Estudo de Árvore Geradora Mínima com uma modelagem do Algoritmo de Prim em VBA

Rodrigo Celso de Lima Porto[a], Carlos Francisco Simões Gomes[b], Diogo Ferreira de Lima Silva[c]
rodrigo_celso@id.uff.br[a], cfsg1@bol.com.br[b], diogofls@id.uff.br[c]
Departamento de Engenharia de Produção (TEP), Universidade Federal Fluminense
Rua Passo da Pátria 156, Niterói, Rio de Janeiro, Brasil, 24210-240

RESUMO

Dentre os principais problemas de otimização em rede está a obtenção de árvores geradoras mínimas. Dado um grafo ponderado e não direcionado, cujos pesos representam o custo associado a cada aresta, deseja-se encontrar um subgrafo acíclico que contém todos os vértices do grafo original e minimiza o somatório dos custos de modo que as arestas selecionadas conectem todos os nós entre si, havendo sempre um caminho simples de um nó a qualquer outro. O problema retrata várias situações reais, tais como: projeto de rede de telecomunicações com o mínimo custo, projeto de rede de dutos subterrâneos, projeto de uma rede de linhas de transmissão, etc. Dentre as técnicas clássicas usadas para a resolução desses problemas, está o algoritmo de Prim. Este estudo apresenta uma modelagem em VBA para o método e sua aplicação em uma instância do problema discutida previamente na literatura, consistindo na busca da árvore geradora mínima para uma rede óptica de telecomunicações na Itália. Os resultados ilustram a resolução da instância por meio do programa, incluindo as telas expostas para o usuário e as visualizações geradas pelo programa para a árvore geradora encontrada.

PALAVRAS CHAVE. Grafos. Árvore geradora mínima. Algoritmo de Prim, PO em Telecomunicações e Sistemas de Informações

ABSTRACT

Among the main network optimization problems is obtaining minimum spanning trees. Given a weighted and undirected graph, whose weights represent the cost associated with each edge, we want to find an acyclic subgraph that contains all original graph's vertices and minimizes the sum of costs so that the selected edges connect all nodes between itself, allowing there to be always a simple path from one node to any other. The problem portrays several real situations, such as: telecommunication network design with minimum cost, underground pipeline network design, transmission line network design, etc. Among the classical techniques used to solve these problems is Prim's algorithm. This study presents a VBA modeling for the method and its application in an instance of the problem previously discussed in the literature, consisting of the search for the minimum spanning tree for an optical telecommunications network in Italy. The results illustrate the resolution of the instance through the program, including the screens exposed to the user and the views generated by the program for the spanning tree found.

KEYWORDS. Graphs. Minimal spanning tree. Prim's algorithm, OR in Telecommunications and Information Systems

1. Introdução

O problema da árvore geradora mínima (minimal spanning tree) está entre os problemas clássicos de otimização em redes. Nele, deseja-se encontrar a menor ramificação não cíclica dentro de uma rede não orientada. Exemplos de aplicações incluem: otimização de distribuição de sinais de rede, redes de telecomunicação, redes ópticas, projeto de sistemas submersos de dutos, sistemas submersos em campos de petróleo, clustering, projeto de rede de fiação de equipamentos elétricos, dentre outros [Goldbarg & Goldbarg, 2012; Hillier & Lieberman, 2013].

Vários algoritmos foram criados ao longo das últimas décadas para a modelagem do problema da árvore geradora mínima [Goldbarg & Goldbarg, 2012]. Neste trabalho, um método clássico, o algoritmo de Prim [Prim, 1957], é modelado em VBA e aplicado a um problema de rede de telecomunicações. O algoritmo de Prim apresenta uma estratégia gulosa para a inserção de vértices na árvore geradora, de acordo com o custo associado a uma decisão em cada passo. Proposto na década de 50, ainda é estudado e frequentemente utilizado em diversos aplicações, em sua forma clássica e adaptações/varreções [Marpaung & Arnita, 2020; Sanaullah et al., 2020; Sen et al., 2021].

