k-independência em grafos P_4-esparsos

Márcia R. Cappelle
Instituto de Informática, Universidade Federal de Goiás
Goiânia, GO, Brazil
marcia@inf.ufg.br

Luan César Dutra Carvalho
Instituto de Informática, Universidade Federal de Goiás
Goiânia, GO, Brazil
luan_cesar@discente.ufg.br

RESUMO

Um conjunto $S \subseteq V(G)$ de um grafo G é k-independente se cada um de seus vértices é adjacente a no máximo $k-1$ vértices do conjunto S, onde $k \in \mathbb{Z}^+$. O número de k-independência é a cardinalidade de um maior conjunto k-independente em um grafo G. Determinar o número de k-independência é um problema NP-difícil para grafos gerais. Apresentamos fórmulas fechadas para o número de k-independência em grafos P_4-esparsos em termos do número de k-independência de seus fatores e apresentamos um algoritmo de tempo polinomial que retorna o número de k-independência de um grafo P_4-esparso.

PALAVRAS CHAVE. **k-independência, grafos P_4-esparsos, cografos.**

Teoria e Algoritmos em Grafos (TAG)

ABSTRACT

A set $S \subseteq V(G)$ of a graph G is k-independent if every vertex in S has at most $k-1$ neighbors in S, where $k \in \mathbb{Z}^+$. The k-independence number is the cardinality of a maximum k-independent set of a graph G. Determining the k-independence number is an NP-hard problem for general graphs. We present closed formulas for the k-independence number of P_4-sparse graphs in terms of the number of k-independence of their factors, and we present a polynomial-time algorithm that returns the k-independence number of a P_4-sparse graph.

KEYWORDS. **k-independence, P_4-sparse graphs, cographs.**

Theory and Algorithms in Graphs (TAG)

https://proceedings.science/p/157622?lang=pt-br

1. Introdução

Um *grafo simples* $G = (V(G), E(G))$ é formado pelo par ordenado de conjuntos $V(G)$ e $E(G)$, onde $V(G)$ é um conjunto não vazio de vértices (ou nós) e $E(G)$ um conjunto de pares não ordenados de elementos de $V(G)$ chamados de arestas. Um *conjunto dominante* $D \subseteq V(G)$ é tal que todo vértice que não está contido em D é adjacente a pelo menos um membro de D. Um *conjunto independente* $S \subseteq V(G)$ é tal que os vértices em S são dois a dois não adjacentes. Um conjunto independente S é *maximal* se é um conjunto dominante e *máximo* se tem a maior cardinalidade possível. O *número de independência* de um grafo G, denotado por $\alpha(G)$, é a cardinalidade máxima de um conjunto independente de G.

Karp [1972] provou que decidir se um grafo G tem um conjunto independente de cardinalidade ℓ é um problema NP-completo. Em 1985, Fink e Jacobson [1985b,a] apresentaram uma generalização dos conjuntos independentes clássicos, chamada de k-independência, onde $k \in \mathbb{Z}^+$. Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é *k-independente* se todo vértice do subgrafo induzido por S possui grau menor do que k. Sua cardinalidade máxima, denotada por $\alpha_k(G)$, é chamada de *número de k-independência* de G. Em particular, $\alpha_1(G) = \alpha(G)$ é o número de independência clássico de G. Veja na Figura 1 exemplos de conjuntos k-independentes para $k = 1, 2$. Jacobson e Peters [1989] mostraram que o problema de determinar α_k de um grafo G qualquer pertence à classe NP-completa. Diversos resultados sobre k-independência foram reunidos em [Chellali et al., 2012].



(a) Conjunto independente. (b) Conjunto 2-independente.

Figura 1: Exemplos de conjuntos k-independentes para $k = 1$ e $k = 2$.

Consideramos neste trabalho k-independência em grafos P_4-esparsos. Um grafo G é *P_4-esparso* se todo conjunto com cinco vértices de G induz no máximo um P_4 [Hoàng, 1985]. Um grafo G é um *cografo* se todo subgrafo induzido de G com pelo menos dois vértices é desconexo ou o complemento de um grafo desconexo. Os cografos constituem exatamente a classe dos grafos livres de P_4. A classe dos P_4-esparsos generaliza a classe dos cografos e trata-se de uma classe hereditária e autocomplementar, ou seja, o complemento de um grafo P_4-esparso também é um P_4-esparso. Os P_4-esparsos são subclasse de várias classes importantes de grafos, como os grafos P_4-tidy e os grafos perfeitos.

Grafos P_4-esparsos e suas variações foram motivados pelas aplicações em áreas como escalonamento e semântica computacional. Estes grafos têm uma estrutura simples e podem ser reconhecidos em tempo linear [Jamison e Olariu, 1992a]. Além disso, eles possuem diâmetro limitado e também *cliquewidth* limitada, o que implica em soluções de tempo polinomial para vários problemas que são NP-difíceis. Nikolopoulos e Palios [2005] consideraram o problema de computar o maior subgrafo de um grafo P_4-esparso que admite um emparelhamento perfeito. Eles caracterizaram estes subgrafos e apresentaram um algoritmo de tempo $\mathcal{O}(n + m)$ que resolve este problema, dado um grafo P_4-esparso com n vértices e m arestas. Bravo et al. [2011] caracterizaram os grafos P_4-esparsos cujos conjuntos de vértices podem ser particionados em k conjuntos independentes e

ℓ cliques em termos de subgrafos proibidos e mostraram que estes grafos podem ser reconhecidos em tempo linear.

Alternativamente, G é um cografo se ele pode ser obtido de grafos com apenas um vértice aplicando-se recursivamente as operações de união e junção. Embora muitos parâmetros sejam ilimitados na classe dos cografos, Alecu et al. [2022] mostraram recentemente que para cada parâmetro que é ilimitado, há um coleção finita de subclasses hereditárias minimais (em relação a inclusão) de cografos em que o parâmetro pode ser arbitrariamente grande.

