (21) a (26) ativa. As restrições de empacotamento são iguais às restrições ao modelo $Z_{CLS}$. O domínio das variáveis é definido por (28) – (30).

### 2.3. Restrições Equivalentes

Os problemas de otimização podem ser modelados de diferentes formas, ou seja, pode-se ter diferentes formulações para um mesmo problema (formulações alternativas). Neste artigo, duas modelagens para o problema abordado são apresentadas. Além disso, é possível adicionar desigualdades válidas aos modelos visando torná-los mais apertados.

Analogamente ao problema de localização de facilidades, as restrições (13) podem ser substituídas pelas restrições:

$$\alpha_{i\ell} \leq \beta_\ell \qquad i = 1, ...n;\ \ell = 1, ...m \qquad (31)$$

Com esta substituição, busca-se aproximar a relaxação linear do problema de sua envoltória convexa (ver [Wolsey, 2020]). No entanto, o número de restrições dos modelos aumenta, e portanto, nos experimentos computacionais é avaliado se estas modificações resultam em melhorias para a resolução das instâncias analisadas.

## 3. Experimentos Computacionais

Os experimentos computacionais foram realizados em três etapas. Na primeira, são analisadas as relaxações lineares dos modelos descritos, Seções 2.1 e 2.2, utilizando ou não as restrições equivalentes da Seção 2.3. O objetivo foi avaliar o benefício das restrições equivalentes com relação aos limitantes duais do problema. Na segunda, o objetivo foi verificar o modelo mais indicado para resolver o problema estudado. Nesta etapa, as instâncias-teste foram resolvidas pelos dois modelos apresentados com e sem as restrições equivalentes. Na última etapa, foi avaliado o ganho ao se resolver o problema empacotando os itens em apenas uma caixa ou em até duas caixas.

Para os testes computacionais foram utilizadas 100 instâncias geradas com base em dados da literatura conforme descrito na Seção 3.1. Os experimentos foram realizados em um computador

**DOI:** 10.59254/sbpo-2023-174892
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174892

Intel® Core™ i7-7700 CPU 3.60GHz x 8, 15,5 GiB de memória RAM e SO Ubuntu 20.04.4 LTS 64bits. Os modelos foram descritos utilizando linguagem de programação Julia versão 1.7.2 e as instâncias foram resolvidas utilizando o software de otimização Gurobi versão 9.5.1 com tempo limite de 1.800 segundos.

### 3.1. Geração das Instâncias

Para realização dos experimentos computacionais, foram geradas 100 instâncias, divididas em quatro conjuntos de 25 instâncias. Sendo que cada conjunto contém, respectivamente, instâncias com sete, oito, nove e dez itens. Os itens foram selecionados aleatoriamente a partir de uma instância com 90 itens de Fanslau e Bortfeldt [2010]. O conjunto de caixas utilizado foi coletado de dados disponibilizados por terceiros que trabalham com a Amazon™ e utilizam suas caixas [Dimensions, 2022]. O conjunto contém um total de 123 caixas com dimensões variando de 13 a 147. Como os itens e as caixas foram obtidos de diferentes fontes, para ajustar os itens às caixas utilizadas suas dimensões foram divididas por 4,64.

O número de variáveis de decisões do problema também depende do número de caixas disponíveis para o empacotamento, então para cada instância, buscou-se reduzir o número de caixas disponíveis garantindo que sua solução ótima não fosse excluída. Logo, numa etapa de pré-processamento, são eliminadas as caixas em que não é possível empacotar nenhum item da instância, ou seja, caixas com dimensão e/ou volume menores que o menor item. Também foram eliminadas caixas grandes demais, isto é, caixas com volume maior que a menor caixa disponível em que todos os itens podem ser empacotados. Esta caixa foi definida ao resolver o problema considerando que todos os itens devem ser empacotados em apenas uma caixa (Q=1). Na Tabela 3, é apresentado um resumo do número médio de caixas por instância.

Tabela 3: Resumo das quantidades de caixas disponíveis para empacotamento para cada quantidade de itens.

| | Número de Caixas | | |
|---|---|---|---|
| Itens | Média | Mediana | Desvio |
| 7 | 79,4 | 78 | 15,8 |
| 8 | 76,2 | 82 | 13,7 |
| 9 | 82,0 | 88 | 14,8 |
| 10 | 88,3 | 88 | 11,6 |

Além dos dados anteriores, foi imposto que os pedidos podem ser empacotados em no máximo duas caixas ($Q = 2$).

