Um método de Restauração Inexata para a globalização da Programação Linear Sequencial aplicado à Otimização Topológica

Thiago Siqueira Santos
Instituto Federal de São Paulo
Rua Monsenhor José Vita, 280, Campos do Jordão - SP
thiago.siqueira@ifsp.edu.br

Dimary Moreno / Luís Felipe Bueno / Thadeu Alves Senne
Universidade Federal de São Paulo
Avenida Cesare Mansueto Giulio Lattes, 1201, São José dos Campos - SP
dimarydelcmoreno@gmail.com/lfelipebueno@gmail.com/tsenne@gmail.com

Tiara Martini dos Santos
Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Praça Marechal Eduardo Gomes, 50 - Vila das Acacias, São José dos Campos - SP
tiaramartini@gmail.com

RESUMO

Problemas de otimização topológica podem ser modelados como problemas de otimização não linear e, a depender da discretização feita, ter um número elevado de variáveis. Os métodos de Restauração Inexata possuem um desenvolvimento teórico consolidado e uma complexidade equivalente aos métodos ótimos de primeira ordem. Neste trabalho, iremos apresentar uma alternativa para a solução de problemas de otimização topológica, através de uma globalização do método de Programação Linear Sequencial utilizando a estrutura da Restauração Inexata. Os aspectos teóricos dessa nova proposta são demonstrados e a implementação computacional obteve resultados numéricos que geraram as mesmas figuras que um algoritmo bem estabelecido de Programação Linear Sequencial.

PALAVRAS CHAVE. Otimização Topológica, Restauração Inexata, Otimização não linear.

Programação Matemática, Outras aplicações em PO, Otimização não linear.

ABSTRACT

Topological optimization problems can be modeled as nonlinear optimization problems and, depending on the discretization performed, have a high number of variables. The Inexact Restoration methods have a consolidated theoretical development and a complexity equivalent to the first order optimal methods. In this work, we will present an alternative for solving topological optimization problems, through a globalization of the Sequential Linear Programming method using the Inexact Restoration framework. The theoretical aspects of this new proposal are demonstrated and the computational implementation obtained numerical results that generated the same figures as a well-established Sequential Linear Programming algorithm.

KEYWORDS. Topological optimization. Inexact Restoration. Nonlinear Optimization.

Mathematical programming, Other applications in OR, Non-linear optimization.

https://proceedings.science/p/157556?lang=pt-br

1. Introdução

De uma forma geral, o problema central que iremos abordar neste trabalho pode ser escrito como um problema de programação não linear com o seguinte formato:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & f(x) \\ \text{S.a} & h(x) = 0 \\ & x \in \Omega, \end{array} \tag{1}$$

no qual $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e Ω é um politopo compacto e não vazio.

Mais especificamente, vamos abordar um problema de Otimização Topológica, que consiste em, dado um domínio D, encontrar um subconjunto $D_m \subset D$ que será preenchido com material de modo a satisfazer determinados critérios [Beckers, 1999], como ilustra a Figura 1. Neste trabalho, buscaremos minimizar a flexibilidade de uma estrutura, o que é equivalente a maximizar a rigidez, de modo que uma quantia de material máxima seja utilizada na construção da mesma.

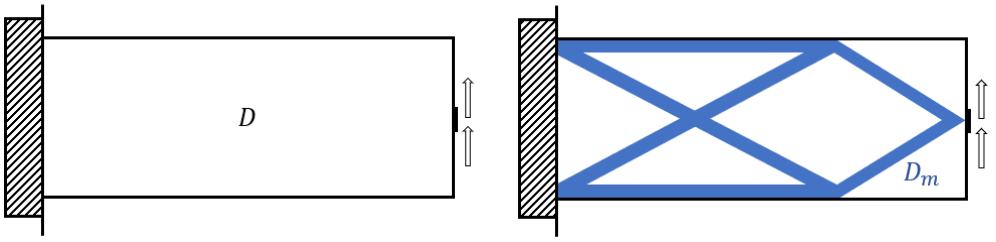


Figura 1: À esquerda, temos a representação de um domínio D e condições de contorno, como pontos de fixação e de aplicação de carregamento. À direita, em azul, um exemplo do que poderia ser o subconjunto D_m formando a estrutura.

Esse tipo de situação pode ser modelada como um problema de programação não linear no seguinte formato [Gomes e Senne, 2011]:

$$\begin{array}{ll} \underset{x}{\text{Min}} & F^T K(x^p)^{-1} F \\ \text{S.a} & v^T x = V \\ & x \in [0,1]^n \end{array}, \tag{2}$$

em que, x é a variável que indica a presença de material, n é o número de elementos finitos vindos da discretização do domínio D, F é um vetor de forças externas associado ao carregamento que está sendo executado, K é uma matriz associada a rigidez da estrutura, o vetor v armazena os volumes v_i atribuídos ao i-ésimo elemento, V é o limite máximo do volume a ser utilizado dentro da estrutura e p é um parâmetro utilizado no método SIMP, *Solid Isotropic Material with Penalization* [Bendsøe, 1989], cuja função é escapar do caráter binário que originalmente acompanha a variável x.