Conjuntos independentes máximos podem ser obtidos em tempo linear em cografos [Corneil et al., 1981] e mais genericamente nos grafos P_4-esparsos [Jamison e Olariu, 1992b]. Além disso, os cografos bem-cobertos foram caracterizados por Klein et al. [2013]. Um grafo é *bem-coberto* se todos os seus conjuntos independentes maximais são máximos. Não encontramos na literatura estudos sobre k-independência em grafos P_4-esparsos, quando $k \geq 2$, o que motivou a nossa pesquisa.

Apresentamos fórmulas fechadas para o número de k-independência em grafos P_4-esparsos em termos do número de k-independência dos seus fatores e apresentamos um algoritmo de tempo polinomial que retorna o número de k-independência de um grafo P_4-esparso. O trabalho foi dividido da seguinte forma: na Seção 2 apresentamos definições básicas e alguns resultados preliminares; na Seção 3 apresentamos resultados de k-independência para grafos obtidos a partir das operações de união disjunta e junção; na Seção 4, estão os nossos principais resultados, onde apresentamos resultados para grafos aranha e o nosso algoritmo de obtenção do número de k-independência de um grafo P_4-esparso. Finalmente, levantamos na Seção 5 algumas possibilidades de trabalhos futuros.

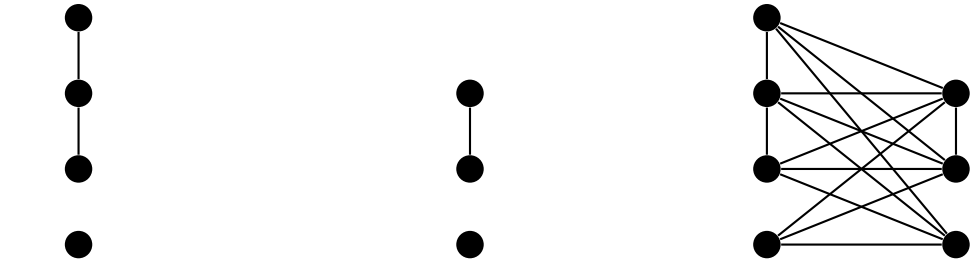
2. Definições e resultados preliminares

Consideramos grafos simples e finitos. Para termos não definidos aqui, veja [Bondy e Murty, 1976]. A *vizinhança aberta* de um vértice v, denotada por $N_G(v)$, consiste no conjunto de vértices que são adjacentes a v. O *complemento* de G, denotado por $\overline{G}$ é tal que $V(\overline{G}) = V(G)$ e $\forall v_1, v_2 \in V(G)$, a aresta (v_1, v_2) pertence a $E(\overline{G})$ se e somente se esta não pertence a $E(G)$.

Dado um conjunto $S \subseteq V(G)$, denotamos por $G[S]$ o subgrafo induzido por S em G. O *grau* de um vértice v de G, denotado por $d(v)$ ou $d_G(v)$ é dado pela cardinalidade da vizinhança aberta de v, ou seja $d(v) = |N_G(v)|$. Se $S \subseteq V(G)$ e $v \in S$, denotamos por $d_S(v)$ o grau de v em $G[S]$. Um vértice cujo grau é zero é denominado vértice isolado. Os graus mínimo e máximo dos vértices de um grafo G são denotados, respectivamente, por $\delta(G)$ e $\Delta(G)$. Uma *clique* C de um grafo G é um subconjunto de vértices de G tal que seus vértices são dois a dois adjacentes em G. Denotamos por $\mathsf{cc}(G)$ o número de componentes conexas de um grafo G e por $\mathsf{CC}(G)$ o conjunto com as componentes conexas de G. Usamos $n(G)$ para denotar o número de vértices do grafo G. Se ℓ é um inteiro positivo, denotamos por $[\ell]$ o conjunto $\{1, \ldots, \ell\}$.

Dados dois grafos G e H com conjuntos disjuntos de vértices, a *união disjunta* de G e H, denotada por $G \oplus H$, é um grafo tal que $V(G \oplus H) = V(G) \cup V(H)$ e $E(V(G \oplus H)) = E(G) \cup E(H)$. A operação de *junção* entre G e H, denotada por $G \otimes H$, resulta em um grafo tal que, $V(G \otimes H) = V(G) \cup V(H)$ e $E(G \otimes H) = E(G) \cup E(H) \cup \{(u, v) \mid u \in V(G) \text{ e } v \in V(H)\}$, ou seja, cada vértice de G é adjacente a cada vértice de H. Na Figura 2 tem-se um exemplo da operação de junção entre dois grafos, G_1 e G_2. Um cografo pode ser construído recursivamente a partir de vértices isolados aplicando-se operações de união disjunta e junção. Uma consequência disto é que um cografo ou o seu complemento é desconexo.

O próximo teorema fornece uma caracterização alternativa para os grafos P_4-esparsos.



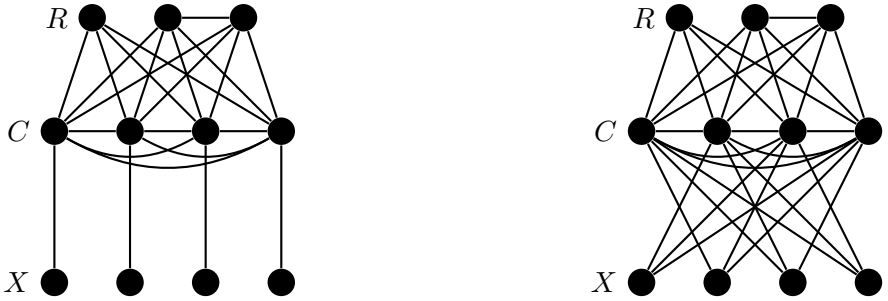
(a) Grafo G_1. (b) Grafo G_2. (c) Grafo $G_1 \otimes G_2$.

