

Dissertação: Biased Random-Key Genetic Algorithms for the Minimum Broadcast Time Problem

Alfredo Lima, Bruno Nogueira, Rian G. S. Pinheiro

Instituto de Computação – Universidade Federal de Alagoas

Av. Lourival Melo Mota, S/N, Tabuleiro do Martins, Maceió - AL, CEP 57072-900

{alfredolms,bruno,rian}@ic.ufal.br

RESUMO

O MINIMUM BROADCAST TIME (MBT) é um conhecido problema de disseminação de dados cujo objetivo é encontrar um esquema de transmissão que minimize o número de passos necessários para executar uma operação de *broadcasting*. O WEIGHTED MINIMUM BROADCAST TIME (WMBT) é uma generalização do MBT, em que cada transmissão tem um custo associado. Este trabalho propõe uma série de novas contribuições para o MBT e WMBT, incluindo: (i) *Biased Random-Key Genetic Algorithms* (BRKGAs) para ambos os problemas, (ii) uma *matheuristic* para o MBT, (iii) modelos de programação linear inteira para o WMBT, (iv) algoritmos para calcular um limite inferior para o MBT e WMBT, (v) uma regra de redução de instâncias para o WMBT e (vi) métodos para criar instâncias com ótimos conhecidos para o MBT e WMBT. Essas contribuições foram comparadas aos métodos do estado-da-arte, e os resultados demonstram a eficiência e aplicabilidade dos métodos propostos.

PALAVRAS CHAVE. Otimização combinatória, *Minimum Broadcast Time*, Meta-heurísticas, *Biased Random-Key Genetic Algorithms*.

Otimização Combinatória. Meta-heurísticas.

ABSTRACT

The MINIMUM BROADCAST TIME (MBT) is a well-known data dissemination problem whose objective is to find a transmission scheme that minimizes the number of steps needed to perform a *broadcasting* operation. WEIGHTED MINIMUM BROADCAST TIME (WMBT) is a generalization of the MBT, where each transmission has an associated cost. This work showed a series of new contributions to MBT and WMBT: (i) Biased Random-Key Genetic Algorithms (BRKGAs) for both problems, (ii) a *matheuristic* for MBT, (iii) integer linear programming models for the WMBT, (iv) algorithms to calculate a lower bound for the MBT and WMBT, (v) reduction rules for instances of the WMBT, and (vi) methods to create instances with known optima for the MBT and WMBT. These contributions were compared with state-of-the-art methods and experimental results have demonstrated the efficiency and applicability of the proposed methods.

KEYWORDS. Combinatorial Optimization, Minimum Broadcast Time, Metaheuristics, Biased Random-Key Genetic Algorithms.

Combinatorial Optimization. Metaheuristics

1. Introdução

O *broadcasting* é um processo no qual um ou mais nós da rede detêm uma informação que precisa ser enviada para os demais nós [Hedetniemi et al., 1988]. Em específico, este trabalho foca no problema conhecido como MINIMUM BROADCAST TIME (MBT) [Garey e Johnson, 1979] e o WEIGHTED MINIMUM BROADCAST TIME (WMBT) [Harutyunyan e Kamali, 2008; Su et al., 2011; Lima, 2021]. No MBT/WMBT, existe um conjunto de nós chamado de nós fontes (V_0), os quais possuem a informação a ser disseminada na rede. Cada nó deve enviar a informação aos seus vizinhos imediatos que ainda não a receberam. Os nós que recebem a informação passam a ser emissores. Esse processo se repete até que todos na rede detenham a informação, respeitando as seguintes restrições: (i) o nó detém a informação se for um nó fonte ou se recebeu a informação anteriormente, (ii) qualquer nó pode enviar a informação para no máximo um vizinho por vez. Em particular, no WMBT, os nós estão associados a um tempo interno de processamento, o qual determina um tempo de atraso para que o nó possa transmitir aos demais. Além disso, no WMBT, os tempos de transmissão não são uniformes.