Além disso, geralmente são aplicados filtros no valor das variáveis para o cálculo da função objetivo e das restrições, bem como em suas derivadas. Esses filtros ajustam o valor da densidade de cada elemento levando em consideração também as densidades de seus vizinhos. Com isso, evitam que sejam obtidos padrões do tipo "tabuleiro de xadrez", descritos em [Díaz e Sigmund, 1995], que produzem resultados numéricos que falseiam soluções ótimas. A depender da escolha do filtro, as restrições do problema em questão tornam-se não lineares, as quais não são facilmente satisfeitas. Desta maneira, o valor de x é substituído por uma função $\bar{x}(x)$ no modelo apresentado em (2), que continua sendo um caso particular do problema (1), que será considerado no desenvolvimento teórico deste trabalho.

A literatura de Otimização Topológica aponta para bons resultados na solução desse tipo de problema utilizando o método de Programação Linear Sequencial (PLS) [Fujii e Kikuchi, 2000]. Em [Gomes e Senne, 2011] os autores propõem o primeiro algoritmo deste tipo com teoria de convergência global bem estabelecida. Para isso, o método conta com dois tipos de iteração, uma voltada para melhora da função objetivo e outra para restaura a viabilidade, quando necessário.

Nosso objetivo aqui é propor uma alternativa de abordagem, usando o método da Restauração Inexata (RI) como uma forma de globalização da PLS na resolução de problemas de Otimização Topológica. Essa proposta se baseia no fato da RI ter uma base teórica bastante consolidada, como pode ser vistos nos trabalhos de [Martínez e Pilotta, 2000] e [Fischer e Friedlander, 2010], e uma complexidade da ordem de ε^{-2} [Bueno e Martínez, 2020], que condiz com os métodos ótimos de primeira ordem.

Na próxima seção, iremos fazer uma breve discussão sobre os preceitos básicos da PLS e apresentar o algoritmo para a globalização usando a técnica de RI. Na Seção 3 apresentaremos a base teórica do método proposto. Por fim, alguns resultados numéricos serão discutidos com o intuito de mostrar que a RI consegue apresentar resultados semelhantes a métodos já consolidados como a PLS.

2. Algoritmo de Restauração Inexata para globalização da PLS

O algoritmo que usaremos como referência para solução de problemas de Otimização Topológica através da PLS está descrito em [Gomes e Senne, 2011]. Em linhas gerais, este método parte de um ponto inicial x^0, e enquanto um determinado critério de parada não for satisfeito, irá construir uma sequência x^k resolvendo uma sequência de aproximações lineares de (1). A cada iteração estas aproximações são escritas no seguinte formato:

$$\begin{array}{ll} \underset{d}{\text{Min}} & f(x^k) + \nabla f(x^k)^T d \\ \text{S.a} & h(x^k) + J_h(x^k) d = 0 \\ & x^k + d \in \Omega \\ & \|d\|_\infty \leq \Delta \end{array}, \tag{3}$$

sendo d um incremento chamado de passo tangente e Δ um intervalo de confiança que, para um valor suficientemente pequeno, nos permite assumir que (3) é uma boa aproximação de (1) no entorno de x^k. Como isso, se o passo d for aceito em um determinado critério, o ponto $x^{k+1} = x^k + d$ é aceito como próximo iterando.

A depender da escolha do filtro utilizado para evitar configurações do tipo "tabuleiro de xadrez", as restrições do problema em questão tornam-se não lineares, abrindo a possibilidade do novo iterando ser inviável mesmo quando o atual respeita as restrições. Como isso, temos a necessidade de uma etapa que reestabeleça a viabilidade, chamada de fase de restauração.

Como o algoritmo reestabelece totalmente a viabilidade, dizemos que a restauração é exata. Este processo é feito buscando minimizar uma variável de excesso em um subproblema de otimização, usando quantas iterações forem necessárias, limitado por um número finito, dando passos em direção à viabilidade. Assim que um novo iterando é classificado como viável, o algoritmo volta a resolver o problema (3) em busca de um novo passo tangente. Ao ser determinado o passo que será dado em cada iteração, o método atualiza também o valor do raio da região de confiança, usando informações como o decréscimo da função objetivo e a inviabilidade do iterando. Mais detalhes podem ser analisados no Algoritmo 3.1 descrito no trabalho [Gomes e Senne, 2011].

Os métodos de RI também trabalham com dois tipos de estratégia, uma voltada para melhorar a viabilidade e outra para a otimalidade. Diferentemente do método discutido anteriormente, aqui não necessariamente precisamos restaurar completamente a viabilidade de um iterando antes

de buscar melhorar a função objetivo. Isso pode permitir dar passos maiores em direção à solução do problema quando estamos distantes dela.