Figura 2: Operação junção entre os grafos G_1 e G_2.

Teorema 1. *[Jamison e Olariu, 1992b] Seja G um grafo. Então, G é um grafo P_4-esparso se, e somente se, para cada subgrafo induzido H de G, exatamente uma das condições abaixo é satisfeita:*

(a) H é desconexo;
(b) $\overline{H}$ é desconexo;
(c) H é isomorfo a uma aranha.

Uma *aranha* é um grafo cujo conjunto de vértices pode ser particionado em (R, C, X), onde $C = \{c_1, \ldots, c_\ell\}$ e $X = \{x_1, \ldots, x_\ell\}$ para um dado $\ell \geq 2$ são, respectivamente, uma clique e um conjunto independente; x_i é adjacente a c_j se e somente se $i = j$ (uma aranha magra), conforme a Figura 3a, ou x_i é adjacente a c_j se e somente se $i \neq j$ conforme a Figura 3b (uma aranha gorda); ainda, todo vértice de R é adjacente a cada vértice de C e não é adjacente a qualquer vértice de X. A cardinalidade ℓ de ambos os conjuntos C e X é chamada de *largura* da aranha e o conjunto R na partição é chamado de *cabeça*. Note que se $\ell = 2$, então as aranhas magra e gorda são isomorfas. Além disso, o complemento de uma aranha magra é uma aranha gorda, e vice-versa.



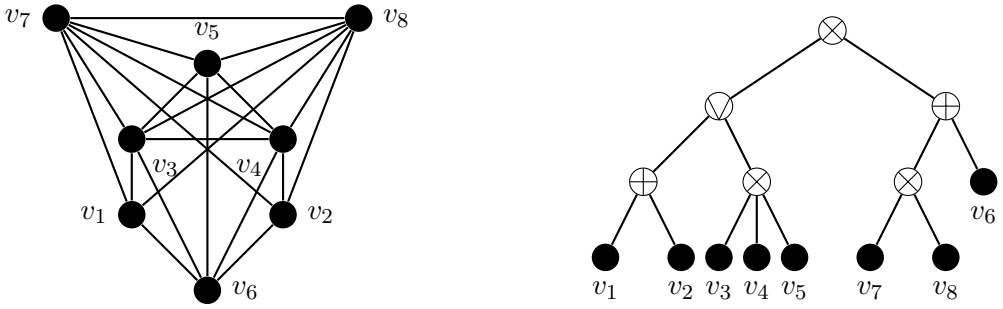
(a) Exemplo de aranha magra. (b) Exemplo de aranha gorda.

Figura 3: Representação de uma aranha magra e uma aranha gorda, ambas com largura 4.

Um *módulo* de um grafo G é um subconjunto $M \subseteq V(G)$ tal que, qualquer vértice que não pertence a M é adjacente a todos os vértices de M, ou não é adjacente a qualquer vértice de M. Um módulo M é definido como um *módulo forte* se para qualquer módulo M' de G, ocorre $M' \cap M = \emptyset$ ou $M' \subseteq M$ ou $M \subseteq M'$. Dado um grafo G qualquer, os grafos triviais, conjuntos vazios e o próprio $V(G)$ são chamados *módulos triviais*. Se um grafo G só possui módulos triviais, este é definido como um *grafo primo*.

O processo de decomposição modular consiste em representar todos os módulos de um determinado grafo. Essa representação comumente é chamada de *árvore de decomposição modular*.

Dada uma árvore de decomposição modular $T(G)$ de um grafo G, as folhas de $T(G)$ representam os vértices $V(G)$, conforme mostra a Figura 4b. Além disso, as folhas de cada subárvore enraizada em um determinado nó interno formam um módulo forte. É importante notar que para qualquer grafo, a sua respectiva árvore de decomposição modular pode ser construída em tempo linear [Cournier e Habib, 1994].



(a) Grafo P_4-esparso G.

(b) Árvore de decomposição modular de G.

Figura 4: Representação de um grafo P_4-esparso e sua árvore de decomposição modular.

De acordo com o Teorema 1, para cada subgrafo induzido H de um grafo G que é P_4-esparso, ocorre uma das condições seguintes: H é desconexo, $\overline{H}$ é desconexo ou H é isomorfo a uma aranha. Como cada módulo forte induz um subgrafo em G, é possível caracterizar a decomposição modular dos grafos P_4-esparsos utilizando três operações básicas. Sejam G um grafo P_4-esparso, $T(G)$ a árvore de decomposição modular de G, t um nó interno de $T(G)$ e $M(t)$ o módulo referente ao nó t. Se $G[M(t)]$ for desconexo, o nó t será uma união disjunta $\oplus$, representando a união das componentes conexas de $G[M(t)]$. Se $\overline{G[M(t)]}$ for desconexo, o nó t será uma junção $\otimes$, representando a junção das componentes de $\overline{G[M(t)]}$. Caso contrário, $G[M(t)]$ será um grafo aranha, o qual será representado pela operação $\textcircled{V}$, onde as subárvores de $\textcircled{V}$ representam as partes (R, C, X) da aranha. Por exemplo as subárvores do nó $\textcircled{V}$ na Figura 4 são referentes a uma aranha com cabeça tal que $C = \{v_3, v_4\}$, $X = \{v_1, v_2\}$ e $R = \{v_5\}$.

3. k-independência em grafos obtidos com operações de união disjunta e junção

As condições para que um conjunto k-independente de um grafo G seja maximal são apresentadas no Teorema 2.