A seguir será apresentado um exemplo do WMBT. A Figura 1 em conjunto com as Tabelas 1-2 exemplificam um cenário simples do WMBT. Neste exemplo, $V_0 = \{g_1\}$ representa um conjunto de *gateways* de rede, enquanto $V \setminus V_0 = \{d_1, d_2, d_3\}$ um conjunto de dispositivos comuns na rede. É possível encontrar duas soluções, uma viável (Figura 2) e a outra ótima (Figura 3). Em ambas figuras, um vértice com um círculo tracejado indica que o vértice ainda não pode transmitir a mensagem. Um vértice com um círculo completo indica que ele pode transmitir. Uma aresta tracejada indica uma possível transmissão que pode acontecer no instante t , e uma aresta completa indica que a transmissão já ocorreu. Um arco em uma aresta tracejada indica que uma transmissão está ocorrendo, enquanto em um arco completo indica que a transmissão finalizou no instante t .

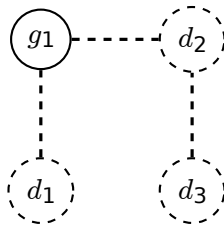


Figura 1: Cenário da rede.

Vértices	g_1	d_1	d_2	d_3
Pesos	1	0	2	1

Tabela 1: Pesos dos vértices.

Arestas	(g_1, d_1)	(g_1, d_2)	(d_2, d_3)
Pesos	7	2	1

Tabela 2: Pesos das arestas.

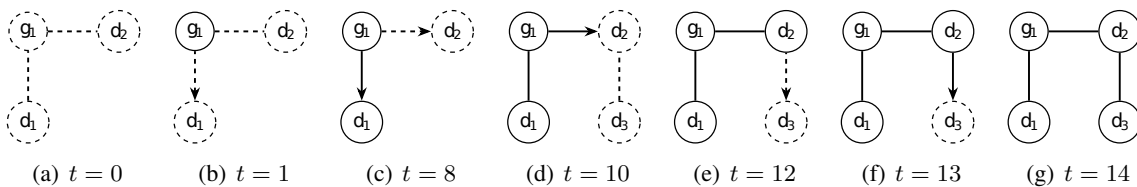


Figura 2: Solução viável.

No exemplo anterior, caso o peso dos vértices fossem removidos e as arestas tivessem peso unitário, o problema se reduziria ao MBT. Neste caso, as soluções viável e ótima ficam semelhantes às Figuras 2 e 3, porém com tempo de transmissão igual 3 e 2, respectivamente.

Formalmente, o MBT é apresentado da seguinte maneira [Garey e Johnson, 1979]. Dado um grafo não direcionado $G = (V, A, V_0)$, em que V é o conjunto dos vértices, A ($A \subset V \times V$)

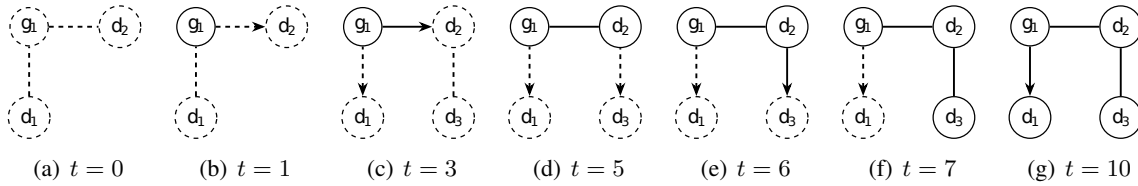


Figura 3: Solução ótima.

o conjunto das arestas, e V_0 ($V_0 \subseteq V$) é conjunto dos nós fontes. O tempo total de transmissão é definido por T , a discretização do tempo é t ($1 \leq t \leq T_{max}$), em que T_{max} ($T \leq T_{max}$) é um limite superior para o tempo de transmissão, além de t , T e $T_{max} \in \mathbb{N}$. Cada conjunto V_t ($V_{t-1} \subseteq V_t$) representa os nós que possuem o dado no tempo t , e cada A_t ($A_t \subseteq A$) as transmissões que acontecem no instante t , com $0 \leq t \leq T_{max}$. O problema tem como objetivo transmitir os dados do conjunto V_0 para V no menor tempo possível. Em outras palavras, encontrar uma sequência $V_0, A_1, V_1, A_2, \dots, A_T, V_T$, minimizando T e garantindo que $V_T = V$. Além disso, para cada t tem-se que: (i) cada aresta em A_t possui exatamente um extremo em V_{t-1} , (ii) nenhum par de arestas em A_t compartilha um vértice comum, e (iii) $V_t = V_{t-1} \cup \{v : (u, v) \in A_t\}$.