De acordo com Bueno et al. [2016], nos métodos de RI cada iteração é composta de duas fases que permitem uma liberdade sobre a forma como buscaremos melhorar a viabilidade e a otimização de cada iterando. Isso aumenta o potencial de adaptação à diferentes classes de problemas, usando técnicas eficientes para cada uma delas.

No algoritmo aqui apresentado não explicitamos a escolha da restauração, requerendo apenas a obtenção de um ponto suficientemente mais viável por um método arbitrário, exigindo apenas uma limitação da distância ao ponto corrente. Isso deixa aberta a possibilidade de investigação do uso de diversas técnicas, como em [Moreno et al., 2022], ainda sob a garantia do arcabouço teórico deste trabalho. Em nossa validação do algoritmo usamos uma técnica semelhante à de [Gomes e Senne, 2011] para reduzir a inviabilidade.

Para a fase de busca da otimimalidade, propomos resolver um subproblema nos moldes dos métodos de PLS, dado pela linearização do problema original, caminhando em um espaço tangente das restrições limitados por uma região de confiança. O aceite deste novo ponto está condicionado a um teste de descenso da função objetivo e de uma função de mérito que pondera a inviabilidade e a otimalidade a cada iteração. Se o ponto for aceito, ele será definido como o novo iterando, caso contrário, um novo ponto é encontrado em uma região mais próxima do ponto encontrado na restauração.

Nos mesmos moldes que tradicionalmente é usada nos métodos de RI [Martínez e Pilotta, 2000], vamos considerar a função de mérito como sendo:

$$\Phi(x, \theta) = \theta f(x) + (1 - \theta)\|h(x)\|, \tag{4}$$

na qual θ é um parâmetro de penalidade calculado a cada iteração do método.

Com estes conceitos em mente, é possível apresentar o Algoritmo 1, que sintetiza as ideias apresentadas até aqui.

3. Resultados teóricos

Vamos dividir nossa análise teórica em duas partes, uma para mostrar que os passos do Algoritmo 1 estão bem definidos e a segunda mostrando que a sequência $\{x^k\}$ gerada pelo método converge para um ponto estacionário que satisfaz as condições KKT. Para isso, vamos assumir que as funções f e h presentes em (1) são contínuas e diferenciáveis, além de existirem constantes não negativas L_g e L_J que, para todo $x, y \in \Omega$, satisfazem:

$$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\| \leq L_g\|y - x\|; \|J_h(y) - J_h(x)\| \leq L_J\|y - x\|. \tag{9}$$

Lema 1. *Se temos que $\|y^k - x^k\| \leq \beta\|h(x^k)\|$, então, para todo $k \in \mathbb{N}$, os Passos 1 e 2 do Algoritmo 1 estão bem definidos, a sequência $\{\theta_k\}$ gerada dentro do Passo 2 é não crescente e existe um $\bar{\theta} > 0$ tal que*

$$\theta_k \geq \bar{\theta}. \tag{10}$$

Demonstração. A demonstração deste lema é comum nos métodos de RI e análoga à demonstração do Lema 3.1 de [Bueno et al., 2013]. □

Lema 2. *Após um número finito de iterações, o valor $y^k + d^k$ é aceito dentro dos testes do Passo 3 do Algoritmo 1.*

Algoritmo 1: Restauração Inexata com PLS

Passo 0: Inicialização.
São definidos os parâmetros do algoritmo ($0 < r < 1$, $0 < \theta_0 < 1$ e $\Delta_{inicial} > 0$) e um valor inicial para a estimativa da solução (x^0). O contador de iterações é zerado ($k \leftarrow 0$).
Passo 1: Fase de restauração.
Se $\|h(x^k)\| = 0$, faça $y^k = x^k$. Caso contrário, encontrar um $y^k \in \Omega$ que satisfaça:

$$\|h(y^k)\| \leq r\|h(x^k)\|. \tag{5}$$

Se não for possível obter y^k, o algoritmo encerra e declara que o problema é provavelmente inviável.
Passo 2: Parâmetro de penalidade
Se

$$\Phi(y^k, \theta_k) \leq \Phi(x^k, \theta_k) - \frac{1}{2}(1-r)^2\|h(x^k)\|.$$

Faça $\theta_{k+1} = \theta_k$.
Caso contrário, calcule:

$$\theta_{k+1} = \frac{\frac{1}{2}(1-r^2)\|h(x^k)\| + r\|h(x^k)\| - \|h(y^k)\|}{f(y^k) - f(x^k) + \|h(x^k)\| - \|h(y^k)\|}.$$

Passo 3: Fase de otimização.
Faça $\Delta_k = \Delta_{inicial}$ e calcule $d^k_\Delta \in \mathbb{R}^n$ como uma aproximação da solução do subproblema:

$$\begin{array}{ll} \underset{d}{\text{Min}} & \nabla f(y^k)^T d \\ \text{S.a} & J_h(y^k)d = 0 \\ & y^k + d \in \Omega \\ & \|d\|_\infty \leq \Delta_k. \end{array} \tag{6}$$

