São José dos Campos - SP
LV SBPO
LV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional
São José dos Campos, SP - 6 a 9 de novembro de 2023

Explorando estimadores robustos e resistentes na reconciliação de previsões de hierarquias desbalanceadas

Maurício Franca Lila
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
Departamento de Engenharia Industrial, Rua Marquês de São Vicente, 225, Ed. Cardeal Leme, 9º andar, Rio de Janeiro 22451-900, BR
Escola Nacional de Ciências Estatísticas
Rua André Cavalcanti, 106 - Centro, Rio de Janeiro 20231-050, BR
mauriciolila@gmail.com

Fernando Luiz Cyrino Oliveira
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
Departamento de Engenharia Industrial, Rua Marquês de São Vicente, 225, Ed. Cardeal Leme, 9º andar, Rio de Janeiro 22451-900, BR
cyrino@puc-rio.br

Erick Meira
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
Departamento de Engenharia Industrial, Rua Marquês de São Vicente, 225, Ed. Cardeal Leme, 9º andar, Rio de Janeiro 22451-900, BR
research@erickmeira.com; erickmeira89@gmail.com

RESUMO

Séries Temporais Hieráquicas (HTS) representam um conjunto de séries temporais que podem ser agregadas em diferentes níveis, de acordo com uma estrutura hierárquica bem definida. Métodos de previsão hierárquica aproveitam tal estrutura para realizar a reconciliação das previsões de base, gerando resultados teoricamente mais acurados que aqueles fornecidos por métodos independentes. Uma porção considerável das técnicas recentes de previsão hierárquica consistem em combinar previsões de base por meio de estratégias de reconciliação baseadas em modelos de regressão. No entanto, o sistema de ponderação pode ser comprometido em casos de hierarquias desbalanceadas, causando distorções ao processo de reconciliação. Neste contexto, o presente trabalho busca avaliar empiricamente a aderência de diferentes métodos de reconciliação em tarefas de previsão de séries temporais de uma hierarquia desbalanceada bem conhecida na literatura de HTS, a de turismo doméstico na Austrália. Os exercícios empíricos consideram tanto métodos clássicos da literatura de HTS como estratégias mais recentes, à exemplo das reconciliações robusta e resistente. No geral, estas duas últimas abordagens mostram resultados promissores de previsão, superando a performance de competidores em múltiplas configurações e mesmo quando diferentes métricas de avaliação são consideradas. Resultados e implicações em termos de tomada de decisão são posteriormente discutidos.

PALAVRAS CHAVE. Previsão hierárquica, Reconciliação de previsões, Regressão Robusta

Tópicos. EST&MP – Estatística e Modelos Probabilísticos; L&T – Logística e Transportes.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174864
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174864

ABSTRACT

Hierarchical Time Series (HTS) stand for a set of time series that can be aggregated at different levels, according to a well-defined hierarchical structure. Hierarchical forecasting methods take advantage of the hierarchical structure of the data by reconciling base forecasts, generating results that are theoretically more accurate than those provided by benchmark methods. A considerable part of recent hierarchical forecasting techniques consist of combining base forecasts through reconciliation strategies that rely on regression models. However, the weighting system may sometimes be compromised, particularly when the hierarchical structure is unbalanced, causing distortions to the reconciliation process. In this context, this work aims to empirically assess the performance of different reconciliation methods when reconciling forecasts from time series that represent the domestic tourism in Australia, a well-known unbalanced hierarchy in the HTS literature. The empirical exercises consider both classic methods from the HTS literature and recent strategies, such as robust and resistant reconciliations. Overall, these last two approaches show promising forecasting results, outperforming competitors in multiple settings and even when different evaluation metrics are considered. Results and implications in terms of decision making are further discussed.

KEYWORDS. Hierarchical forecasting. Forecast reconciliation. Robust regression.

Paper topics. Statistics and Probabilistic Models (EST&MP); Logistics and Transportation (L&T).

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174864
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174864

1. Introdução

A previsão hierárquica de séries temporais pode ser entendida como o processo de geração de previsões coerentes utilizando como insumo previsões de base. Por coerência, entende-se como a propriedade das previsões de séries temporais possuírem (i) o mínimo de inconsistências ou erros em comparação com outros conjuntos de previsões e (ii) somarem adequadamente seus valores ao longo dos níveis da hierarquia, ou seja, a soma das previsões das séries temporais em um determinado nível equivale ao valor da previsão da série temporal que fica no nível imediatamente superior [Lila et al., 2022]. Já as previsões de base (*base forecasts*) são aquelas que são geradas por métodos independentes, aplicados diretamente a cada série da hierarquia, mas sem levar em conta a estrutura hierárquica que essa série forma com outras séries adjacentes [Meira et al., 2023].

Métodos de reconciliação recentes, sobretudo aqueles baseados em técnicas de regressão, têm demonstrado melhorar a acurácia das previsões em múltiplos estudos [Hyndman et al., 2011, 2016; Wickramasuriya et al., 2019]. Do ponto de vista teórico, tais técnicas recentes de reconciliação são construídas de forma a garantir que as previsões reconciliadas sejam pelo menos tão 'boas', no sentido de maior acurácia, quanto as previsões de base. Uma versão aprimorada pode ser construída quando uma estrutura de covariância é bem estimada e pode ser incorporada ao processo. Nesse caso, as previsões reconciliadas também terão a variância mínima entre todas as combinações possíveis de previsões.