A modelagem em VBA realizada neste estudo considerou a forma clássica do algoritmo. Uma aplicação numérica do algoritmo foi realizada em uma adaptação do trabalho tratado em [Takahashi & Yamakami, 2003], relacionado a um problema de instalação de linhas telefônicas (ou elétricas) entre um conjunto de cidades utilizando a infraestrutura das rodovias com o menor uso de material. No problema tratado por Takahashi e Yamakami [2003], parâmetros fuzzy [Zadeh, 1965] foram utilizados para a sua resolução do problema. Segundo Zadeh [1965], problemas reais nem sempre possuem informações precisas, como é o caso de parâmetros como o tempo e a capacidade dos arcos, que podem ter natureza incerta, sendo possível estudar esses problemas a partir da teoria de sistemas nebulosos, ou sistemas fuzzy. No presente estudo, os parâmetros fuzzy não foram considerados. Nesse caso, considerou-se apenas as distâncias entre as cidades italianas para encontrar a árvore geradora mínima.

Na próxima seção, será apresentado o funcionamento do algoritmo; na seção 3 será apresentado o problema de redes modelado em forma de grafos e a aplicação do algoritmo; a seção 4 conclui o artigo.

2. Apresentação do Algoritmo de Prim

Seja $G(v, a)$ um grafo não orientado correspondendo a um conjunto de m vértices e n arcos, com cada arco possuindo um custo cij, onde $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, m$ são os índices dos vértices vi e vj que o arco ak conecta, onde $k = 1, \dots, n$, a árvore geradora mínima será definida como $A(v, a)$ um subgrafo de $G(v, a)$ que possui a menor ramificação do grafo $G(v, a)$ que conecta todos os seus vértices com os arcos com o menor custo possível, de forma que $A(v, a)$ não seja um grafo cíclico e que seja conexo. Portanto, $A(v) = G(v)$ e $A(a)$ Como $A(v, a)$ se trata de uma árvore, significa que cada uma de suas arestas é uma ponte, isto é, a retirada de um de seus arcos criaria um grafo desconexo em $A(v, a)$.

Para a aplicação do algoritmo, serão necessárias algumas definições:

- $G(v)$ e $A(v)$ correspondem ao conjunto de vértices pertencentes aos grafos $G(v, a)$ e $A(v, a)$, respectivamente;
- $G(a)$ e $A(a)$ correspondem ao conjunto de arcos pertencentes aos grafos $G(v, a)$ e $A(v, a)$, respectivamente;
- Todas as arestas terão custos não-negativos e caso algum par de vértices vi e vj não sejam vizinhos entre si, então $aij = 0$; para cada vértice vi de $G(v, a)$ será atribuído um custo $C(vi)$, que, ao final do algoritmo, corresponderá ao menor custo possível para chegar a vi a partir de um de seus vizinhos em $G(v, a)$;
- Para cada vértice vi de $G(v, a)$ será atribuído uma precedência $P(vi)$, que corresponderá ao vértice vizinho de vi do qual foi gerado o respectivo custo $C(vi)$ para alcançar vi.

Os passos do procedimento são apresentados no Algoritmo 1 enquanto a Figura 1 apresenta o funcionamento dessa abordagem através de um exemplo ilustrativo. Mais detalhes podem ser encontrados em [Goldbarg & Goldbarg, 2012; Hillier & Lieberman, 2013; Prim, 1957].

A árvore geradora mínima é representada pelo último grafo da Figura 1, com todos os vértices em azul. As precedências $P(v)$ dos vértices são úteis para descobrir quais arcos fazem parte da árvore. Somando-se os custos $C(v)$ dos vértices, descobre-se que o custo da árvore obtida equivale a 14.

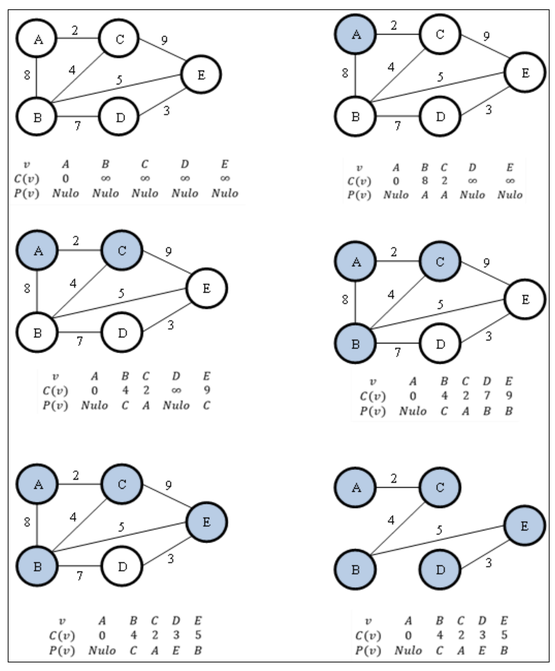
Pode acontecer de um grafo possuir mais de uma árvore geradora mínima, que possuem o mesmo custo mínimo, como foi o caso da rede averiguada neste artigo.