Passo 3.1: Teste da direção
Se

$$f(y^k + d^k) \leq f(y^k) - \frac{1}{2}\|d^k\|^2 \tag{7}$$

e

$$\Phi(y^k + d^k, \theta_{k+1}) \leq \Phi(x^k, \theta_{k+1}) - \frac{1}{2}(1-r)^2\|h(x^k)\|. \tag{8}$$

Vá ao Passo 3.2. Caso contrário, vá ao Passo 3.3.
Passo 3.2: Atualização.
Faça $x^{k+1} := y^k + d^k$ e, se um critério de parada não for satisfeito, incremente k e volte ao Passo 1.
Passo 3.3: Redução do raio da região de confiança
Faça $\Delta_k := \frac{\Delta_k}{10}$ e volta ao início do Passo 3.

Demonstração. Seja $\gamma_k = \left\{d \in \mathbb{R}^n | J_h(y^k)d = 0, y^k + d \in \Omega\right\}$, g^k a projeção de $-\nabla f(y^k)$ nesse conjunto, $g^k = P_{\gamma_k}(-\nabla f(y^k))$, e η_k um número real dado por:

$$\eta_k = -\frac{\nabla f(y^k)^T g^k}{\|g^k\|_\infty}. \tag{11}$$

Pela definição de projeção temos que $\nabla f(y^k)^T g^k < 0$, se $g^k \neq 0$. Além disso, temos que $d = 0$ é solução de (6) se e somente se $g^k = 0$. Neste caso o passo seria aceito trivialmente. Sendo assim, consideremos o caso em que $g^k \neq 0$. Após um número finito de reduções do valor de Δ_k no Passo 3.3, podemos assumir que:

$$\Delta_k \leq min\left\{\|g^k\|_\infty, \frac{\eta_k}{L_g}, \eta_k, \frac{\bar{\theta}\eta_k}{(1-\bar{\theta})L_J}\right\}. \tag{12}$$

Definindo um vetor $\overline{d} = \frac{g^k}{\|g^k\|_\infty}\Delta_k$, que possui a mesma direção de g^k e tem todas componentes no intervalo $[-\Delta_k, \Delta_k]$, temos que $\bar{d}$ é viável para as restrições $J_h(y^k)d = 0$ e $\|d\|_\infty \leq \Delta_k$.

Após um número finito de tentativas temos que $\Delta_k \leq \|g^k\|_\infty$ e então $\|\bar{d}\| \leq \|g^k\|$. Por convexidade, como y^k e $y^k + g^k \in \Omega$, podemos garantir que $y^k + \bar{d} \in \Omega$. Assim, o valor da função objetivo do subproblema (6) na solução d^k_Δ tem como limitante superior o valor em $\overline{d}$, isto é:

$$\nabla f(y^k)^T d^k_\Delta \leq \nabla f(y^k)^T \frac{g^k}{\|g^k\|_\infty}\Delta_k. \tag{13}$$

Por (11), temos:

$$\nabla f(y^k)^T d^k_\Delta \leq -\Delta_k \eta^k. \tag{14}$$

Pela desigualdade dada pelo resto de 1ª ordem da fórmula de Taylor em torno de $f(y^k)$:

$$f(y^k + d^k_\Delta) \leq f(y^k) + \nabla f(y^k)^T d^k_\Delta + \frac{L_g}{2}\|y^k + d^k_\Delta - y^k\|^2.$$

Por (14) e pelo fato de $\|d^k_\Delta\| \leq \Delta_k$, temos:

$$f(y^k + d^k_\Delta) \leq f(y^k) - \Delta_k \eta^k + \frac{L_g}{2}\Delta_k^2.$$

Se vale (12), então $\Delta_k < \frac{\eta_k}{L_g}$. Assim:

$$f(y^k + d^k_\Delta) \leq f(y^k) - (\eta^k - \frac{L_g}{2}\Delta_k)\Delta_k \leq f(y^k) - (\eta^k - \frac{L_g}{2}\frac{\eta_k}{L_g})\Delta_k.$$

O que nos leva à:

$$f(y^k + d^k_\Delta) \leq f(y^k) - \frac{\eta_k \Delta_k}{2}. \tag{15}$$

Por (12) e usando o fato de que $-\Delta_k \leq -\|d^k_\Delta\|$, conclui-se que:

$$f(y^k + d^k_\Delta) \leq f(y^k) - \frac{1}{2}\|d^k_\Delta\|^2.$$

Com isso, para Δ_k satisfazendo (12), o primeiro teste de descenso, dado em (7), é verificado. Para o teste em (8), começaremos escrevendo a diferença entre a função de mérito em $y^k + d_\Delta^k$ e em y^k:

$$\Phi(y^k+d_\Delta^k,\theta_{k+1})-\Phi(y^k,\theta_{k+1}) = \theta_{k+1}[f(y^k+d_\Delta^k)-f(y^k)]+(1-\theta_{k+1})(\|h(y^k+d_\Delta^k)\|-\|h(y^k)\|).$$