O MBT/WMBT possui diversas aplicações em sistemas distribuídos, mais especificamente em Internet das Coisas (IoT), Redes de Sensores Sem Fio (WSNs), redes de satélites, *direct memory access* (DMA) e Indústria 4.0 [Bucantanschi et al., 2007; Ivanova, 2019; Lazard, 1992]. Outras aplicações podem ser encontradas em Lima et al. [2022].

Devido a grande aplicabilidade, ambos os problemas têm recebido grande atenção da comunidade científica ao longo dos anos. Em particular, o MBT foi catalogado na lista clássica de problemas $\mathcal{NP}$ -completo de Garey e Johnson [1979, problema ND49], e a sua prova pode ser encontrada em Jansen e Müller [1995]. Na literatura, é possível encontrar algoritmos exatos [de Sousa et al., 2018; Ivanova, 2019], aproximativos e heurísticos [Hoelting et al., 1996; Hasson e Sipper, 2004; de Sousa et al., 2018] para o MBT, além casos particulares que existem algoritmos polinomiais [Slater et al., 1981; Jansen e Müller, 1995]. Para o WMBT com pesos apenas nas arestas, existem algoritmos polinomiais para árvores [Su et al., 2011]. Para a versão com pesos nos vértices do WMBT, existe uma heurística construtiva e um algoritmo evolucionário [Harutyunyan e Kamali, 2008]. O primeiro trabalho que considera pesos tanto nos vértices quanto nas arestas é na dissertação de Lima [2021].

Este trabalho apresenta uma série de novas contribuições para o MBT e WMBT. Essas contribuições resultaram na confecção de quatro artigos científicos, dos quais três deles já foram publicados: (i) Lima et al. [2020] (SBPO), (ii) Lima et al. [2022] (ITOR, periódico Qualis A1) (iii) Lima et al. [2022] (WBCI). O quarto artigo está submetido no periódico *Networks* (Qualis A3).

2. Contribuições e resultados

Esta seção detalha, de maneira resumida, as diversas contribuições e os resultados que foram produzidos durante o período do mestrado. Vale ressaltar que as informações completas sobre o ambiente de desenvolvimento, testes, instâncias, códigos fontes, provas de corretude e parâmetros dos algoritmos propostos estão incluídos na dissertação de mestrado do autor [Lima, 2021].

Para o MBT as contribuições são: (i) um novo algoritmo para cálculo de *lower bound*, (ii) duas meta-heurísticas, (iii) uma *matheuristic*, e (iv) uma metodologia para criação de instâncias com o ótimo conhecido. Essas contribuições são apresentadas nos artigos Lima et al. [2020, 2022]. Para o WMBT as contribuições são: (i) três modelos de ILP para o WMBT, (ii) um novo algoritmo

para cálculo de *lower bound*, (iii) regra de redução de instâncias, (iv) duas meta-heurísticas, e (v) uma metodologia para criação de instâncias com o ótimo conhecido. Parte dessas contribuições estão aceitas, a restante está em fase de revisão.

2.1. Formulações matemáticas para o WMBT

Em Lima [2021], são apresentados modelos ILP (*integer linear programming*) para três variantes do WMBT. Até onde os autores conhecem, não existem na literatura algoritmos/modelos exatos para nenhuma versão do WMBT. Esses modelos foram baseados no modelo para o MBT apresentado em de Sousa et al. [2018]. Nos modelos propostos são adicionadas restrições ao modelo original de de Sousa et al. [2018] para considerar os pesos dos vértices e das arestas.

2.2. Limites inferiores para o MBT e WMBT

Em Lima et al. [2022] é apresentado um algoritmo para calcular um novo limite inferior para o MBT. Pois, o limite inferior O algoritmo foi chamado de $LBB-BFS$, e é baseado em uma busca em largura (BFS) a partir de várias fontes (começando em cada vértice de V_0). Este método encontra o caminho mais curto máximo entre um vértice não-fonte e sua fonte mais próxima. O tempo de execução do pior caso do algoritmo $LBB-BFS$ é $O(|E|)$.