Apesar do acima exposto, na prática, as estruturas de covariância entre as previsões das séries temporais pertencentes a uma hierarquia são estimadas a partir dos erros de previsão dentro da amostra (*in-sample*) um passo à frente. Nesse contexto, os estimadores de covariância se tornam por vezes sensíveis a resíduos atípicos, levando a efeitos indesejáveis nos pesos das transformações lineares. Alternativas promissoras nesse sentido são os métodos de reconciliação robusta e resistente, recém-propostos por Lila et al. [2022] e Meira et al. [2023], respectivamente. Tais métodos possuem como vantagem o fato de serem menos afetados por imperfeições e/ou contaminação dos dados, tornando-se potenciais candidatos para oferecerem previsões acuradas em múltiplos cenários.

Ante o exposto, este trabalho busca avaliar a performance de diferentes métodos de reconciliação de previsões de séries hierárquicas por meio da realização de múltiplos exercícios empíricos de estimação e posterior previsão de um conjunto de séries temporais bastante conhecido na literatura dedicada: as séries de turismo doméstico na Austrália, cujos dados são mensurados pelo número de pernoites de residentes australianos fora de casa, mas ainda em solo australiano. O uso desse conjunto de séries se torna relevante, sobretudo pelo fato destas formarem entre si uma estrutura hierárquica desbalanceada, como será melhor abordado à frente, o que impõe desafios extras na etapa de reconciliação. Os exercícios empíricos consideram tanto métodos clássicos da literatura de HTS como estratégias mais recentes, à exemplo das reconciliações robusta e resistente. Os resultados obtidos apontam que estas duas últimas abordagens podem melhorar substancialmente a acurácia das previsões, sendo tais abordagens superiores a diferentes métodos, tanto clássicos como outros recém-propostos na literatura.

Para alcançar os objetivos propostos, este trabalho está estruturado em outras 4 seções, além desta introdução. A Seção 2 traz uma breve descrição sobre séries temporais hierárquicas, ressaltando também os métodos mais apropriados para se gerar as previsões de base e posterior reconciliação destas previsões. A Seção 3 traz os detalhes da base de dados utilizada e da construção dos exercícios empíricos conduzidos. Os resultados destes, por sua vez, são apresentados na Seção 4. Por fim, a Seção 5 conclui e traz diretrizes para trabalhos futuros.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174864
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174864

2. Séries temporais hierárquicas e reconciliação de previsões

2.1. Conceitos e representações

As Séries Temporais Hierárquicas (*Hierarchical Time Series* - HTS) correspondem a um conjunto de séries temporais que podem ser agregadas em diferentes níveis, de acordo com uma estrutura hierárquica bem definida. É possível classificar as hierarquias em duas estruturas básicas: balanceadas e não balanceadas. Hierarquias balanceadas possuem uma estrutura regular e o mesmo número de itens ou subgrupos em cada nível. Já as hierarquias denominadas não balanceadas não apresentam uma estrutura regular e podem conter diferentes níveis de variabilidade ou incerteza entre suas séries. Para fins ilustrativos, considere a representação uma série temporal hierárquica com a seguinte estrutura não balanceada em um determinado instante t.

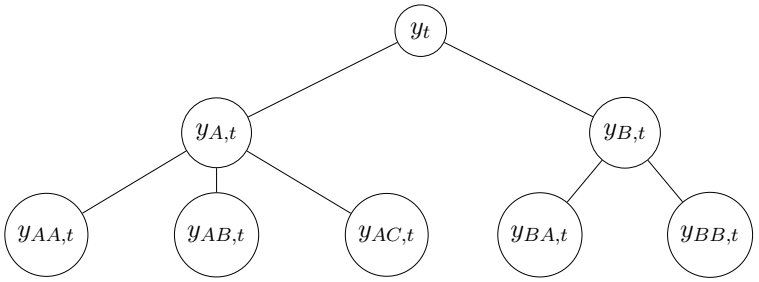

Figura 1: Representação diagramática de uma hierarquia de séries temporais desbalanceada.

A estrutura apresentada na Figura 1 pode ser representada em notação matricial. Seja $\mathbf{y}_t$ um vetor de tamanho m, composto por observações de todos os níveis hierárquicos no tempo t. É possível definir uma matriz apropriada $\mathbf{S}$ de dimensão $m \times n$ tal que,

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{S}\mathbf{y}_t^b \tag{1}$$

onde $\mathbf{y}_t^b$ é um vetor de n elementos que contém as observações no nível mais detalhado da hierarquia.

2.2. Reconciliação de previsões hierárquicas

Em uma estrutura de previsão hierárquica, todas as séries são inicialmente previstas usando métodos independentes, dando origem ao que se chama de "previsões de base" (*base forecasts*). Em seguida, busca-se uma abordagem de reconciliação, visando-se entregar previsões finais "coerentes". Este termo significa previsões que são não enviesadas, têm variação mínima entre todas as combinações e se agregam (somam) adequadamente em toda a hierarquia [Hyndman e Athanasopoulos, 2021].
Em termos matemáticos, o processo de reconciliação de previsões pode ser representado da seguinte forma. Primeiro, considere $\hat{\mathbf{y}}t + h|t$ um vetor de previsões base com h passos à frente, geradas usando métodos independentes, com a mesma disposição de $\mathbf{y}t$. Assim, para uma matriz $\mathbf{P}$ de dimensão $n \times m$, temos a seguinte equação:

$$\tilde{\mathbf{y}}_{t+h|t} = \mathbf{SP}\hat{\mathbf{y}}_{t+h|t} \tag{2}$$

onde $\tilde{\mathbf{y}}_{t+h|t}$ são as previsões reconciliadas. As matrizes $\mathbf{SP}$ representam o processo de reconciliação, que mapeia previsões independentes (ou incoerentes) em previsões coerentes.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174864
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174864