Usando (15):

$$\Phi(y^k + d_\Delta^k,\theta_{k+1}) - \Phi(y^k,\theta_{k+1}) \leq -\theta_{k+1}\frac{\eta_k\Delta_k}{2} + (1-\theta_{k+1})(\|h(y^k + d_\Delta^k)\| - \|h(y^k)\|). \quad (16)$$

Agora, vamos usar a fórmula de Taylor com resto integral para h em torno de y^k:

$$h(y^k + d_\Delta^k) = h(y^k) + J_h(y^k)d_\Delta^k + \int_0^1 (J_h(y^k + \xi d_\Delta^k) - J_h(y^k))d_\Delta^k d\xi.$$

Como temos que $J_h(y^k)d_\Delta^k = 0$, calculando a norma de ambos os termos, podemos escrever a desigualdade:

$$\|h(y^k + d_\Delta^k)\| - \|h(y^k)\| \leq \int_0^1 \|J_h(y^k + \xi d_\Delta^k) - J_h(y^k)\|\|d_\Delta^k\|d\xi.$$

Por (9):

$$\|h(y^k + d_\Delta^k)\| - \|h(y^k)\| \leq \int_0^1 L_J\|y^k + \xi d_\Delta^k - y^k\|\|d_\Delta^k\|d\xi = \int_0^1 L_J\xi\|d_\Delta^k\|^2 d\xi.$$

E, portanto:

$$\|h(y^k + d_\Delta^k)\| - \|h(y^k)\| \leq \frac{L_J}{2}\|d_\Delta^k\|^2.$$

Substituindo essa diferença em (16):

$$\Phi(y^k + d_\Delta^k,\theta_{k+1}) - \Phi(y^k,\theta_{k+1}) \leq -\theta_{k+1}\frac{\eta_k\Delta_k}{2} + (1-\theta_{k+1})\frac{L_J}{2}\|d_\Delta^k\|^2.$$

Novamente, usando o fato de que $\|d_\Delta^k\| \leq \Delta_k$ e colocando Δ_k em evidência:

$$\Phi(y^k + d_\Delta^k,\theta_{k+1}) - \Phi(y^k,\theta_{k+1}) \leq \Delta_k[-\theta_{k+1}\frac{\eta_k}{2} + (1-\theta_{k+1})\frac{L_J}{2}\Delta_k].$$

Pelo Lema 1, temos a existência de um $\bar{\theta}$ tal que $\theta^k \geq \bar{\theta}$, o que nos permite escrever:

$$\Phi(y^k + d_\Delta^k,\theta_{k+1}) - \Phi(y^k,\theta_{k+1}) \leq \Delta_k[-\bar{\theta}\frac{\eta_k}{2} + (1-\bar{\theta})\frac{L_J}{2}\Delta_k].$$

Por (12):

$$-\bar{\theta}\frac{\eta_k}{2} + (1-\bar{\theta})\frac{L_J}{2}\Delta_k \leq -\bar{\theta}\frac{\eta_k}{2} + (1-\bar{\theta})\frac{L_J}{2}\frac{\bar{\theta}\eta_k}{(1-\bar{\theta})L_J} \leq -\bar{\theta}\frac{\eta_k}{2} + \bar{\theta}\frac{\eta_k}{2} \leq 0.$$

Dessa forma, temos que:

$$\Phi(y^k + d_\Delta^k, \theta_{k+1}) - \Phi(y^k, \theta_{k+1}) \leq 0. \tag{17}$$

Escrevendo agora a diferença entre a função de mérito em $y^k + d_\Delta^k$ e em x^k, temos:

$$\Phi(y^k+d_\Delta^k, \theta_{k+1}) - \Phi(x^k, \theta_{k+1}) = [\Phi(y^k+d_\Delta^k, \theta_{k+1}) - \Phi(y^k, \theta_{k+1})] + [\Phi(y^k, \theta_{k+1}) - \Phi(x^k, \theta_{k+1})].$$

Por (17), podemos estabelecer a seguinte desigualdade:

$$\Phi(y^k + d_\Delta^k, \theta_{k+1}) - \Phi(x^k, \theta_{k+1}) \leq \Phi(y^k, \theta_{k+1}) - \Phi(x^k, \theta_{k+1}).$$

Dentro do Passo 2 do Algoritmo 1, temos que θ_{k+1} é determinado de modo que $\Phi(y^k, \theta_{k+1}) \leq \Phi(x^k, \theta_{k+1}) - \frac{1}{2}(1-r)^2\|h(x^k)\|$. Deste modo:

$$\Phi(y^k + d_\Delta^k, \theta_{k+1}) - \Phi(x^k, \theta_{k+1}) \leq -\frac{1}{2}(1-r)^2\|h(x^k)\|,$$

o que demonstra o aceite do segundo teste (8), considerando as possíveis reduções de Δ_k até satisfazer (12).