Algoritmo 1: Algoritmo de Prim.

Entrada: um grafo $G(v, a)$.
Saída: a árvore geradora mínima $A(v, a)$.

1: $A(v, a) \leftarrow \emptyset$;
2: **Para cada** $v_i \in G(v)$, com $i = 1, \dots, m$ **faça:**
$C(v_i) \leftarrow \infty$;
$P(v_i) \leftarrow nulo$;
3: Escolhe-se arbitrariamente um vértice $v_i \in G(v)$;
4: $C(v_i) \leftarrow 0$;
5: **Enquanto** $G(v) \neq \emptyset$ **faça:**
Selecione o vértice com o menor custo em $G(v)$;
$v_i \leftarrow menor(G(v))$;
Para cada $j = 1, \dots, m$ **faça**:
Se $a_{ij} \neq 0$ **e** $a_{ij} < C(v_j)$ **então**:
$C(v_j) \leftarrow a_{ij}$;
$P(v_j) \leftarrow v_i$;
$G(v) \leftarrow G(v) - \{v_i\}$;
$A(v) \leftarrow A(v) \cup \{v_i\}$;
6: **Retorne** $A(v, a)$;

Figura 1: Exemplo de Funcionamento do Algoritmo de Prim



3. Estudo de Caso

O caso abordado nesse artigo se trata em buscar a árvore geradora mínima das redes de telecomunicações entre um conjunto de cidades da Itália [Sabella et al., 1998]. Takahashi e Yamakami [2003] e de Sakiyami et al. [2002], que trataram da mesma rede usando abordagens distintas. A Figura 2 apresenta a rede do problema em questão.

O problema foi modelado através de um módulo no VBA, com execução do algoritmo de Prim. Ao executar o algoritmo, o programa retorna uma árvore geradora mínima, solução do problema de otimização em redes, e o tempo de execução do algoritmo. Para uma melhor visualização do usuário, o programa inclui a coloração dos arcos em laranja.

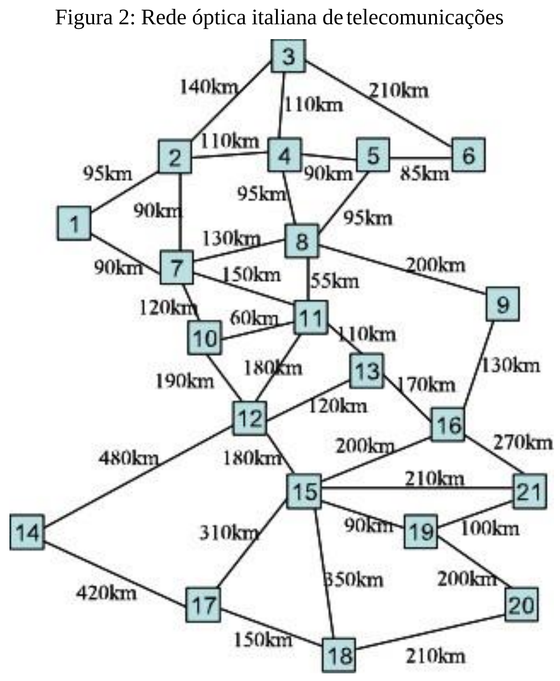
Duas soluções possíveis foram observadas na resolução deste problema, apresentadas na Figura 3. As soluções diferem apenas pela inclusão do arco $a_{5,8}$ na primeira (Figura 3-a) e a do arco $a_{4,8}$ na segunda (Figura 3-b). A solução encontrada depende de qual foi escolhido pelo usuário para inicializar o problema. De toda forma, conforme esperado, as duas árvores apresentam o mesmo custo, representado por uma distância total de 2665 km.