2.2.1. Abordagens clássicas

Dependendo de como a matriz $\mathbf{P}$ está estruturada, faz-se possível reproduzir diferentes abordagens tradicionais de previsão hierárquica. Por exemplo, ao se adotar $\mathbf{P} = \left[\mathbf{0_{n\times(m-n)}}|\mathbf{I_n}\right]$, sendo $\mathbf{0_{n\times(m-n)}}$ uma matriz nula, pode-se reproduzir a abordagem *Bottom-Up* (BU). Neste caso, a matriz $\mathbf{P}$ mantém apenas as previsões para o nível mais granular e $\mathbf{S}$ completa os processos gerando previsões reconciliadas em todos os níveis da hierarquia.

Por outro lado, as previsões *Top-Down* podem ser alcançadas fazendo-se $\mathbf{P} = \left[\mathbf{p}|\mathbf{0_{n\times(m-1)}}\right]$, onde $\mathbf{p}$ é o conjunto de proporções das previsões. As abordagens mais comuns para obter essas proporções são a Média das proporções históricas (ou *Gross-Sohl method A*, TDGSA) e a Proporção das médias históricas (ou *Gross-Sohl method F*, TDGSF), ambas propostas por Gross e Sohl [1990]. Na primeira abordagem (TDGSA), os pesos para as previsões no topo da hierarquia levam em consideração a importância relativa de cada valor dos níveis hierárquicos inferiores da série temporal para um determinado instante de tempo. A abordagem então calcula a média dos pesos para toda a série temporal. Já na segunda (TDGSF), o sistema de ponderação considera a importância relativa histórica das séries localizadas em níveis inferiores em relação à série temporal no nível imediatamente superior.

2.2.2. A combinação ótima e suas variantes

O trabalho de Hyndman et al. [2011] introduziu a ideia de se reconciliar previsões hierárquicas de forma 'ótima' a partir de uma perspectiva baseada em um modelo de regressão, sumariamente representado abaixo:

$$\hat{\mathbf{y}}_{t+h|t} = \mathbf{S}\boldsymbol{\beta}_{t+h|t} + \boldsymbol{\epsilon}_{t+h|t} \tag{3}$$

onde $\boldsymbol{\beta}_{t+h|t} = E[\mathbf{y}^b_{t+h}|\mathcal{I}_t]$, $\mathcal{I}_t = y1, y_2, \ldots, y_t$ e $V(\boldsymbol{\epsilon}_{t+h|t}|\mathcal{I}_t) = \boldsymbol{\Sigma}_h$.

Hyndman et al. [2016] propuseram o uso do estimador de Mínimos Quadrados Ponderados (*Weighted Least Squares* – WLS) para obter uma estimativa da matriz variância-covariância (Σ_h), ignorando os elementos fora da diagonal. Seguindo essa ideia, novos estudos propuseram métodos alternativos para se obter Σ_h, cujo cálculo é dependente dos modelos de previsão. Por exemplo, a abordagem de reconciliação pelo Estimador de Mínimo Traço (*Minimum Trace Estimator* – MinT), introduzida em Wickramasuriya et al. [2019], visa encontrar uma matriz $\mathbf{P}$ que minimize $tr(\mathbf{SPW_hP'S'})$ sujeito a $\mathbf{SPS} = \mathbf{S}$, a condição de imparcialidade. Wickramasuriya et al. [2020], por sua vez, reconsiderou o problema de minimização dos mínimos quadrados considerando restrições de não negatividade, de forma a garantir que as previsões coerentes fossem estritamente não negativas.

Para se usar a reconciliação *MinT*, faz-se necessário estimar $\mathbf{W_h}$, a matriz de variância-covariância dos erros das previsões de base h passos à frente. Dada a dificuldade em se estimar esta matriz, várias abordagens de aproximação foram propostas, dando origem a variantes da abordagem de combinação ótima representada na Equação (3). Algumas destas variantes estão listadas a seguir:

- Estimador de Mínimos Quadrados Ordinários (*Ordinary Least Squares* – OLS): $\mathbf{W_h} = \mathbf{k_h I}$ onde $k_h > 0$ e $\mathbf{I}$ é a matriz identidade. Esta é a hipótese mais simples e significa assumir que a matriz $\mathbf{P}$ é independente dos dados, proporcionando uma vantagem em termos computacionais. No entanto, ao ignorar as estruturas de dependência entre os resíduos, informações relevantes são perdidas.

- Estimador de mínimos quadrados ponderado com escala de variância: $\mathbf{W_h} = \mathbf{k_h}\text{diag}(\hat{\mathbf{W}}_\mathbf{1})$ onde $k_h > 0$ e $\hat{\mathbf{W}}_1$ é o estimador de covariância amostral imparcial dos erros de previsão base de um passo à frente na amostra, representado como $\hat{\mathbf{W}}_1 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \mathbf{e_t(1)e_t(1)'}$. Essa

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174864
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174864

especificação dimensiona as previsões de base usando a variação dos resíduos de um passo à frente. Nesta situação, os elementos fora da diagonal principal da matriz de covariâncias são zerados [Hyndman et al., 2016]. Essa abordagem foi considerada como método de referência nos resultados, sendo representada como *Weighted Least Squares with variance scaling* (WLS(v)).