Assim, para uma quantidade finita de iterações, o Passo 3 do Algoritmo 1 encontra um valor de d_Δ^k que satisfaz as condições exigidas para atualização de x^{k+1} no Passo 3.2.

□

Usando que $\langle -\nabla f(y^k) - g^k, -g^k \rangle \leq 0$ [Izmailov e Solodov, 2009], que pode ser escrito como $\nabla f(y^k)^T g^k \leq -\|g^k\|^2$, e o fato que $\|g^k\| \geq \|g^k\|_\infty$, temos que $\eta_k \geq \|g^k\|$. Assim, como uma consequência do teorema anterior, definindo uma constante C como $C = min\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{L_g}, \frac{\bar{\theta}}{(1-\bar{\theta})L_J}\right\}$, sempre que:

$$\Delta_k \leq C\|g^k\|, \tag{18}$$

o passo d_Δ^k gerado pelo subproblema (6) será aceito.

Teorema 1. *O Algoritmo 1 está bem definido.*

Demonstração. Segue como uma consequência dos lemas 1 e 2. □

Lema 3. *Considerando as sequências $\{x^k\}$, $\{y^k\}$ e $\{d^k\}$ geradas pelo Algoritmo 1 de forma que não há falha na restauração e $\|y^k - x^k\| \leq \beta\|h(x^k)\|$, temos:*

$$\lim_{k\to\infty} \|h(x^k)\| = \lim_{k\to\infty} \|h(y^k)\| = \lim_{k\to\infty} \|d^k\| = 0. \tag{19}$$

Demonstração. A demonstração deste lema é análoga à demonstração do Teorema 3.1 de [Bueno et al., 2013]. □

Lema 4. *Se a restrição $\|d\|_\infty \leq \Delta_k$ do subproblema* (6) *não está ativa, então $\|g^k\| \leq 2\|d^k\|$.*

https://proceedings.science/p/157556?lang=pt-br

Demonstração. Se em uma dada iteração k a restrição $\|d\|_\infty \leq \Delta_k$ não está ativa, temos que d^k é uma solução de uma versão relaxada do problema (6):

$$\begin{array}{ll} \underset{d}{\text{Min}} & \nabla f(y^k)^T d \\ \text{S.a} & J_h(y^k)d = 0 \\ & y^k + d \in \Omega \end{array} .$$

Como as restrições são lineares, isso implica em dizer que:

$$d^k = P_{\gamma_k}(d^k - \nabla f(y^k)). \tag{20}$$

Considerando o conjunto $\bar{\gamma}_k = \left\{x \in \mathbb{R}^n | J_h(y^k)(x - y^k) = 0, x \in \Omega\right\}$ e fazendo uma mudança de variável em (20) para alterar a projeção de γ_k para $\bar{\gamma}_k$, podemos concluir que:

$$P_{\bar{\gamma}_k}(x^{k+1} - \nabla f(y^k)) - x^{k+1} = 0. \tag{21}$$

Como $g^k = P_{\gamma_k}(-\nabla f(y^k))$, e novamente alterando a projeção de γ_k para $\bar{\gamma}_k$, temos que:

$$g^k = P_{\bar{\gamma}_k}(y^k - \nabla f(y^k)) - y^k. \tag{22}$$

Aplicado a norma em ambos os termos e usando (21):

$$\|g^k\| = \|P_{\bar{\gamma}_k}(y^k - \nabla f(y^k)) - y^k\| = \|P_{\bar{\gamma}_k}(y^k - \nabla f(y^k)) - y^k - P_{\bar{\gamma}_k}(x^{k+1} - \nabla f(y^k)) + x^{k+1}\|.$$

Pelo caráter não expansivo de uma projeção e usando a desigualdade triangular:

$$\|g^k\| \leq \|y^k - \nabla f(y^k) - x^{k+1} + \nabla f(y^k)\| + \| - y^k + x^{k+1}\|.$$

Como $x^{k+1} = y^k + d^k$, conclui-se:

$$\|g^k\| \leq 2\|d^k\|. \tag{23}$$

□

Até este ponto, partindo da hipótese da restrição do raio da região de confiança não estar ativa, mostramos que a norma do gradiente projetado, $\|g^k\|$, é limitada superiormente por um múltiplo da norma do passo, $\|d^k\|$. O próximo lema tem como resultado o fato de que, após um determinado número de iterações, podemos esperar esse comportamento independente do status das restrições.