Conforme explicado anteriormente, Takahashi e Yamakami [2003] consideraram incertezas representadas por números *fuzzy* e um algoritmo genético em sua aplicação. Trazendo um comparativo, a Figura 4 e a Tabela 2 apresentam as soluções encontradas por Takahashi e Yamakami [2003], onde custos *fuzzy* são representados por números *fuzzy* triangulares do tipo LR com valor modal igual ao comprimento dos arcos e desvio de 10% em relação a este valor [Takahashi & Yamakami, 2003].

Na Tabela 2, apresentam-se as probabilidades de cada arco pertencer à árvore geradora mínima da rede, que foram calculadas tanto pelo sistema *fuzzy*, que forneceu a solução ótima, quanto pelo algoritmo genético, cuja solução corresponde a 96,04% da solução ótima [Takahashi & Yamakami, 2003]. Na Figura 4 foram destacados os arcos com a probabilidade certa de pertencerem à árvore geradora mínima, e nota-se que a solução encontrada por Takahashi e Yamakami [2003] corresponde exatamente às soluções encontradas pelo VBA do Excel.

Vale ressaltar que, apesar da solução dos autores não corresponder exatamente a uma árvore, uma vez que a retirada dos arcos 8 ou 10 na Figura 10 não criar um grafo desconexo, ela indica que esses arcos possuem probabilidade certa de pertencerem a uma das duas árvores apresentadas na Figuras 3, já que eles correspondem aos arcos $a_{4,8}$ e $a_{5,8}$ da Figura 3, respectivamente.

Figura 2: Rede óptica italiana de telecomunicações



Fonte: [Sakiyama et al., 2002]

Tabela 1: Lista das cidades italianas

Vértice	Cidade
1	Torino
2	Milano
3	Bolzano
4	Verona
5	Venezia
6	Trieste
7	Genova
8	Bolgano
9	Ancona
10	Pisa
11	Firenze
12	Roma
13	Peragia
14	Cagiliari
15	Napoli
16	Pesacara
17	Palermo
18	Catamin
19	Potenza
20	Catanzaro
21	Bari

Fonte: [Sabella et al., 1998; Takahashi & Yamakami, 2003]

Figura 3: Árvores Geradoras Mínimas Obtidas

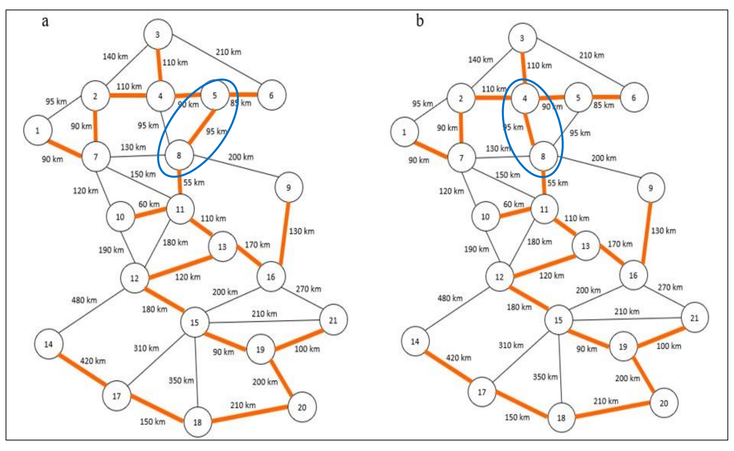
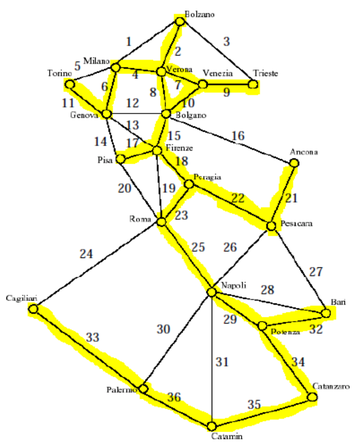


Figura 4: Rede de testes



Fonte: adaptado de Takahashi e Yamakami [2003].