- Estimador de mínimos quadrados ponderado com escalonamento estrutural: $\mathbf{W_h} = \mathbf{k_h}\mathbf{\Lambda}$ onde $k_h > 0$, $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\mathbf{S1})$ e $\mathbf{1}$ é um vetor unitário de dimensão $m \times 1$ (m o número de séries no nível mais granular da hierarquia). Esta especificação assume que cada um dos erros de previsão de base de nível inferior tem variação k_h e que tais erros não estão correlacionados entre os nós. Portanto, cada elemento da matriz diagonal $\mathbf{\Lambda}$ contém o número de variações de erro de previsão que contribuem para cada nó. Este estimador depende apenas da estrutura das agregações e não dos dados reais. Assim como o WLS(v), a presente abordagem foi considerada como método de referência nos resultados, sendo representada como *Weighted Least Squares with structural scaling* (WLS(s)).

- Estimador pelo Traço Mínimo usando a matriz de covariância completa (*MinT-Sample*): $\mathbf{W_h} = \mathbf{k_h}\hat{\mathbf{W}}_\mathbf{1}$. Nesse caso, a única suposição é de que as matrizes de covariância de erro são proporcionais umas às outras e a matriz de covariância completa das previsões um passo à frente é diretamente estimada [Wickramasuriya et al., 2019]. Esta abordagem também foi considerada como método de referência nos resultados, sendo representada como *MinT-Sample*.

- Estimador pelo Traço Mínimo com encolhimento (*MinT-Shrink*): A abordagem *MinT-Sample* apresenta problemas de implementação quando a matriz de covariância não é definida positiva. Nesses casos, costuma-se adotar a alternativa do Estimador pelo Traço Mínimo com encolhimento (*MinT-Shrink*): $\mathbf{W_h} = \mathbf{k_h}\hat{\mathbf{W}}^*_{\mathbf{1,D}}$ onde $k_h > 0$ e $\hat{\mathbf{W}}^*_{1,D} = \lambda\hat{\mathbf{W}}_{1,D} + (1-\lambda)\hat{\mathbf{W}}_1$. Trata-se de um estimador da matriz de covariâncias que visa reduzir a importância dos elementos fora da diagonal principal de $\hat{\mathbf{W}}_1$. Assim como o WLS(v), o WLS(s) e o *MinT-Sample*, a presente abordagem também foi considerada como método de referência nos resultados, sendo representada como *MinT-Shrink*.

Vale frisar que, no *MinT-Shrink*, o parâmetro de encolhimento λ é uma função das correlações *in-sample* (dentro do período de treinamento da amostra), sendo estimado da seguinte forma: $\hat{\lambda} = \sum \hat{V}(\hat{r}_{ij}) / \sum \hat{r}^2_{ij}$, $i \neq j$, onde $\hat{r}_{ij}$ corresponde ao elemento ij de $\hat{\mathbf{R}}_1$, a matriz de correlação *in-sample* um passo à frente.
Independentemente da abordagem selecionada para estimar $\mathbf{W_h}$, as previsões ótimas reconciliadas são dadas por:

$$\tilde{\mathbf{y}}_h = \mathbf{S}(\mathbf{S}'\mathbf{W}_\mathbf{h}^{-1}\mathbf{S})^{-1}\mathbf{S}'\mathbf{W}_\mathbf{h}^{-1}\hat{\mathbf{y}}_\mathbf{h}. \tag{4}$$

2.2.3. Reconciliação robusta e reconciliação resistente

Outra maneira de se representar o processo de reconciliação, alternativa à equação (3), é:

$$\tilde{\mathbf{y}}_h = \mathbf{S}\tilde{\beta}_h. \tag{5}$$

Nesse contexto, é possível definir os resíduos do processo de reconciliação como:

$$\epsilon(\tilde{\beta}_h) = \mathbf{y}_h - \tilde{\mathbf{y}}_h \tag{6}$$

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174864
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174864

onde $\mathbf{y}_h$ são os valores reais das séries temporais e $\tilde{\mathbf{y}}_h$ são as previsões reconciliadas. Um dos problemas que encontramos ao reconciliar previsões é que não observamos os resíduos reconciliados na fase de estimação. Nesse caso, a distância entre as previsões reconciliadas e as independentes pode ser usada:

$$\hat{\mathbf{y}}_h - \tilde{\mathbf{y}}_h = \eta(\tilde{\beta}_h) \tag{7}$$

O trabalho de Lila et al. [2022] considerou o uso de estimadores M para $\tilde{\beta}_h$ no contexto de reconciliação de previsões hierárquicas e propôs uma abordagem baseada em robustez aplicada a dados de desemprego de várias pesquisas de força de trabalho. A abordagem é brevemente resumida abaixo. Seja ρ uma função com as seguintes propriedades: não negativa, ou seja, $\rho(z) \geq 0$; $\rho(0) = 0$; simétrica, $\rho(z) = \rho(-z)$ e monótona em $|Zi|$, $\rho(z_i) \geq \rho(z_{i'})$ para $|z_i| > |z_{i'}|$. Então, o estimador robusto M baseado na Equação (5) é dado por:

$$\tilde{\beta}_{M,h} = \arg\min_{\tilde{\beta}h} \sum_{i=1}^{n} \rho(\eta_i(\tilde{\beta}_h)). \tag{8}$$

Em virtude de suas propriedades desejáveis para a convergência computacional, Lila et al. [2022] considerou a função Huber [1964], conforme a seguir:

$$\rho(z) = \begin{cases} z^2, & \text{se } |z| < c; \\ |2z|c - c^2, & \text{se } |z| \geq c \end{cases} \tag{9}$$

para uma constante dada c. Uma vez que alguns estimadores robustos são influenciados pela escala dos resíduos, foi utilizada uma versão invariante à escala do estimador M:

$$\tilde{\beta}_{\mathrm{M},h} = \arg\min_{\tilde{\beta}_h} \sum_{i=1}^{m} \rho\left(\frac{\eta_i(\tilde{\beta}_h)}{\sigma}\right), \tag{10}$$