Lema 5. *Para C considerado em* (18)*, existe um $\bar{k}$, de modo que $\forall k > \bar{k}$ temos que $\|g^k\| \leq max\left\{2, \frac{10}{C}\right\}\|d^k\|$.*

Demonstração. Pelo Lema 4, $\|g^k\| \leq 2\|d^k\|$ nos casos em que a restrição $\|d\|_\infty \leq \Delta_k$ não está ativa. Quando a restrição do raio da região de confiança está ativa, $\|d^k\|_\infty = \Delta_k$. Por consequência do Lema 3, existe $\bar{k}$, de modo que $\forall k > \bar{k}$, temos $\Delta_k = \|d^k\|_\infty < \Delta_{inicial}$. Assim, podemos afirmar que existiu uma redução do raio da região de confiança antes de termos o valor de d^k_Δ aceito pelos testes da fase de otimização do Algoritmo 1. Pelo Passo 3.3 da fase de otimização, podemos afirmar que o valor do raio região de confiança anterior ao valor aceito é igual a $10\Delta_k$ e que:

$$10\Delta_k > C\|g^k\|.$$

Como $\|d^k\|_\infty = \Delta_k$:

$$\|g^k\| < \frac{10}{C}\|d^k\|_\infty. \tag{24}$$

Considerando (23), (24) e o fato de $\|d^k\|_\infty \leq \|d^k\|$:

$$\|g^k\| \leq max\left\{2, \frac{10}{C}\right\}\|d^k\|.$$

□

Teorema 2. *Suponha que em a cada iteração do Algortimo 1 obtenha um ponto y^k dentro do Passo 1 que satisfaça* (5) *e $\|y^k - x^k\| \leq \beta\|h(x^k)\|$. Seja x^* um ponto limite da sequência $\{x^k\}$ gerada pelo mesmo algoritmo então x^* viável e satisfaz as condições de otimalidade AGP, Approximate Gradient Projection Condition. Além disso, se a condição de qualificação CCP é valida em x^*, então x^* satisfaz as condições KKT, Karush–Kuhn–Tucker conditions.*

Demonstração. Pelo resultado do Lema 3, temos que $\lim_{k\to\infty}\|h(x^k)\| = 0$, portanto todo ponto limite é viável. Para satisfazer as condições AGP, falta mostrar que $\lim_{k\to\infty}\|P_{\bar{\gamma}_k}(x^k - \nabla f(x^k)) - x^k\| = 0$.

Por (22), temos:

$$g^k = P_{\bar{\gamma}_k}(x^k - \nabla f(x^k)) - x^k.$$

Pelo resultado do Lema 5, temos que a cada iteração g^k é limitado superiormente por um múltiplo de d^k. Como este tente a zero, temos que a condição AGP é satisfeita. A implicação de AGP em KKT segue conforme [Andreani et al., 2018].

□

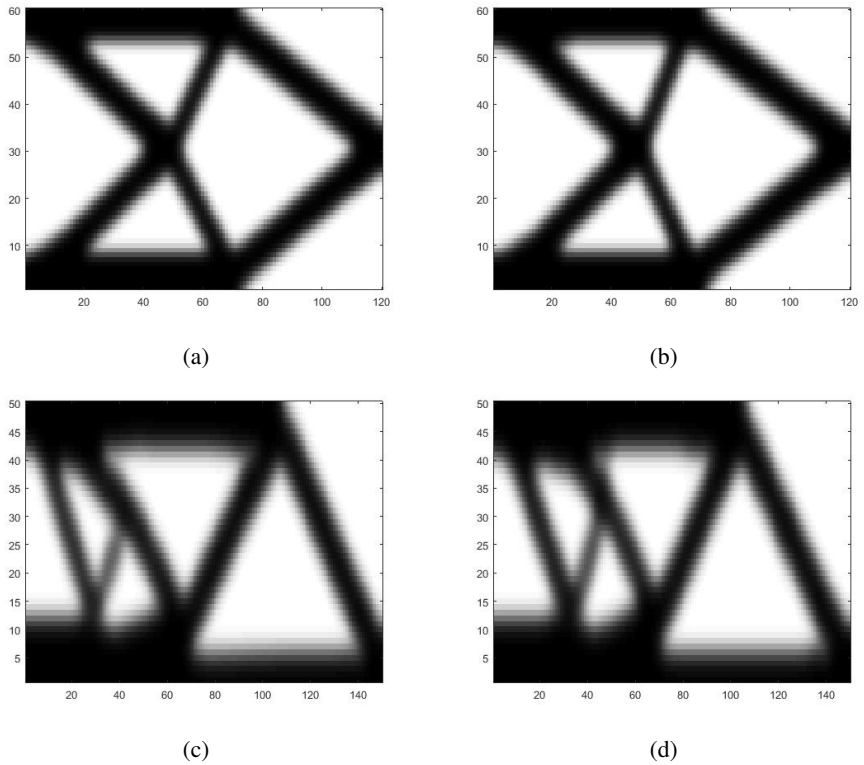
4. Resultados numéricos

Com a intenção de reproduzir os resultados de um algoritmo de PLS que foi utilizado para resolver problemas de otimização topológica em [Gomes e Senne, 2011], implementamos o Algoritmo 1 de modo a determinar o formato de duas estruturas bem conhecidas na literatura, o *cantilever beam* e o *MBB beam*. Utilizamos um computador pessoal para realizar os testes, com um AMD Ryzen 5 (6 núcleos, 3.6GHz, 16GB RAM), rodando o *Windows* 10 como sistema operacional e todas as implementações foram feitas em *Matlab*.