Teorema 2. *[Chellali et al., 2012] Seja S um conjunto k-independente de um grafo G. O conjunto S é maximal se, e somente se, todo vértice $v \in V(G) \setminus S$ satisfaz a exatamente uma das condições abaixo:*

(a) v é adjacente a pelo menos k vértices em S, ou

(b) v é adjacente a um vértice $u \in S$ que tem exatamente $k-1$ vizinhos em S.

Se G é um grafo desconexo, $\alpha_k(G)$ é a soma dos números de k-independência de suas componentes, o que enunciamos na Observação 1. Além disso, se um grafo G possui até k vértices, $\alpha_k(G) = n(G)$, como explicitamos na Observação 2.

Observação 1. *Seja G um grafo e $\ell \geq 2$. Se $G = G_1 \oplus \ldots \oplus G_\ell$, então $\alpha_k(G) = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_k(G_i)$.*

Observação 2. *Seja G um grafo. Se $n(G) \leq k$ então $\alpha_k(G) = n(G)$.*

Chamamos um conjunto S de *estritamente k-independente* se ele é k-independente e não é $(k-1)$-independente. Nos próximos resultados, consideramos conjuntos k-independentes em grafos conexos G obtidos pela operação junção entre os grafos G_1 e G_2. Primeiramente, consideramos o caso em que um conjunto k-independente de G contém vértices de G_1 e de G_2.

Proposição 1. *Sejam $G = G_1 \otimes G_2$ um grafo e $S = S_1 \cup S_2$ um conjunto estritamente k-independente de G tal que $S_1 \subseteq V(G_1)$ e $S_2 \subseteq V(G_2)$ com $S_1 \neq \emptyset$ e $S_2 \neq \emptyset$. Se S_1 é estritamente x-independente, então $|S_2| \leq k - x$.*

Demonstração. Sejam G e S como descritos no enunciado. Como S_1 é estritamente x-independente, existe um vértice v em S_1 tal que $d_{S_1}(v) = x-1$. Para uma contradição, suponha que $|S \cap V(G_2)| > k - x$. Logo, $d_S(v) \geq (x-1) + (k-x+1) = k$, o que contradiz que S é k-independente. □

Proposição 2. *Sejam $G = G_1 \otimes G_2$ um grafo e $S = S_1 \cup S_2$ um conjunto k-independente de G tal que $S_1 \subseteq V(G_1)$ e $S_2 \subseteq V(G_2)$. Se $S_1 \neq \emptyset$, $S_2 \neq \emptyset$, S_1 é estritamente x-independente e S_2 é estritamente y-independente, então $|S| \leq 2k - x - y$.*

Demonstração. Sejam G um grafo tal que $G = G_1 \otimes G_2$ e S um conjunto k-independente de G como descrito. Se S_1 é estritamente x-independente, pela Proposição 1, $|S_2| \leq k - x$. Analogamente, se S_2 é estritamente y-independente, pela Proposição 1, $|S_1| \leq k - x$. Logo, $|S| \leq |S_1| + |S_2| \leq 2k - x - y$. □

Podemos concluir que o máximo da função $2k-x-y$ ocorre quando $x = y = 1$, o que nos fornece um limite superior para a cardinalidade de um conjunto k-independente de $G = G_1 \otimes G_2$ que possui vértices de G_1 e de G_2.

Corolário 1. *Sejam $G = G_1 \otimes G_2$ um grafo e $S = S_1 \cup S_2$ um conjunto k-independente de G tal que $S_1 \subseteq V(G_1)$ e $S_2 \subseteq V(G_2)$. Se $S_1 \neq \emptyset$ e $S_2 \neq \emptyset$, então*

(a) $|S| \leq 2(k-1)$;

(b) se $|S| = 2(k-1)$, então $|S_1| = |S_2| = k - 1$ e ainda, S_1 e S_2 são conjuntos independentes.

O limite da Proposição 2 pode ser melhorado se G_2 for um grafo completo, como mostramos na próxima proposição.

Proposição 3. *Seja $G = G_1 \otimes G_2$ um grafo sendo que G_2 é um grafo completo. Seja $S = S_1 \cup S_2$ um conjunto k-independente de G tal que $S_1 \subseteq V(G_1)$ e $S_2 \subseteq V(G_2)$. Se $S_2 \neq \emptyset$, então $|S| \leq k$.*

Demonstração. Sejam G um grafo e S um conjunto k-independente de G como descritos. Como G_2 é completo, $d_G(c) = n(G) - 1$ para todo vértice $c \in V(G_2)$, ou seja, c é adjacente a todos os outros vértices de G. Se $c \in S \cap V(G_2)$, então c tem no máximo $k-1$ vizinhos em S e podemos concluir $|S| = |S_1| + |S_2| \leq k$. □

No próximo resultado, mostramos que para $k \geq 2$ se $G = G_1 \otimes G_2$ tem um conjunto k-independente máximo que contém vértices de G_1 e de G_2, então há dois inteiros $x, y \in [k-1]$ tais que $\alpha_k(G) = min(\alpha_x(G_1), k-y) + min(\alpha_y(G_2), k-x)$.