A Tabela 3 descreve a comparação das versões do ILP do de Sousa et al. [2018]: (i) sem *bounds*, (ii) com somente *lower bound*, (iii) com somente *upper bound*¹, e (iv) com ambos *bounds*. A primeira coluna indica a forma de avaliação, e as demais os algoritmos avaliados. As formas de avaliação foram: (i) '# Melhor' que enumera a quantidade de vezes que encontrou a melhor solução, e (ii) 'Tempo médio (s)' que indica o tempo médio em segundos para encontrar a melhor solução das instâncias consideradas.

Tabela 3: Comparação dos ILPs nos grafos de Harary.

Avaliação	ILP de de Sousa et al. [2018]			
	Sem <i>bounds</i>	<i>Lower bound</i>	<i>Upper bound</i>	Com <i>lower</i> e <i>upper bounds</i>
# Melhor	16	16	16	16
Tempo médio (s)	512.19	159.30	684.12	0.09

Para o WMBT, Harutyunyan e Kamali [2008] propuseram um limite inferior dado por $d + (d + 1) \cdot w_{min}$, em que d é a distância máxima das fontes para outros vértices e w_{min} é $\min_{v \in V}(W_v(v))$. Em Lima [2021], é apresentado um outro limite inferior para o WMBT. O limite proposto denominado $LBB-Dijkstra$. Ele é similar ao $LBB-BFS$, porém no lugar do BFS é utilizado uma adaptação do algoritmo de Dijkstra considerando tanto pesos nas arestas quanto nos vértices. O tempo de execução do pior caso do algoritmo $LBB-Dijkstra$ é $O(|V| + |E| \cdot \log |V|)$. Observe, no entanto, que o limite em Harutyunyan e Kamali [2008] considera que os pesos nas arestas são unitários. Ao invés disso, $LBB-Dijkstra$ é mais flexível e considera pesos não unitários nas arestas.

2.3. Meta-heurísticas

Devido a complexidade computacional intrínseca do MBT/WMBT, o uso de abordagens baseadas em meta-heurísticas é justificado. Em Lima [2021] são apresentadas quatro *Biased Random-Key Genetic Algorithm* (BRKGAs): dois para o MBT (BRKGA_FRFS e BRKGA) e outros dois para o WMBT (BRKGA-MSF e BRKGA-DJ).

O BRKGA_FRFS foi baseado no princípio de que o primeiro vértice que receber o dado, será o primeiro que enviará. Ele utiliza os valores do cromossomo do BRKGA para ranquear

¹O *upper bound* foi calculado utilizando a meta-heurística BRKGA_FRFS, a qual será descrita na Seção 2.3.

suas possíveis transmissões em um dado momento. Já o BRKGA, além de ter o mesmo sistema de decodificação que o BRKGA_FRFS, é acrescentado o refinamento chamado de SCHA² ao final do processo, assim melhorando o tempo transmissão. Ambos decodificadores têm no pior caso a complexidade $O(|V| \cdot |E|)$.

A Tabela 4 descreve a comparação do BRKGA_FRFS com ILP de de Sousa et al. [2018] (*lower e upper bounds*) e com meta-heurística de colônia de formiga (ACS) proposto por Hasson e Sipper [2004] em 101 instâncias. Esses experimentos foram realizados em instâncias mais difíceis – maior quantidade de vértices –, incluindo as instâncias sintéticas descritas na Seção 2.6. Semelhante a Tabela 3, a primeira coluna indica a forma de avaliação, e as demais os algoritmos avaliados. As formas de avaliação também são semelhantes, no entanto, tem mais um tipo de avaliação ‘# Melhor média’, o qual indica a quantidade de vezes que sua média de soluções foi a melhor. Note que o BRKGA_FRFS performou melhor tanto em qualidade quanto no tempo.

Tabela 4: Comparação do BRKGA_FRFS com ILP e ACS.