Existem duas maneiras comuns de se estimar σ. Nos exercícios empíricos, consideramos uma versão baseada no Desvio Médio Absoluto (*Mean Absolute Deviation* – MAD), denominado por Huber 1 em Lila et al. [2022] e representado da seguinte forma:

$$\hat{\sigma} = \frac{MAD}{0,6745} = \frac{median\{|\eta_i(\beta_h)|\}}{0,6745} \tag{11}$$

Embora a reconciliação robusta possa fornecer previsões conciliadas precisas em várias ocasiões, os métodos de regressão robusta são apenas capazes de reduzir a influência de valores discrepantes. Em outras palavras, essas abordagens não eliminam valores discrepantes, mas sim reduzem seus efeitos durante a regressão. No contexto da reconciliação hierárquica de previsões, algumas técnicas resistentes, como o método dos Mínimos Desvios Absolutos (*Least Absolute Deviations* – LAD), podem ser usadas e fornecer resultados confiáveis. No trabalho de Meira et al. [2023], o estimador LAD com base nas quantidades da equação (7) é dado por:

$$\tilde{\beta}_{LAD,h} = \arg\min_{\beta_h} \sum_{i=1}^{m} |\eta_i(\tilde{\beta}_h)|. \tag{12}$$

A solução desse problema de minimização invoca uma variante do algoritmo simplex proposto por Barrodale e Roberts [1974], conforme descrito em Koenker e d'Orey [1987].

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174864
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174864

2.3. Gerando previsões de base

O ponto de partida é prever cada série da hierarquia selecionada de forma independente, gerando as previsões de base. Para tanto, consideraremos aqui uma abordagem de previsão amplamente conhecida na literatura de previsão de séries temporais, as formulações univariadas da família SARIMA (*Seasonal, Autoregressive, Integrated, Moving Average*), propostas por Box e Jenkins [1970]. Estas formulações são denotadas por SARIMA$(p,d,q) \times (P,D,Q)_S$ e podem ser escritas da seguinte forma:

$$\nabla_S^D \nabla^d \phi(B)\ \Phi\left(B^S\right)\ Z_t = \theta(B)\ \Theta\left(B^S\right)\ a_t \tag{13}$$

onde: S é o número de períodos sazonais; as letras minúsculas p, d, q correspondem, respectivamente, às quantidades de termos autoregressivos, integrados, e de médias móveis da parte não sazonal do modelo; as letras maiúsculas P, D, Q correspondem, respectivamente, às quantidades de termos autoregressivos, integrados, e de médias móveis da parte sazonal do modelo; a_t é o termo de erro; B é o operador de atraso (*Backward*), i.e., $By_t = y_{t-1}$; $\phi(B)$ e $\Phi\left(B^S\right)$ são aos polinômios autoregressivos não sazonal e sazonal, respectivamente; $\theta(B)$ e $\Theta\left(B^S\right)$ são aos polinômios de médias móveis não sazonal e sazonal, respectivamente; e ∇_S^D e ∇^d são os operadores de diferenciação não sazonal e sazonal, respectivamente.
Neste trabalho, adotou-se a função `auto.arima()`, do pacote *forecast* para a linguagem R, para a seleção do melhor modelo SARIMA (mais adequado a cada série) e posterior previsão.

3. Dados e montagem dos experimentos

3.1. Dados

Para condução dos estudos empíricos, adotou-se o mesmo conjunto de séries temporais hierárquicas que foi usado para validar abordagens recentes e com boa adesão na literatura, como o caso das abordagens *MinT-Sample* e *MinT-Shrink* [Wickramasuriya et al., 2019]. O conjunto reúne registros históricos da demanda trimestral de turismo doméstico na Austrália, medida como o número de noites que os australianos passam fora de casa, mas ainda em território nacional. Os registros estão disponíveis em periodicidade trimestral, entre anos de 1998 e 2016, para vinte regiões da Austrália, dentro de seis estados. Os estados que serão considerados são: New South Wales (NSW), Queensland (QLD), South Australia (SAU), Victoria (VIC), Western Australia (WAU) e Other (OTH). Dentro do contexto de séries temporais hierárquicas, os estados são agregações de zonas que estão organizadas de forma desbalanceada, como mostrado na Figura 2. As zonas dentro dos estados são: Metro (ME), North Coast (NC), South Coast (SC), South Inner (SI), North Inner (NI), Central (CE), Coastal (CO), Inner (IN), West Coast (WC), East Coast (EC) e Non-Metro (NM).