### 3.2. Etapa 1 – Análise da relaxação linear dos modelos

Na primeira etapa dos experimentos computacionais, as instâncias foram resolvidas considerando a relaxação linear dos modelos estudados. O objetivo foi verificar a qualidade dos limitantes duais obtidos considerando quatro possibilidades: os modelos das Seções 2.1 ($Z_{CLS1}$) e 2.2 ($Z_1$) e os modelos com as restrições equivalentes ($Z_{CLS2}$) e ($Z_2$).

Os resultados obtidos são resumidos na Tabela 4. Na primeira coluna, é definido o número de itens das instâncias. Nas três colunas seguintes, são dadas a média, a mediana e o desvio padrão da melhora percentual do valor da relaxação dos modelos com as restrições equivalentes ($Z_2^{Rel}$) em relação aos modelos inicialmente apresentados ($Z_1^{Rel}$). A melhora para cada instâncias é dada por $\frac{Z_2^{Rel} - Z_1^{Rel}}{Z_2^{Rel}} \cdot 100$.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174892
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174892

Pode-se observar que a relaxação da formulação alternativa ($Z_2^{Rel}$) apresentou resultados ligeiramente superiores à relaxação da formulação original ($Z_1^{Rel}$), com um ganho percentual em torno de 1,5 a 2,0%. Esse resultado é consistente com a literatura [Wolsey, 2020], que indica que o tipo de restrição utilizada na formulação $Z_2^{Rel}$ proporciona um melhor limitante dual para este tipo de modelo.

Tabela 4: Melhoria da função objetivo considerando a relaxação linear dos modelos.

| Itens | Melhora | | |
|---|---|---|---|
| | Média | Mediana | Desvio |
| 7 | 1,5% | 1,4% | 0,5% |
| 8 | 1,7% | 1,7% | 0,7% |
| 9 | 1,9% | 1,7% | 0,9% |
| 10 | 1,6% | 1,6% | 0,6% |

### 3.3. Etapa 2 - Resolução do Problema

Na segunda etapa, as instâncias foram resolvidas a fim de avaliar o desempenho dos modelos estudados considerando o tempo necessário para obter uma solução ótima. Dentre as 100 instâncias resolvidas, para duas o tempo limite foi atingido, logo elas foram excluídas das tabelas para evitar distorção dos resultados.

Nas Tabelas 5 e 6, é apresentado um resumo dos resultados obtidos para os modelos de Chen et al. [1995] (Seção 2.1) e Tsai et al. [1993] (Seção 2.2), respectivamente. Na primeira coluna, é reportado o número de itens das instâncias. Nas quatro colunas seguintes, são apresentadas a média, mediana, desvio padrão e soma (total) dos tempos de resolução para as instâncias. Nas quatro colunas finais, são reportadas as mesmas informações considerando os modelos com as restrições equivalentes (Seção 2.3).

Para os modelos baseados em Chen et al. [1995], embora a formulação $Z_{CLS2}$ tenha um melhor limitante dual (Seção 3.3), os resultados são muito similares com relação a média e a mediana dos tempos de resolução das instâncias (Tabela 5). Somente os tempos totais apresentam uma leve melhora da formulação $Z_{CLS2}$. As instâncias com 8 itens não seguem esse padrão.

Tabela 5: Tempos de resolução das instâncias considerando o modelo de Chen et al. [1995].

| Itens | $Z_{CLS1}$ | | | | $Z_{CLS2}$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Média | Mediana | DP | Total | Média | Mediana | DP | Total |
| 7 | 1 | <1 | <1 | 14 | <1 | <1 | <1 | 10 |
| 8 | 2 | 1 | 1 | 39 | 2 | 1 | 2 | 44 |
| 9 | 6 | 3 | 10 | 152 | 6 | 2 | 10 | 138 |
| 10* | 11 | 5 | 11 | 257 | 10 | 5 | 10 | 229 |

* Duas instâncias atingiram o tempo limite e foram excluídas.

Para os modelos baseados em Tsai et al. [1993], há uma diferença um pouco maior nos tempos de resolução (Tabela 6). Novamente, observa-se uma diminuição da média, mediana e do tempo total na formulação $Z_2$ para as instâncias com 7, 8 e 10 itens. Contudo, para as instâncias com 9 itens os resultados são melhores para a formulação $Z_1$.

Comparando os resultados dos dois modelos, é possível ver que o modelo de Chen et al. [1995] obteve tempos significantemente menores que o modelo de Tsai et al. [1993] adaptado. Isso pode ser visto pelas médias e totais dos tempos que são melhores para todas as instâncias (Tabelas

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174892
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174892

Tabela 6: Tempos de resolução das instâncias considerando o modelo de Tsai et al. [1993] adaptado.