Proposição 4. *Sejam $k \geq 2$, $G = G_1 \otimes G_2$ um grafo e $S = S_1 \cup S_2$ um conjunto k-independente máximo de G tal que $S_1 \subseteq V(G_1)$ e $S_2 \subseteq V(G_2)$. Se $S_1 \neq \emptyset$ e $S_2 \neq \emptyset$, então existem $x, y \in [k-1]$ tais que:*

$$|S| = min(\alpha_x(G_1), k-y) + min(\alpha_y(G_2), k-x).$$

Demonstração. Seja G um grafo tal que $G = G_1 \otimes G_2$ e seja S um conjunto k-independente máximo de G como descrito. Suponha que S_1 é estritamente x-independente e S_2 é estritamente y-independente. Pela Proposição 1, $|S_1| \leq k - y$ e $|S_2| \leq k - x$. Além disso, $|S_1| \leq \alpha_x(G_1)$ e $|S_2| \leq \alpha_y(G_2)$. Portanto, vale a igualdade apresentada. □

Proposição 5. *Sejam $k \geq 1$ e $G = G_1 \otimes G_2$ um grafo. Se $max(\alpha_k(G_1), \alpha_k(G_2)) > 2(k-1)$, então $\alpha_k(G) = max(\alpha_k(G_1), \alpha_k(G_2))$.*

Demonstração. Sejam $k \geq 1$ e $G = G_1 \otimes G_2$ um grafo tal que $\max(\alpha_k(G_1), \alpha_k(G_2)) > 2(k-1)$. Suponha sem perda de generalidade que $\max(\alpha_k(G_1), \alpha_k(G_2)) = \alpha_k(G_1)$ e que $S \subseteq V(G)$ é um conjunto k-independente máximo de G tal que $S \cap V(G_1) \neq \emptyset$ e $S \cap V(G_2) \neq \emptyset$. Pelo Corolário 1, sabemos que $|S| \leq 2(k-1)$. Porém, como $\alpha_k(G_1) > 2(k-1)$, existe um conjunto X que é k-independente em G_1 tal que $|X| > 2(k-1)$, o que resulta num absurdo, pois X é um conjunto k-independente em G e $|X| > |S|$. Portanto, $S \cap G_1 = \emptyset$ ou $S \cap G_2 = \emptyset$ o que implica que S é um conjunto k-independente máximo de G_1 ou de G_2. Logo $\alpha_k(G) = |S| = \max(\alpha_k(G_1), \alpha_k(G_2))$. □

4. k-independência em grafos P_4-esparsos

Na Seção 3, analisamos o número de k-independência de grafos obtidos pelas operações de união disjunta e de junção. Agora, consideramos que G é uma aranha com partição (R, C, X). Observe que em um grafo aranha é aplicada a operação de junção entre os subgrafos induzidos por R e C.

Enumeramos abaixo algumas características de grafos P_4-esparsos. Se G é um grafo P_4-esparso tal que G é uma aranha com partição (R, C, X), então:

(a) $G[R]$ é também um grafo P_4-esparso.
(b) Se G é uma aranha magra, então $\Delta(G) = max(|C| + |R|, \Delta(G[R]) + |C|)$.
(c) Se G é uma aranha gorda, então $\Delta(G) = max(|C| + |X| + |R| - 2, \Delta(G[R]) + |C|)$.
(d) Se $|X| = |C| = p$, então G tem $\frac{p(p-1)}{2} + \ell$ P_4's onde ℓ é o número de P_4's no subgrafo $G[R]$.
(e) G e $\overline{G}$ são grafos conexos.

No Lema 1, mostramos que se G é um grafo aranha, então existe S, um conjunto k-independente máximo de G, tal que $X \subseteq S$. Logo, se existe tal S máximo em que $X \not\subseteq S$, podemos modificar S de forma que contenha X e que preserve a sua cardinalidade.

Lema 1. *Seja $k \geq 1$. Se G é um grafo aranha com partição (R, C, X), então existe S, um k-independente máximo de G, tal que $X \subseteq S$.*

Demonstração. Seja $k \geq 1$ e G um grafo aranha com partição (R, C, X). Suponha que S é um conjunto k-independente máximo de G de forma que para algum $i \in [|X|]$, $x_i \in X$ e $x_i \notin S$. Primeiro, suponha que G é uma aranha magra. Neste caso, $N_G(x_i) = \{c_i\}$ e $c_i \in S$, já que S é maximal. Se fizermos $S' = (S \setminus \{c_i\}) \cup \{x_i\}$ obtemos o conjunto k-independente S' com $|S'| = |S|$. Como S é máximo, S' também é máximo. Agora, suponha que G é uma aranha gorda. Como S é maximal, existe $c_j \in C$ tal que $c_j \in S$ e $i \neq j$. Faça $S' = (S \setminus \{c_j\}) \cup \{x_i\}$. Se $|S \cap C| = 1$, c_j é o único vértice de C em S e $S' \cap C = \emptyset$. Logo, S' é k-independente em G, já que X é independente. Se $|S \cap C| > 1$ existe pelo menos um vértice em $S' \cap C$, digamos c_z. Observe que $d_{S'}(c_z) \leq d_S(c_z)$ já que c_z é adjacente a c_j e possivelmente adjacente a x_i (caso $i \neq z$). Logo, podemos concluir que S' é k-independente máximo em G, pois $|S'| = |S|$. □

Os Teoremas 3 e 4 apresentam as cardinalidades de um conjunto k-independente máximo de grafos aranha magra e gorda, respectivamente, dados a partição (R, C, X) e $\alpha_k(G[R])$.

Teorema 3. *Seja $k \geq 1$. Se G é um grafo aranha magra com partição (R, C, X), então*

$$\alpha_k(G) = |X| + max(\alpha_k(G[R]), min(k-1, |X| + |R|)).$$

Demonstração. Se $k > \Delta(G) = max(|R| + |X|, \Delta(R) + |X|)$, então $\alpha_k(G[R]) \leq |X| + |R| \leq k - 1$. Logo, $S = V(G)$ é um conjunto k-independente de G com $|S| = 2|X| + |R| = n(G)$. Portanto, daqui em diante, assumimos que $k \leq \Delta(G)$, o que implica que há pelo menos um vértice de G que não está em um conjunto k-independente máximo, ou seja, $\alpha_k(G) < n(G)$. Portanto, restam dois casos a serem analisados: $\alpha_k(G[R]) < k - 1$ e $\alpha_k(G[R]) \geq k - 1$.