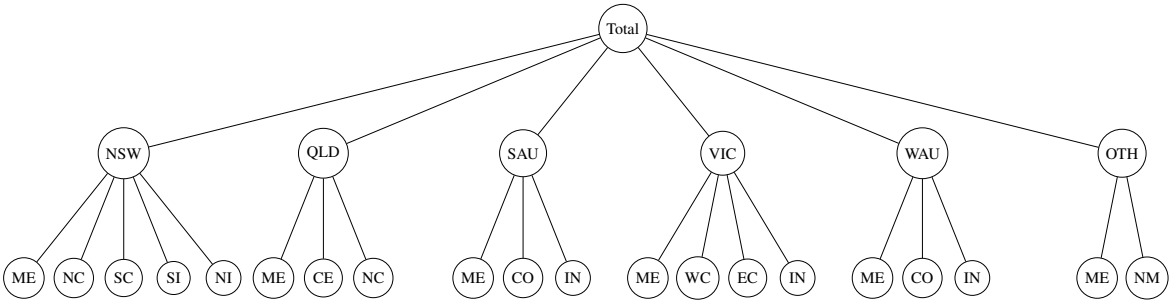

Figura 2: Estrutura hierárquica das séries temporais que representam o número de pernoites fora de casa por visitantes domésticos na Austrália, em milhões por trimestre.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174864
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174864

A Figura 3 ilustra tanto o comportamento da série situada mais ao topo da hierarquia (primeiro gráfico) quanto o comportamento das séries no nível mais granular (desagregado) da hierarquia, que ilustram as diferenças observadas dentro dos seis estados devido às zonas significativas representadas neste grupo de séries temporais.

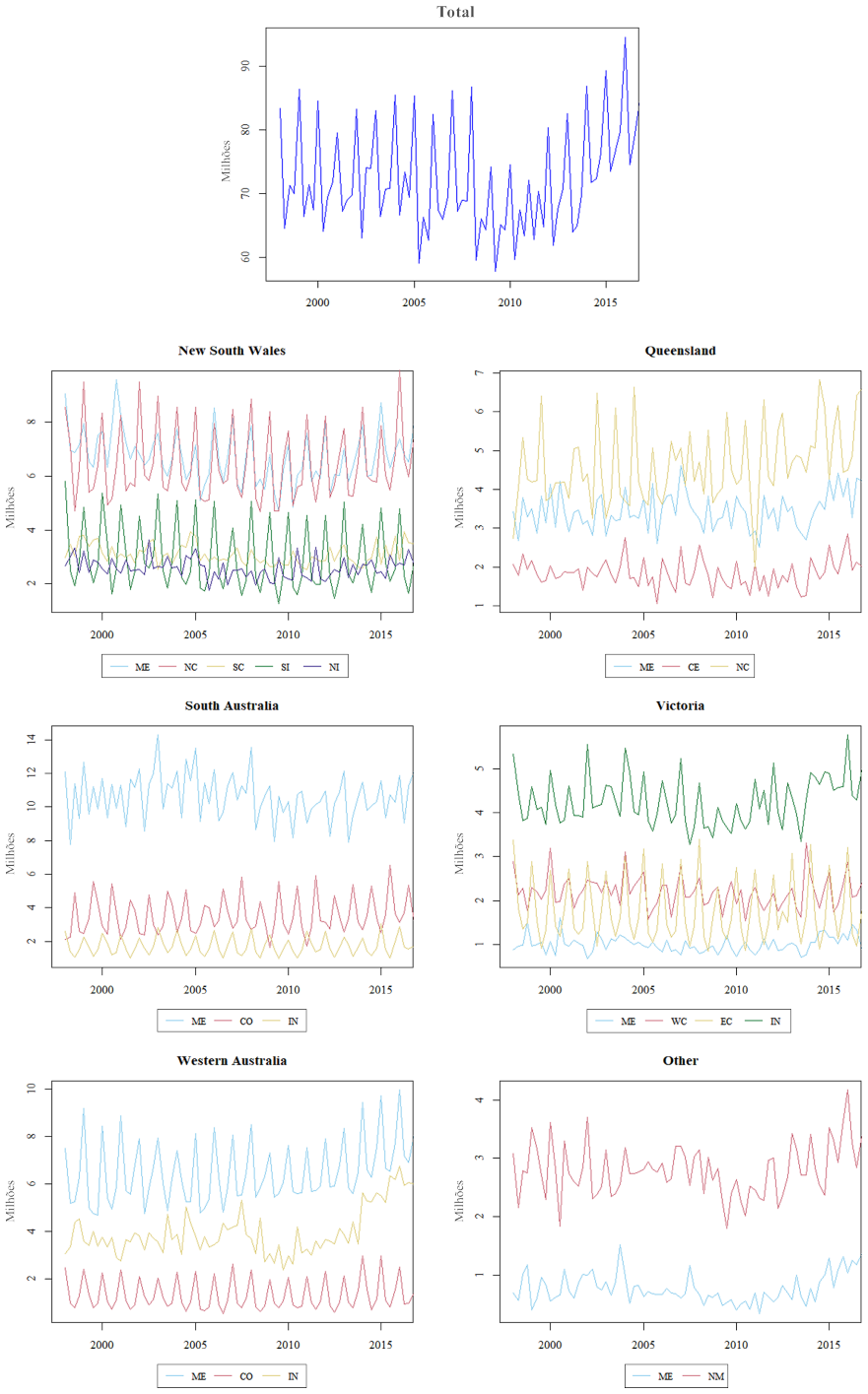

Figura 3: Pernoites fora de casa de residentes australianos no próprio país, em milhões por trimestre: total (primeiro gráfico) e por zonas dentro dos estados (demais gráficos).

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174864
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174864

Os registros históricos para o total de pernoites sugerem uma forte componente sazonal ao longo de todo o período e uma tendência ligeiramente crescente a partir de 2008. Já nas séries mais granulares, as componentes sazonais e as mudanças de nível são as alterações mais notáveis.