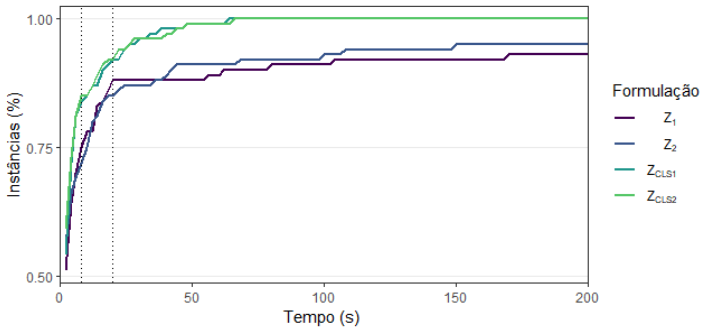
| Itens | $Z_1$ | | | | $Z_2$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Média | Mediana | DP | Total | Média | Mediana | DP | Total |
| 7 | 1 | 1 | 2 | 24 | 1 | <1 | <1 | 13 |
| 8 | 7 | 2 | 20 | 183 | 5 | 1 | 14 | 137 |
| 9 | 19 | 3 | 51 | 476 | 24 | 6 | 81 | 604 |
| 10* | 84 | 6 | 183 | 1930 | 71 | 8 | 181 | 1631 |

* Duas instâncias atingiram o tempo limite e foram excluídas.

5 e 6). Contudo é interessante observar que a mediana de ambos é similar, mas o desvio padrão do modelo de Tsai et al. [1993] adaptado é maior. Esse resultado indica que a diferença de performance pode ser explicada por algumas instâncias que demandaram altos tempos de resolução neste modelo e, consequentemente, elevaram a média e o total.

Para detalhar os resultados, na Figura 4 é apresentado um gráfico de performance [Dolan e Moré, 2002]. No gráfico, o eixo $y$ indica a porcentagem cumulativa das instâncias resolvidas na otimalidade utilizando cada um dos modelos sem e com as restrições equivalentes até um dado limite de tempo (eixo $x$). Os resultados indicam que a performance dos modelos de Chen et al. [1995] são significativamente superiores. Isso pode ser visto em 8 segundos (linha pontilhada à esquerda) onde há uma clara distinção dos valores e novamente em 20 segundos (linha pontilhada à direita), se mantendo até tempos mais altos (200 segundos).

Figura 4: Gráfico de performance por tempo (segundos) para todas as instâncias. As linhas pontilhadas representam, da esquerda para a direita, os pontos de 8 e 20 segundos.




### 3.4. Etapa 3 - Seleção de Caixas

Na terceira etapa, é analisado o número de instâncias em que duas caixas foram utilizadas para o empacotamento. Adicionalmente, a diferença de volume residual percentual ($V_{RES}$) das 100 instâncias resolvidas com itens empacotados em somente uma caixa ($Q = 1$) é comparada à resolução considerando o empacotamento em até duas caixas ($Q = 2$).

O volume residual foi calculado como a porcentagem de volume vazio total ($V_{RES} = \frac{\sum V_\ell - \sum v_i}{\sum V_\ell}\ 100$), em que $V_\ell$ é o volume de cada caixa selecionada para o empacotamento e $v_i$ é o volume de cada item empacotado.

Na Tabela 7, são reportados os volumes residuais ($V_{RES}$) para todas as instâncias e considerando somente as instâncias em que o modelo empacotou os itens em duas caixas ($V_{RES2}$), para $Q = 1$ e $Q = 2$.

**DOI:** 10.59254/sbpo-2023-174892
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174892

Tabela 7: Comparação da redução do volume residual considerando uma ou duas caixas.

| | Q=1 | | Q=2 | |
|---|---|---|---|---|
| Itens | $V_{RES}$ | $V_{RES2}$ | $V_{RES}$ | $V_{RES2}$ |
| 7 | 41,5% | 47,8% | 33,9% | 34,3% |
| 8 | 38,2% | 39,3% | 31,1% | 31,5% |
| 9 | 37,3% | 39,0% | 30,7% | 30,6% |
| 10 | 34,0% | 36,0% | 28,7% | 28,7% |
| Média | 37,7% | 40,5% | 31,2% | 31,3% |

No total, 68 instâncias foram empacotadas em duas caixas, indicando que essa pode ser uma estratégia interessante. Ao analisar o volume residual total entre $Q = 1$ e $Q = 2$, é possível perceber que existe uma redução média ($V_{RES}$) de aproximadamente 6%. Esse resultado fica ainda mais evidente ao considerar somente instâncias com duas caixas ($V_{RES2}$), onde a variação aumenta para 8%. Contudo, essa redução vem acompanhada da diferença na quantidade de tipos de caixas, onde $Q = 1$ utiliza 23 tipos de caixas para empacotar as 100 instâncias, enquanto $Q = 2$ utiliza 41 tipos de caixas.