Para a prova do limite inferior, vamos considerar os dois casos. Primeiro, considere $\alpha_k(G[R]) < k - 1$. Seja $p = k - 1 - |R|$. Como $\alpha_k(G[R]) < k - 1$, temos $|R| < k - 1$, o que implica em $p > 0$. Seja $S = X \cup R \cup \{c_1, \ldots, c_p\}$. Temos que $d_S(c_i) = (p-1) + 1 + |R| = (k - 1 - |R|) + 1 + |R| = k - 1$, para todo $c_i \in C \cap S$; $d_S(x) \leq 1$, para todo $x \in X$; e $d_S(r) \leq (|R|-1)+p = (|R|-1)+(k-1-|R|) = k-2$, para todo $r \in R$. Logo, S é um conjunto k-independente de G e então $\alpha_k(G) \geq |X|+k-1$. Agora considere $\alpha_k(G[R]) \geq k-1$. Neste caso, faça $S = X \cup T$, onde T é um conjunto k-independente máximo de R, ou seja $|T| = \alpha_k(G[R])$. É fácil verificar que S é um conjunto k-independente de G e então $\alpha_k(G) \geq |X| + \alpha_k(G[R])$.

Para a prova do limite superior, seja S um conjunto k-independente máximo de G. Podemos assumir, pelo Lema 1, que $X \subseteq S$. Primeiro vamos provar a Afirmação 1.

Afirmação 1. *Se $C \cap S \neq \emptyset$, então $|(R \cup C) \cap S| \leq k - 1$.*

Prova da Afirmação 1. Seja $c \in S \cap C$. Sabemos que $d_{R \cup C}(c) = |R| + |C| - 1$. Logo, c tem um vizinho em $S \cap X$ e no máximo $k-2$ vizinhos em $S \cap (R \cup C)$, o que implica em $|S \cap (R \cup C)| \leq k-1$. □

Suponha que $\alpha_k(G[R]) \geq k - 1$. Pela Afirmação 1, se $C \cap S \neq \emptyset$, então $|(R \cup C) \cap S| \leq k - 1$. Então, podemos assumir que $C \cap S = \emptyset$ e $|S| \leq |X| + \alpha_k(G[R])$. Agora, suponha que $\alpha_k(G[R]) < k-1$. Logo, $|R| \leq k-2$ e podemos concluir que $R \cup X$ é um conjunto k-independente de G que não é maximal (vide Teorema 2), o que implica que há vértices de C em S. Pela Afirmação 1, se $C \cap S \neq \emptyset$, então $|(R \cup C) \cap S| \leq k - 1$. Portanto, $|S| \leq |X| + k - 1$. □

Teorema 4. *Seja $k \geq 1$. Se G é um grafo aranha gorda com partição (R, C, X), então*

$$\alpha_k(G) = \begin{cases} min(k+1, n(G)), & \text{se } |X| \leq k \text{ e } |R| < k - |X| + 1, \\ |X| + \alpha_k(G[R]), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração. Se $k > \Delta(G) = max(2|X| + |R| + 2, \Delta(R) + |X|)$, então $n(G) \leq min(k + 1, \Delta(G[R]) + 1)$. Logo, $S = V(G)$ é um conjunto k-independente de G com $|S| = 2|X| + |R| = n(G)$. Portanto, daqui em diante, assumimos que $k \leq \Delta(G)$, o que implica que há pelo menos um vértice de G que não está em um conjunto k-independente máximo, ou seja, $\alpha_k(G) < n(G)$.

Para a prova do limite inferior, consideramos os dois casos. Primeiro, considere $|X| \geq k + 1$ ou $|R| \geq k - |X| + 1$. Neste caso, faça $S = X \cup T$, onde T é um conjunto k-independente máximo de R, ou seja $|T| = \alpha_k(G[R])$. É fácil verificar que S é um conjunto k-independente de G e então $\alpha_k(G) \geq |X| + \alpha_k(G[R])$. Agora, considere que $|X| \leq k$ e $|R| < k - |X| + 1$. Seja $p = k - |X| - |R| + 1$. Como $|R| < k - |X| + 1$, temos que $p > 0$. Seja $S = X \cup \{c_1, \ldots, c_p\}$.

Então, $d_S(x) \leq p \leq k-1$ para todo $x \in X$; $d_S(c_j) = (p-1) + (|R| + |X| - 1) = k-1$ para todo $j \in [p]$; e $d_S(r) \leq (|R|-1) + p = (|R|-1) + (k - |X| - |R| + 1) = k - |X| < k$ (pois $|X| \geq 2$). Logo, S é um conjunto k-independente de G de cardinalidade $p + |X| + |R| = (k - |R| - |X| + 1) + |X| + |R| = k + 1$, o que mostra que $\alpha_k(G) \geq k + 1$.

Para a prova do limite superior, seja S um conjunto k-independente máximo de G. Pelo Lema 1, podemos assumir que $X \subseteq S$. Primeiro vamos provar a Afirmação 2.