Para o teste com o *cantilever beam*, utilizamos uma malha de 7200 elementos e um volume máximo de 40%, já para o *MBB beam*, a malha tinha 7500 elementos e o volume máximo era de 50% do domínio. Os parâmetros do algoritmo implementado por nós foram definidos como $r = 0,9$, $\theta_0 = 0,9$ e $\Delta_{inicial} = 1$. Em todos testes o valor inicial (x^0) considerado foi a distribuição uniforme de todo o volume disponível.

A Figura 2 apresenta os resultados em nossos testes, sendo que as imagens (a) e (c) foram geradas pelo método RI, discutido neste trabalho, e as outras duas, (b) e (d), geradas pelo método da PLS. As imagens geradas não são idênticas, mas geram valores de funções objetivo muito próximas, como é apresentado na Tabela 1.

https://proceedings.science/p/157556?lang=pt-br



(a) (b)

(c) (d)

Figura 2: Resultados dos testes com o *cantilever beam*, (a) e (b), e com o *MBB beam*, (c) e (d).

	RI	PLS
Cantilever beam	74,68	73,94
MBB beam	186,33	185,34

Tabela 1: Valores finais das funções objetivo.

5. Considerações finais

A ideia central deste trabalho é apresentar uma alternativa de globalização em métodos de PLS na solução de problemas de otimização topológica. Na teoria aqui exposta, mostramos que é possível globalizar o método através da RI, provando a boa definição do algoritmo e sua convergência. Além disso, a estrutura organizada em blocos independentes, nos permite utilizar outras estratégias para a fase de restauração, sem perder a garantia teórica construída aqui. Acreditamos que essa característica é promissora para se adaptar à resolução de diferentes problemas.

Além disso, nosso objetivo era replicar alguns resultados numéricos feitos pela PLS. Mesmo com uma implementação ainda recente, conseguimos obter formatos de estruturas e valores de funções objetivo muito próximos ao de um método já estabelecido para resolver esses problemas. Entendemos que melhorias ainda podem ser feitas para que possamos focar nossa atenção no comparativo do desempenho de ambos os métodos.

Em trabalhos futuros podemos analisar o impacto da variação dos parâmetros do algoritmo no desempenho final, testar passos alternativos à fase de restauração e otimização, além de resolver problemas que envolvam estruturas tridimensionais e mecanismos flexíveis.

Referências

Andreani, R., Martínez, J. M., Ramos, A., e Silva, P. J. S. (2018). Strict constraint qualifications and sequential optimality conditions for constrained optimization. *Math. Oper. Res.*, 43:693–717.

Beckers, M. (1999). Topology optimization using a dual method with discrete variables. *Structural Optimization*, 17:14–24.

Bendsøe, M. P. (1989). Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural optimization*, 1:193–202.

Bueno, L. F., Friedlander, A., Martínez, J. M., e Sobral, F. N. C. (2013). Inexact restoration method for derivative-free optimization with smooth constraints. *SIAM J. Optim.*, 23:1189–1213.

Bueno, L. F., Haeser, G., e Martínez, J. M. (2016). A flexible inexact restoration method and application to optimization with multiobjective constraints under weighted-sum scalarization. *Journal of optimization theory and applications*, 65:699–721.

Bueno, L. F. e Martínez, J. M. (2020). On the complexity of an inexact restoration method for constrained optimization. *SIAM J. Optim.*, 30:80–101.

Díaz, A. e Sigmund, O. (1995). Checkerboard patterns in layout optimization. *Structural optimization*, 10:40–45.

Fischer, A. e Friedlander, A. (2010). A new line search inexact restoration approach for nonlinear programming. *Computational Optimization and Applications*, 46:333–346.

Fujii, D. e Kikuchi, N. (2000). Improvement of numerical instabilities in topology optimization using the slp method. *Struct Multidisc Optim*, 19:113–121.

Gomes, F. A. M. e Senne, T. A. (2011). An slp algorithm and its application to topology optimization. *Computational & Applied Mathematics*, 1:53–89.

Izmailov, A. F. e Solodov, M. (2009). *Otimizacao. V. 1. Condicoes de otimalidade, elementos de analise convexa e de dualidade. Segunda edição*. IMPA, Rio de Janeiro.

Martínez, J. M. e Pilotta, E. A. (2000). Inexact-restoration algorithm for constrained optimization. *Computational Optimization and Applications*, 104:135–163.

Moreno, D., Bueno, F., Siqueira, T., e Senne, T. A. (2022). Uma heurística para a fase de restauração em problemas de otimização topológica resolvidos pelo método de restauração inexata. *Trabalho submetido*.