## 4. Conclusões e Pesquisas Futuras

Neste trabalho, foi estudado o problema de empacotamento de pedidos visando diminuir o volume residual de encomendas. Para isso dois modelos da literatura foram utilizados: i) o modelo de Chen et al. [1995] em que não é permitida a rotação dos itens; e ii) o modelo de Tsai et al. [1993] adaptado para permitir o uso de múltiplas caixas e assegurar o empacotamento de todos os itens. Em busca de melhores limitantes duais, foram analisadas formulações equivalentes dos modelos.

Como esperado, quando as instâncias são resolvidas considerando a relaxação linear dos modelos, os resultados mostraram um ganho na qualidade do limitante dual ao utilizar as restrições equivalentes (31). Contudo, este ganho não foi expressivo e ao resolver os problemas originais, não houve ganho computacional. É possível que isto esteja ocorrendo devido ao pequeno número de itens em cada instância, o que resulta em um pequeno ganho para o limitante dual.

Observando os resultados obtidos ao resolver as instâncias utilizando o modelo de Chen et al. [1995] e o modelo de Tsai et al. [1993] adaptado, ambos demandaram tempos computacionais baixos (medianas abaixo de 8 segundos). Contudo, ao comparar as duas abordagens, os resultados obtidos utilizando o modelo de Chen et al. [1995] são claramente menores. Isso provavelmente se deve ao modo como as caixas são representadas em cada modelo. O enfileiramento das caixas no eixo $x$, modelo Tsai et al. [1993] adaptado, demanda um limitante maior para as restrições relacionadas aos comprimentos das caixas (eixo $x$), o que deve dificultar a convergência do método de resolução.

No cenário em que um pedido pode ser empacotado em até duas caixas ($Q = 2$), os resultados mostraram que houve economia no espaço, isto ressalta a importância da adoção dessa estratégia de empacotamento pelas empresas. Entretanto, é importante lembrar que essa redução vem acompanhada de um aumento na quantidade de tipos de caixas utilizadas. Logo, é relevante o estudo integrado desses pontos.

**Agradecimentos**

O presente trabalho foi realizado com apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) - Código de Financiamento 001, da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) (2013/07375-0 (CEPID-CeMEAI)), do auxílio do Programa de Excelência Acadêmica (Proex) — CAPES (88887.658565/2021-00), e do

**DOI:** 10.59254/sbpo-2023-174892
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174892

Conselho Nacional de Pesquisa (CNPq) (309161/2022-3). Os autores também agradecem ao Laboratório de Otimização do ICMC/USP (LOt).

**Referências**

Alonso, M., Alvarez-Valdes, R., Parreño, F., e Tamarit, J. (2016). Determining the best shipper sizes for sending products to customers. *International Transactions in Operational Research*, 23: 265–285.

Baluch, A. (2021). 38 e-commerce statistics of 2023. `www.forbes.com/advisor/business/ecommerce-statistics/`. Acessado: 2022-05-30.

Bowes, P. (2021). Parcel shipping volume worldwide. `https://www.statista.com/statistics/1139910/parcel-shipping-volume-worldwide/`. Acessado: 2023-05-30.

Chen, C., Lee, S., e Shen, Q. (1995). An analytical model for the container loading problem. *European Journal of Operational Research*, 80:68–76.

Comi, A. e Savchenko, L. (2021). Last-mile delivering: Analysis of environment-friendly transport. *Sustainable Cities and Society*, 74:103213.

Dimensions, B. (2022). Amazon box sizes. `https://www.boxdimensions.com/`. Acessado: 2022-09-22.

Dolan, E. D. e Moré, J. J. (2002). Benchmarking optimization software with performance profiles. *Mathematical Programming*, 91:201–213.

Fanslau, T. e Bortfeldt, A. (2010). A tree search algorithm for solving the container loading problem. *INFORMS Journal on Computing*, 22:222–235.

Fontaine, P. e Minner, S. (2022). A branch-and-repair method for three-dimensional bin selection and packing in e-commerce. *Operations Research*, 71:273–288.

Tsai, R. D., Malstrom, E. M., e Kuo, W. (1993). Three dimensional palletization of mixed box sizes. *IIE Transactions*, 25:64–75.

Wolsey, L. A. (2020). *Integer Programming*. John Wiley & Sons, Ltd, USA.

Wäscher, G., Haußner, H., e Schumann, H. (2007). An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, 183:1109–1130.

**DOI:** 10.59254/sbpo-2023-174892
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174892