Afirmação 2. *Se $C \cap S \neq \emptyset$, então $|(R \cup C) \cap S| \leq k - |X| + 1$.*

Prova da Afirmação 2. Seja $c \in S \cap C$. Sabemos que $d_{R \cup C}(c) = |R| + |C| - 1$. Logo, c tem $|X| - 1$ vizinhos em $S \cap X$ e no máximo $k - |X|$ vizinhos em $S \cap (R \cup C)$, o que implica em $|S \cap (R \cup C)| \leq k - |X| + 1$. □

Novamente, vamos considerar os dois casos. Primeiro, considere $|X| \geq k + 1$ ou $|R| \geq k - |X| + 1$. Vamos tratar os dois subcasos separadamente. Se $|X| \geq k + 1$ e ainda $C \cap S \neq \emptyset$, então $d_S(c) \geq k$ para $c \in (S \cap C)$, contradizendo que S é k-independente. Logo, podemos concluir que $C \cap S = \emptyset$ e então $\alpha_k(G) \leq \alpha_k(G[R]) + |X|$. Se $|R| \geq k - |X| + 1$ e ainda $C \cap S \neq \emptyset$, então, pela Afirmação 2, $|(R \cup C) \cap S| \leq k - |X| + 1$ e concluímos que $|S| \leq k + 1$. Porém, como $|R| \geq k - |X| + 1$, temos que $\alpha_k(G[R]) \geq k - |X| + 1$. Logo, $\alpha_k(G) \leq |X| + \alpha_k(G[R])$.

Agora, considere que $|X| \leq k$ e $|R| < k - |X| + 1$. Como $|R| < k - |X| + 1$, então $\alpha_k(G[R]) < k - |X| + 1$ e podemos concluir que $R \cup X$ é um conjunto k-independente de G que não é maximal (vide Teorema 2), o que implica que vértices de C também podem estar em S. Pela Afirmação 2, se $C \cap S \neq \emptyset$, então $|(R \cup C) \cap S| \leq k - |X| + 1$. Portanto, $|S| \leq |X| + k - |X| + 1 = k + 1$, o que conclui a prova. □

4.1. Algoritmo para o número de k-independência em grafos P_4-esparsos

Nesta seção, apresentamos um algoritmo de tempo polinomial para calcular o número de k-independência em um grafo P_4-esparso. O algoritmo proposto se vale da estrutura recursiva da árvore de decomposição modular para aplicar abordagens de programação dinâmica. Inicialmente, dado um grafo P_4-esparso G e sua árvore de decomposição modular $T(G)$, para cada nó da árvore é armazenado o seu tipo, ou seja, se é um nó $\otimes$, $\oplus$ ou Ⓥ. Além disso, no caso de um nó Ⓥ, o módulo será uma aranha, conforme o Teorema 1. Logo, também serão armazenadas em $T(G)$ as informações a respeito da partição (R, C, X) da aranha correspondente, e a informação se esta é gorda ou magra para fim de consulta em tempo constante.

Inicialmente, dados um grafo P_4-esparso G, o valor de k e sua árvore de decomposição modular $T(G)$, são calculados os números de i-independência, $1 \leq i < k$, para cada um dos módulos representados por $T(G)$. Dessa forma, ao utilizar o algoritmo para calcular o número de k-independência de G, as informações de j-independência, com $j < k$, de cada módulo pertencente a $T(G)$ já terão sido calculadas e poderão ser utilizadas em tempo constante na iteração k.

Na iteração k, dados os módulos $\{M_1, M_2, \ldots, M_\ell\}$ representados em $T(G)$, sendo que a distância de M_i à raiz de $T(G)$ é maior ou igual à distância de M_{i+1} à raiz de $T(G)$ para $1 \leq i < \ell$, o algoritmo calcula $\alpha_k(G[M_i])$ classificando os grafos P_4-esparsos em casos específicos. Suponha que na iteração atual o algoritmo irá calcular o número de k-independência do grafo H. Primeiramente, se $n(H) \leq k$, então $\alpha_k(H) = n(H)$, pela observação 2. Caso $cc(G) > 1$, ou seja, se o nó correspondente ao módulo que induz H for do tipo $\oplus$, então $\alpha_k(H) = \sum_{i=1}^{cc(H)} H_i$, onde $H_i \in CC(H), 1 \leq i \leq cc(H)$, de acordo com a Observação 1. Observe que, como as componentes conexas de H estão mais abaixo que H em $T(G)$, estas já foram calculadas em iterações anteriores.

Algoritmo 1: Algoritmo para o número de k-independência de $H = H_1 \otimes H_2$

Entrada: inteiro k, Grafo P_4-esparso H, Árvore de decomposição modular $T(H)$
Saída: Número de k-independência de H

início
  se $k = 1$ *ou* $\max(\alpha_k(H_1), \alpha_k(H_2)) \geq 2(k-1)$ **então**
    retorna $\max(\alpha_k(H_1), \alpha_k(H_2))$;
  senão
    $max = 0$;
    $contador = 0$;
    para $i = 1$ *até* $k-1$ **faça**
      para $j = 1$ *até* $k-1$ **faça**
        $contador = \min(\alpha_i(H_1), k-j) + \min(\alpha_j(H_2), k-i)$;
        se $contador > max$ **então**
          $max = contador$;
    retorna max;

Se H não se encaixar nas verificações anteriores, isso significa que um dos dois casos seguintes ocorre: H é induzido por um módulo do tipo $\otimes$ em $T(G)$, ou H é uma aranha. Estes dois casos serão tratados separadamente.

Se H é induzido por um módulo do tipo $\otimes$ em $T(G)$, isso significa que existem grafos H_1 e H_2 tais que $H = H_1 \otimes H_2$. Dessa forma, Se $\max(\alpha_k(H_1), \alpha_k(H_2)) \geq 2(k-1)$ então $\alpha_k(H) = \max(\alpha_k(H_1), \alpha_k(H_2))$, pois caso contrário $2(k-1)$ é um limitante superior de acordo com o Corolário 1. Além disso, se $k = 1$, $\alpha_k(H) = \max(\alpha_k(H_1), \alpha_k(H_2))$ pois só é possível escolher vértices em uma das componentes. Caso contrário, utilizaremos a Proposição 4 para realizar uma busca pelo maior conjunto k-independente. O processo será conforme mostra o Algoritmo 1, que é executado em tempo $\mathcal{O}(k^2)$.