Tabela 2: Grau de probabilidade de cada arco

arco	ótimo	genético	arco	ótimo	genético
01	0,5251	0,5000	19	0,3919	0,3498
02	1,0000	1,0000	20	0,3498	0,2308
03	0,2188	0,0313	21	1,0000	1,0000
04	1,0000	1,0000	22	1,0000	1,0000
05	0,8718	0,8718	23	1,0000	1,0000
06	1,0000	1,0000	24	0,6565	0,6565
07	1,0000	1,0000	25	1,0000	1,0000
08	1,0000	1,0000	26	0,6753	0,5614
09	1,0000	1,0000	27	0,2714	0,2000
10	1,0000	1,0000	28	0,1731	0,0000
11	1,0000	1,0000	29	1,0000	1,0000
12	0,6032	0,5185	30	0,3056	0,2408
13	0,4615	04203	31	0,1404	0,0175
14	0,7674	0,7674	32	1,0000	1,0000
15	1,0000	1,0000	33	1,0000	1,0000
16	0,5550	0,4932	34	1,0000	1,0000
17	1,0000	1,0000	35	1,0000	1,0000
18	1,0000	1,0000	36	1,0000	1,0000

Fonte: Takahashi e Yamakami [2003].

4. Conclusão

Neste trabalho, foram apresentados um estudo sobre o problema de rede óptica de telecomunicações através da aplicação dos conceitos de árvore geradora mínima e a aplicação do algoritmo de Prim para a sua resolução. O problema foi modelado em VBA e ilustrações com o processo de resolução no Excel foram apresentados. O programa é facilmente adaptável para outras situações em que se deseje obter uma árvore geradora (de expansão) mínima e pode ser requisitado via contato com os autores.

Em relação aos resultados, o algoritmo encontra a solução ótima do problema, no entanto, ao custo de simplificar o problema original, que fazia usos de parâmetros fuzzy. Portanto, no intuito de estudar o problema usando parâmetros que mais se aproximem da realidade, recomenda-se para trabalhos futuros um estudo mais aprofundado sobre esse tema, que preferencialmente evite de desconsiderar parâmetros relevantes que possam afetar a sua solução ótima.

No entanto, apesar da simplificação, foi visto que a árvore encontrada para a rede coincide com o subgrafo encontrado por Takahashi e Yamakami [2003], indicando uma excelente convergência entre as duas soluções, apesar de fazerem uso de métodos distintos.

5. Referências

Goldbarg, M. C., Goldbarg, E. (2012). Grafos : conceitos, algoritmos e aplicações. Elsevier. Hillier, F. S., Lieberman, G. J. (2013). Introdução à pesquisa operacional (9th ed.). AMGH.

Marpaung, F., Arnita. (2020). Comparative of prim's and boruvka's algorithm to solve minimum spanning tree problems. Journal of Physics: Conference Series, 1462(1), 012043. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1462/1/012043

Prim, R. C. (1957). Shortest Connection Networks And Some Generalizations. Bell System Technical Journal, 36(6), 1389–1401. https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1957.tb01515.x

Sabella, R., Iannone, E., Listanti, M., Berdusco, M., Binetti, S. (1998). Impact of transmission performance on path routing in all-optical transport networks. Journal of Lightwave Technology, 16(11), 1965–1972. https://doi.org/10.1109/50.730357

Sakiyama, N., Nagata, A., Matsuda, T., Yamamoto, M. (2002). Dynamic Routing and Wavelength Assignment with Power Consideration in WDM Networks. Conference on Optical Internet and Photonics in Switching, 152–154.

Sanaullah, K., Xia, M., Hussain, M., Hussain, S., Tahir, A. (2020). Optimal islanding for restoration of power distribution system using Prim's MST algorithm. CSEE Journal of Power and Energy Systems. https://doi.org/10.17775/CSEEJPES.2020.01580

Sen, A., Roy, S., Basu, K., Adeniye, S., Choudhuri, S., Pal, A. (2021). Optimal Cost Network Design for Bounded Delay Data Transfer from PMU to Control Center. 2021 IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM), 1–6. https://doi.org/10.1109/GLOBECOM46510.2021.9685580

Takahashi, M. T., Yamakami, A. (2003). Um estudo sobre árvore geradora mínima com parâmetros fuzzy. Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional.

Zadeh, L. a. (1965). Fuzzy sets. Information and Control, 8(3), 338–353. https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X

https://proceedings.science/p/157876?lang=pt-br