3.2. Montagem dos experimentos

Como já adiantado na seção anterior, o período de análise abrange os trimestres entre 1998 e 2016. Para os exercícios empíricos, adotou-se dois horizontes de previsão fixos. Estes correspondem aos últimos oito trimestres e aos últimos doze trimestres disponíveis no conjunto de testes, ou seja, do primeiro trimestre de 2015 ao último trimestre de 2016 ($h = 1 - 8$) e do primeiro trimestre de 2014 ao último trimestre de 2016 ($h = 1 - 12$), respectivamente, conforme mostrado na Figura 4.

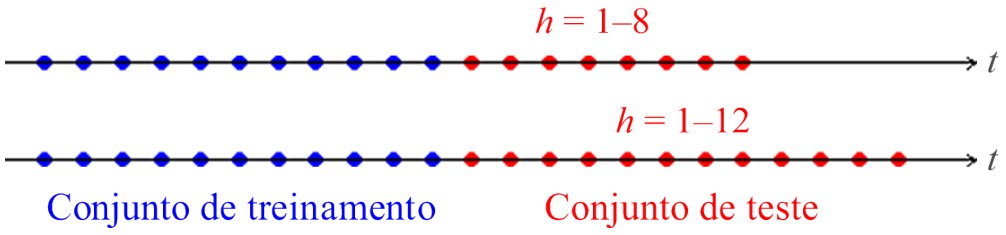

Figura 4: Definindo os conjuntos de treinamento e teste para os experimentos.

3.3. Métricas de avaliação de acurácia

Para se estimar a acurácia das previsões reconciliadas, foram investigadas melhorias em três métricas de avaliação diferentes, apresentadas a seguir.

- Raiz do Erro Médio Quadrático (*Root Mean Squared Error* - RMSE):

$$\sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{h}(y_t - \hat{y}_t)^2}{h}} \tag{14}$$

- Erro Médio Absoluto (*Mean Absolute Error* - MAE):

$$\frac{1}{h}\sum_{t=1}^{h}|y_t - \hat{y}_t| \tag{15}$$

- Erro Médio Absoluto Percentual (*Mean Absolute Percentage Error* - MAPE):

$$\frac{100}{h}\sum_{t=1}^{h}\frac{|y_t - \hat{y}_t|}{|y_t|} \tag{16}$$

Nas equações acima, y_t e $\hat{y}_t$ são os valores reais (observados) e previstos da série subjacente, respectivamente; h é o horizonte de previsão (número de passos à frente).
Dado que várias estratégias de reconciliação são consideradas para gerar previsões para toda a hierarquia, medidas relativas das previsões reconciliadas são obtidas em relação às previsões de base (independentes). A média geométrica dessas medidas relativas para toda a hierarquia fornece

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174864
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174864

um indicador consolidado de melhoria em termos de MAE, RMSE e MAPE. Esses indicadores podem ser obtidos por meio das seguintes equações:

$$AveRelMAE = \sqrt[\#L]{\prod_{i \in L} \frac{MAE_{i,h}^{rec}}{MAE_{i,h}^{base}}} \tag{17}$$

$$AveRelRMSE = \sqrt[\#L]{\prod_{i \in L} \frac{RMSE_{i,h}^{rec}}{RMSE_{i,h}^{base}}} \tag{18}$$

$$AveRelMAPE = \sqrt[\#L]{\prod_{i \in L} \frac{MAPE_{i,h}^{rec}}{MAPE_{i,h}^{base}}} \tag{19}$$

Nas três equações acima, o denominador dentro das raízes quadráticas corresponde à métrica (MAE, RMSE ou MAPE) associada às previsões de base (independentes) geradas para cada série i da hierarquia, no horizonte de previsão h. Já e o numerador dentro das raízes é a métrica obtida para a mesma série e horizonte de tempo após o processo de reconciliação. Para as equações (17)-(19), L é o nível correspondente da hierarquia.
Por fim, para avaliarmos a eventual melhoria percentual em uma determinada métrica, por exemplo, no RMSE, utilizamos $(1 - AveRelRMSE) \times 100$, conforme utilizado em alguns trabalhos recentes na literatura de HTS, como Wickramasuriya et al. [2019] e Wickramasuriya et al. [2020]. O mesmo se aplica ao MAE e ao MAPE.

4. Resultados

A Tabela 1 mostra os percentuais de aprimoramento médios, ponderados por todos os níveis da hierarquia, nas diferentes métricas de avaliação consideradas (colunas) trazidos pela aplicação de cada técnica de reconciliação utilizada (linhas). Tais percentuais representam a melhoria observada nas previsões reconciliadas, em termos de redução de RMSE, MAE ou MAPE, em relação às previsões de base, que foram originadas utilizando-se a metodologia SARIMA (vide Seção 2.3).
Números em **negrito** na Tabela 1 indicam quais métodos forneceram o melhor desempenho de previsão, enquanto os números em *itálico* representam a segunda melhor estratégia de reconciliação. Métricas percentuais com valores menores que zero indicam que a técnica de reconciliação piorou as previsões originais (previsões de base) em termos de acurácia. Com base nos resultados expostos, é possível identificar o potencial da técnica de reconciliação robusta como método de reconciliação de previsões hierárquicas. Independente da métrica de avaliação selecionada, o estimador robusto Huber 1 superou as demais técnicas de reconciliação consideradas.
A técnica de reconciliação resistente por Mínimos Desvios Absolutos (*Least Absolute Deviations* - LAD) também apresentou resultados competitivos, sobretudo quando foi necessária a previsão em um horizonte mais longo, isto é, até 12 passos (trimestres) à frente. Destaca-se também a boa aderência das técnicas de Mínimos Quadrados Ponderados (*Weighted Least Squares*) com escalonamento estrutural (WLS(s)) e a *MinT-Sample*. Por outro lado, as técnicas clássicas da literatura (*benchmarks*) trouxeram pouca contribuição para as previsões de base, no caso do *Bottom-up*, ou até pioraram tais previsões, tornando-as menos acuradas pós-reconciliação - caso das estratégias *Top Down* consideradas.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174864
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174864