Avaliação	ACS	ILP	BRKGA_FRFS
# Melhor	41	61	85
# Melhor média	30	61	78
Tempo médio (s)	41.23	1742.87	18.18

Para o WMBT, não foi possível adaptar os decodificadores BRKGA_FRFS e BRKGA, pois eles não conseguem representar todo espaço de solução do WMBT, assim, foi necessário elaborar novas estratégias. Os algoritmos propostos para o WMBT BRKGA-MSF e BRKGA-DJ inicialmente geram uma árvore e em seguida aplicam o algoritmo WSCHA³ como função de avaliação. O algoritmo BRKGA-MSF adota um algoritmo de árvore geradora mínima para decodificar as soluções, já o BRKGA-MSF usa um algoritmo de caminho mínimo multi-fonte. Ambos decodificadores têm no pior caso complexidade $O(|E| \cdot \log |E|)$.

A Tabela 5 apresenta uma comparação entre BRKGA-DJ, BRKGA-MSF, ACS-WSCHA⁴, e HARUTYUNYAN-WSCHA⁵ em 40 instâncias. Note que as meta-heurísticas BRKGA-DJ e BRKGA-MSF performaram melhor em relação as demais técnicas, porém não existem evidências suficientes para indicar qual dos BRKGAs propostos é o melhor.

Tabela 5: Comparação entre as meta-heurísticas e HARUTYUNYAN-WSCHA para o WMBT.

Avaliação	BRKGA-DJ	BRKGA-MSF	HARUTYUNYAN-WSCHA	ACS-WSCHA
Média temporal (s)	86.13	88.53	0.1	300
# Melhor	36	38	25	0
# Melhor média	32	36	25	0

2.4. Matheuristic para o MBT

A *matheuristic* para o MBT utiliza um BRKGA e o ILP do de Sousa et al. [2018]. Primeiro, a *matheuristic* usa o BRKGA para construir um conjunto de soluções candidatas. E após algumas iterações do BRKGA sem que haja melhoria na população atual, a *matheuristic* inicia um processo de união dessas soluções. E este processo gera um subgrafo que contém todos os vértices

² Algoritmo polinomial para encontrar o MBT em árvores, baseado na propriedade descrita em Slater et al. [1981].

³ Adaptação do SCHA para o WMBT.

⁴ Adaptação e aprimoramento do ACS [Hasson e Sipper, 2004] para o WMBT.

⁵ Adaptação e aprimoramento do algoritmo de Harutyunyan e Kamali [2008] para o WMBT.

da instância original, mas somente algumas arestas de boas soluções. Em seguida, a *matheuristic* utiliza o modelo ILP do de Sousa et al. [2018] para resolver a instância do problema induzida por estas arestas. Observe que resolver a instância do problema induzido é mais fácil do que resolver a instância original, pois é fornecido uma solução inicial, e um valor mais apertado de limite superior, além do grafo induzido ter um número menor de arestas. Se a solução obtida através do modelo ILP do de Sousa et al. [2018] for melhor que a melhor solução do conjunto, então ela adicionada ao conjunto de soluções e alguma outra solução é removida.

A Tabela 6 descreve a comparação entre os BRKGAs e suas versões híbridas com o ILP [de Sousa et al., 2018] em 101 instâncias. Esse experimento foi realizado em todas instâncias descrita em Lima [2021]. Note que as *matheuristics* performaram tanto qualidade quanto no tempo para encontrar uma boa solução, além de encontrar novas melhores soluções.

Tabela 6: Comparação dos BRKGAs para o MBT.

Avaliação	BRKGA_FRFS	BRKGA	BRKGA_FRFS+ILP	BRKGA+ILP
# Melhor	69	85	78	96
# Melhor média	18.98	9.98	12.24	5.69
Tempo médio (s)	84	92	94	99

2.5. Regra de redução para o WMBT

Em Lima [2021] foi proposta uma regra de redução de instâncias para melhorar o desempenho de algoritmos para o WMBT. A ideia principal é reduzir o espaço de busca removendo arestas que não pertencem a nenhuma solução ótima. Seja $e = uv$ uma aresta de A , $lb(v)$ uma função que encontra o limite inferior do vértice v , e que $lb(u) \leq lb(v)$, se $lb(u) + W_v(v) + W_e(e) > WMBT(G, V_0)$, então é possível remover e de G , pois, ela nunca fará parte da solução ótima. Este algoritmo foi chamado de *ReducingRules*.