Caso H não se encaixe nos casos anteriores, então H é uma aranha com partição (R, C, X). Estes casos estão caracterizados nos Teoremas 3 e 4 e descritos no Algoritmo 2, que é executado em tempo $\mathcal{O}(1)$, dado o valor de $\alpha_k(H[R])$. Note que o algoritmo não considera o caso em que $n(H) \leq k$, já que este caso já foi excluído nas considerações anteriores.

Algoritmo 2: Cálculo do número de k-independência de um grafo aranha H

Entrada: inteiro k, Grafo aranha H com particão (R, C, X), Árvore de decomposição modular $T(H)$
Saída: Número de k-independência de H

início
  se H *é uma aranha magra* **então**
    retorna $|X| + \max(\alpha_k(H[R]), k-1)$;
  senão se H *é uma aranha gorda* **então**
    se $|X| \leq k$ *e* $|R| < k - |X| + 1$ **então**
      retorna $k+1$;
    senão
      retorna $|X| + \alpha_k(H[R])$;

O processo completo será conforme mostra o Algoritmo 3, que é executado em tempo $\mathcal{O}(k^3n)$, onde $n = n(G)$, já que o número de nós da árvore $T(G)$ é menor do que $2n$. Além disso, se $k > n$ o algoritmo será linear, devido à Observação 2 e se $k \leq n$, então podemos concluir que o algoritmo é $\mathcal{O}(n^4)$. Logo, o algoritmo apresentado é executado em tempo polinomial.

Algoritmo 3: Algoritmo para o número de k-independência

Entrada: inteiro k, Grafo P_4-esparso G, Árvore de decomposição modular $T(G)$
Saída: Número de k-independência de G

início
  para $i = 1$ *até* k **faça**
    para *cada* H *em* $T(G)$ **faça**
      se $n(H) \leq i$ **então**
        $\alpha_i(H) = n(H)$;
      senão se $\mathsf{cc}(H) > 1$ **então**
        $contador = 0$;
        para *cada* C *em* $\mathsf{CC}(H)$ **faça**
          $contador = contador + \alpha_i(C)$;
        $\alpha_i(H) = contador$;
      senão se *O módulo que induz* G *é do tipo* $\otimes$ **então**
        $\alpha_i(H) =$ Algoritmo $1(k, H, T(H))$;
      senão se G *é uma aranha* **então**
        $\alpha_i(H) =$ Algoritmo $2(k, H, T(H))$;
    retorna $\alpha_k(G)$;

5. Considerações finais

Apresentamos resultados sobre k-independência em grafos P_4-esparsos, classe que inclui os cografos. Mostramos que o número de k-independência pode ser obtido em tempo polinomial para a classe dos grafos P_4-esparsos, o que generaliza o resultado conhecido para os cografos. Para continuidade deste trabalho, propomos a extensão dos resultados para a classe dos grafos P_4-tidy que contém, além dos grafos P_4-esparsos, outros grafos com poucos P_4's como os P_4-extensíveis e os P_4-lite. Além disso, estes grafos podem ser analisados quanto à k-bem-cobertura. Um grafo é *k-bem-coberto* se todos os seus conjuntos k-independentes maximais possuem a mesma cardinalidade.

Referências

Alecu, B., Lozin, V., e de Werra, D. (2022). The micro-world of cographs. *Discrete Applied Mathematics*, 312:3–14.

Bondy, J. A. e Murty, U. S. R. (1976). *Graph theory with applications*, volume 290. Macmillan London.

Bravo, R. S., Klein, S., Nogueira, L. T., e Protti, F. (2011). Characterization and recognition of p_4-sparse graphs partitionable into k independent sets and ℓ cliques. *Discrete Applied Mathematics*, 159(4):165–173.

Chellali, M., Favaron, O., Hansberg, A., e Volkmann, L. (2012). k-domination and k-independence in graphs: A survey. *Graphs and Combinatorics*, 28(1):1–55.

Corneil, D. G., Lerchs, H., e Burlingham, L. S. (1981). Complement reducible graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 3(3):163–174.

Cournier, A. e Habib, M. (1994). A new linear algorithm for modular decomposition. In *Colloquium on Trees in Algebra and Programming*, p. 68–84. Springer.

Fink, J. F. e Jacobson, M. S. (1985a). *On n-Domination, n-Dependence and Forbidden Subgraphs*, p. 301–311. John Wiley & Sons, Inc., USA. ISBN 0471816353.

Fink, J. F. e Jacobson, M. S. (1985b). n-domination in graphs. In *Graph theory with applications to algorithms and computer science*, p. 283–300.

Hoàng, C. T. (1985). Perfect graphs (ph. d. thesis). *School of Computer Science, McGill University Montreal*.

Jacobson, M. S. e Peters, K. (1989). Complexity questions for n-domination and related parameters. *Congr. Numer*, 68:7–22.

Jamison, B. e Olariu, S. (1992a). Recognizing p_4-sparse graphs in linear time. *SIAM Journal on Computing*, 21(2):381–406.

Jamison, B. e Olariu, S. (1992b). A tree representation for p_4-sparse graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 35(2):115–129.

Karp, R. M. (1972). Reducibility among combinatorial problems. In *Complexity of computer computations*, p. 85–103. Springer.

Klein, S., de Mello, C. P., e Morgana, A. (2013). Recognizing well covered graphs of families with special p 4-components. *Graphs and Combinatorics*, 29(3):553–567.

Nikolopoulos, S. D. e Palios, L. (2005). Maximum-size subgraphs of p_4-sparse graphs admitting a perfect matching. In *Panhellenic Conference on Informatics*, p. 68–79. Springer.

https://proceedings.science/p/157622?lang=pt-br