Técnica de reconciliação	$h = 1 - 8$			$h = 1 - 12$		
	Percentual de melhoria			Percentual de melhoria		
	RMSE	*MAE*	*MAPE*	*RMSE*	*MAE*	*MAPE*
Estratégias de reconciliação robusta						
Huber 1	**9,56**	**9,53**	**9,08**	**6,68**	**7,45**	**7,41**
Estratégias de reconciliação resistente						
LAD	2,68	2,08	1,41	*5,24*	*6,53*	*6,80*
Estratégias de reconciliação ótima						
WLS(s)	5,48	*6,73*	*6,80*	3,40	3,54	3,32
WLS(v)	0,90	1,44	1,67	1,46	1,70	1,75
MinT-Shrink	1,16	1,67	1,78	3,88	4,19	3,82
MinT-Sample	*6,14*	4,67	2,72	4,63	4,55	2,97
Benchmarks						
Bottom up (BU)	0,10	0,34	0,30	1,68	2,11	2,27
Top Down Gross-Sohl A (TDGSA)	-14,92	-12,09	-13,10	-13,28	-10,95	-10,60
Top Down Gross-Sohl F (TDGSF)	-15,01	-11,88	-12.58	-13,26	-10,77	-10,10

Tabela 1: Melhoria, em pontos percentuais (%), no RMSE, MAE e MAPE em todos os níveis hierárquicos para diferentes horizontes de previsão. Método de previsão base: SARIMA.

5. Conclusões e direções para trabalhos futuros

O presente trabalho buscou avaliar a acurácia de diferentes métodos de reconciliação hierárquica ao aprimorar as previsões de base da demanda trimestral de turismo doméstico na Austrália, medida como o número de noites que os australianos passam fora de casa, mas ainda em solo australiano. Trata-se de um conjunto de séries temporais hierárquicas (HTS) que formam uma estrutura desbalanceada, o que pode, por vezes, comprometer o sistema de ponderação de pesos, causando distorções ao processo de reconciliação. Os exercícios empíricos consideraram múltiplos horizontes de previsão e avaliaram a acurácia das previsões sob a ótica de diferentes métricas de ponderação de erros.

Os métodos de reconciliação pertencentes à classe de estimadores robustos entregaram resultados mais acurados tanto em relação aos métodos tradicionais de previsão hierárquica (*benchmarks*) como em relação a técnicas de reconciliação ótima recém-propostas na literatura. Trata-se de uma sinalização importante para a literatura de previsão de séries temporais, capaz de auxiliar de forma efetiva na tomada de decisão de diferentes partes interessadas, incluindo aqui investidores, representantes de redes hoteleiras e até formuladores de políticas públicas voltadas ao turismo doméstico.

Como possíveis extensões desse trabalho, sugere-se considerar outros métodos univariados de previsão na geração das previsões de base. A combinação de diferentes métodos, seja de forma simples (média aritmética ou mediana do conjunto de previsões) ou por meio de técnicas sofisticadas, como *Boosting* ou *Bagging*, também constitui sugestão para trabalhos futuros.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174864
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174864

Referências

Barrodale, I. e Roberts, F. (1974). Solution of an overdetermined system of equations in the l1 norm [f4]. *Communications of the ACM*, 17(6):319–320.

Box, G. E. P. e Jenkins, G. M. (1970). *Time series analysis: forecasting and control*. Holden Day, San Francisco.

Gross, C. W. e Sohl, J. E. (1990). Disaggregation methods to expedite product line forecasting. *Journal of Forecasting*, 9(3):233–254.

Huber, P. J. (1964). Robust estimation of a location parameter. *Ann. Math. Statist.*, 35(1):73–101.

Hyndman, R. J., Ahmed, R. A., Athanasopoulos, G., e Shang, H. L. (2011). Optimal combination forecasts for hierarchical time series. *Computational Statistics & Data Analysis*, 55(9):2579–2589.

Hyndman, R. J. e Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: principles and practice*. OTexts: Melbourne, Australia, 3 edition. URL `OTexts.com/fpp3`.

Hyndman, R. J., Lee, A. J., e Wang, E. (2016). Fast computation of reconciled forecasts for hierarchical and grouped time series. *Computational statistics & data analysis*, 97:16–32.

Koenker, R. W. e d'Orey, V. (1987). Algorithm as 229: Computing regression quantiles. *Applied statistics*, p. 383–393.

Lila, M. F., Meira, E., e Cyrino Oliveira, F. L. (2022). Forecasting unemployment in Brazil: A robust reconciliation approach using hierarchical data. *Socio-Economic Planning Sciences*, 82: 101298.

Meira, E., Lila, M. F., e Cyrino Oliveira, F. L. (2023). A novel reconciliation approach for hierarchical electricity consumption forecasting based on resistant regression. *Energy*, 269:126794.

Wickramasuriya, S. L., Athanasopoulos, G., e Hyndman, R. J. (2019). Optimal forecast reconciliation for hierarchical and grouped time series through trace minimization. *Journal of the American Statistical Association*, 114(526):804–819.

Wickramasuriya, S. L., Turlach, B. A., e Hyndman, R. J. (2020). Optimal non-negative forecast reconciliation. *Statistics and Computing*, 30(5):1167–1182.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-174864
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/174864