A Tabela 7 descreve a comparação dos BRKGAs com e sem o *ReducingRules* em 10 instâncias. Note que com *ReducingRules*, o tamanho dos grafos diminuíram, assim as meta-heurísticas conseguiram diminuir o tempo para encontrar soluções melhores.

Tabela 7: Comparação dos meta-heurísticas com e sem *ReducingRules* para o WMBT.

Avaliação	Sem <i>ReducingRules</i>		Com <i>ReducingRules</i>	
	BRKGA-DJ	BRKGA-MSF	BRKGA-DJ	BRKGA-MSF
# Melhor	8	8	9	10
# Melhor média	7	8	8	8
Tempo médio (s)	189.65	140.93	115.68	113.39

2.6. Construção de instâncias

Na literatura do MBT e WMBT [de Sousa et al., 2018; Harutyunyan e Kamali, 2008; Hasson e Sipper, 2004], normalmente são utilizados grafos aleatórios para validação dos algoritmos, além de de alguns casos particulares como: (i) hipercubo, (ii) *shuffle exchange*, (iii) *cube-connected cycles*, (iv) grafos de Bruijn, e (v) grafos de Harary. No entanto, não existe catalogação do valor ótimo para estes grafos. Assim, uma contribuição adicional do trabalho foi criar uma estratégia para criar um novo *benchmark* com soluções ótimas conhecidas.

2.6.1. Instâncias para o MBT

Se o valor do MBT de uma instância qualquer for k , então a árvore de solução é uma árvore binominal B_k ou um subgrafo da árvore binominal B_k [Ivanova, 2019]. A partir dessa afirmação, foi desenvolvida uma estratégia simples para construção de instâncias. Primeiro, é gerada uma árvore binominal B_k , a qual possui MBT igual a k , e em seguida é feita a união desta árvore binominal com um grafo aleatório qualquer. Esta metodologia de criação de instâncias pode ser observada nas Figura 4. A metodologia pode ser aplicada para criar instâncias sintéticas com múltiplas fontes ($|V_0| > 1$).

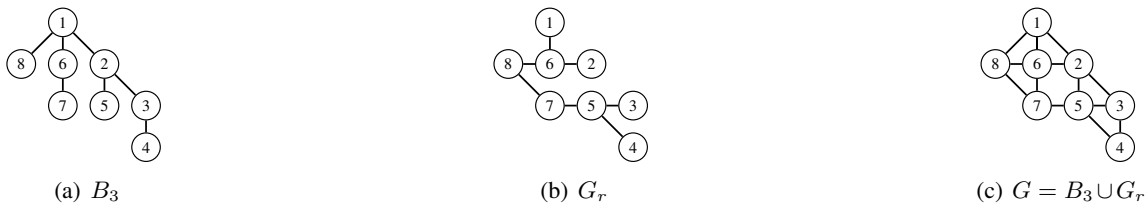


Figura 4: Criação de uma instância sintética, $V_0 = \{1\}$.

2.6.2. Instâncias para o WMBT

Para o WMBT a estratégia foi semelhante, ou seja, a união de uma árvore e um grafo aleatório. No entanto, para o WMBT pode ser uma árvore qualquer⁶. Seja $T = (V_T, E_T, v_0, W_v, W_e)$ uma árvore ponderada enraizada em v_0 , $G_r = (V_{G_r}, E_{G_r})$ um grafo aleatório com $V_{G_r} = V_T$ e $B(T, v)$ uma função que indica o WMBT do vértice v da árvore T . Então para toda aresta $e = uv \in E_{G_r} \setminus E_T$ é atribuído um valor maior $|B(T, v) - B(T, u)|$ de custo na união.

3. Conclusão

O problema MINIMUM BROADCAST TIME (MBT) e sua variante WEIGHTED MINIMUM BROADCAST TIME (WMBT) consistem em minimizar o tempo de disseminação de uma mensagem para todos os nós de uma rede a partir de um conjunto de nós fonte. Ambos os problemas possuem diversas aplicações práticas e por este motivo vêm recebendo bastante atenção nos últimos anos. Conforme apresentado aqui, a dissertação de mestrado [Lima, 2021] propôs diversas contribuições importantes para o MBT/WMBT, como métodos exatos, meta-heurísticas, limites inferiores, método de redução de instâncias e novas instâncias. Estas contribuições foram comparadas aos métodos do estado-da-arte para os problemas e os resultados demonstram que os métodos propostos são promissores. O trabalho gerou quatro artigos científicos, dos quais três já foram aceitos em conferências/periódicos de grande prestígio na comunidade de pesquisa operacional (o quarto artigo está em revisão).

Como trabalho futuro, estender e aplicar as contribuições para resolver os seguintes problemas correlatos: (i) MBT e WMBT com no máximo k transmissões (k -broadcast) [Lazard, 1992], e (ii) *Freeze-Tag Problem* [Bucantanschi et al., 2007]. Além de desenvolver algoritmos distribuídos para o MBT e WMBT e comparar com estas contribuições.

⁶Com o algoritmo WSCHA é possível calcular o tempo que cada vértice recebe a informação.

Referências

- Bucantanschi, D., Hoffmann, B., Hutson, K. R., e Kretchmar, R. M. (2007). *A Neighborhood Search Technique for the Freeze Tag Problem*, p. 97–113. Springer US, Boston, MA. ISBN 978-0-387-48793-9. URL https://doi.org/10.1007/978-0-387-48793-9_7.
- de Sousa, A., Gallo, G., Gutierrez, S., Robledo, F., Rodríguez-Bocca, P., e Romero, P. (2018). Heuristics for the minimum broadcast time. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 69:165–172. URL <https://doi.org/10.1016%2Fj.endm.2018.07.022>.
- Garey, M. R. e Johnson, D. S. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman & Co., USA. ISBN 0716710447.
- Harutyunyan, H. A. e Kamali, S. (2008). Efficient broadcasting in networks with weighted nodes. In *2008 14th IEEE International Conference on Parallel and Distributed Systems*, p. 879–884.
- Hasson, Y. e Sipper, M. (2004). A novel ant algorithm for solving the minimum broadcast time problem. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-540-30217-9.
- Hedetniemi, S. M., Hedetniemi, S. T., e Liestman, A. L. (1988). A survey of gossiping and broadcasting in communication networks. *Networks*, 18(4):319–349.
- Hoelting, C. J., Schoenefeld, D. A., e Wainwright, R. L. (1996). A genetic algorithm for the minimum broadcast time problem using a global precedence vector. ISBN 0897918207.
- Ivanova, M. (2019). *Optimization Problems in Communication Networks and Multi-Agent Path Finding*. PhD thesis, The University of Bergen.
- Jansen, K. e Müller, H. (1995). The minimum broadcast time problem for several processor networks. *Theoretical Computer Science*, 147(1):69 – 85. ISSN 0304-3975.
- Lazard, E. (1992). Broadcasting in dma-bound bounded degree graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 37-38:387 – 400. ISSN 0166-218X.
- Lima, A. (2021). *Biased Random-Key Genetic Algorithms for the Minimum Broadcast Time Problem*. Master dissertation, Universidade Federal de Alagoas.
- Lima, A., Aquino, A. L. L., Nogueira, B., e Pinheiro, R. G. S. (2022). A matheuristic approach for the minimum broadcast time problem using a biased random-key genetic algorithm. *International Transactions in Operational Research*. URL <https://doi.org/10.1111/itor.13146>.
- Lima, A., Ochi, L., Nogueira, B., e Pinheiro, R. (2022). Um modelo de programação matemática para o problema weighted minimum broadcast time. In *Anais do III Workshop Brasileiro de Cidades Inteligentes*, p. 61–70, Porto Alegre, RS, Brasil. SBC.
- Lima, A., Pinheiro, R., Nogueira, B., e Peixoto, R. (2020). Algoritmo genético de chaves aleatórias viciadas para o problema do tempo de transmissão mínimo. *Anais do LIV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*.
- Slater, P. J., Cockayne, E. J., e Hedetniemi, S. T. (1981). Information dissemination in trees. *SIAM Journal on Computing*, 10(4):692–701.
- Su, K., Li, J., e Fu, H. (2011). Smart city and the applications. In *2011 International Conference on Electronics, Communications and Control (ICECC)*, p. 1028–1031.