LIV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional
Juiz de Fora, MG - 8 a 11 de novembro de 2022

CARACTERIZAÇÃO DE GRAFOS COM CONECTIVIDADE ALGÉBRICA MÁXIMA

Yuri Ribeiro dos Santos
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais
Rua Bernardo Mascarenhas, 1283, Juiz de Fora – MG, Brasil.
yuri.ribeiro99@hotmail.com

Laura Maria Silva Miranda
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais
Rua Bernardo Mascarenhas, 1283, Juiz de Fora – MG, Brasil.
lauramariamiranda01@gmail.com

Átila Arueira Jones
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais
Rua Bernardo Mascarenhas, 1283, Juiz de Fora – MG, Brasil.
atila.jones@ifsudestemg.edu.br

RESUMO

Este trabalho é focado no estudo da maximização da conectividade algébrica $a(G)$, definida como o segundo menor autovalor Laplaciano de um grafo G. Esse parâmetro tem uma boa relação com a conexidade do grafo, sendo alvo de inúmeros estudos em razão de sua alta aplicabilidade em novas tecnologias. Motivados por uma de suas aplicações, caracterizamos os grafos que maximizam essa invariante, dado o número de vértices n. Além do grafo completo, caracterizamos todos os grafos que atingem os maiores valores possíveis para a conectividade algébrica, tais que $a(G) > n - 4$, exibindo sua expressão de formação. Por fim construímos uma família infinita de grafos cuja conectividade algébrica atinge a cota máxima dada pelo grau mínimo do grafo.

PALAVRAS CHAVE. Conectividade Algébrica, Maximização, Grau Mínimo.

Tópicos: Teoria e Algoritmos em Grafos (TAG)
Otimização Combinatória (OC)

ABSTRACT

This work is focused on the study of the maximization of algebraic connectivity $a(G)$, defined as the second smallest Laplacian eigenvalue of a graph G. This parameter has a good relationship with the connectivity of the graph, subject of numerous studies due to its high applicability in new technologies. Motivated by one of these applications, we characterize the graphs that maximize this invariant, given the number of vertices n. In addition to the complete graph, we characterize the graphs that reach the highest possible values for algebraic connectivity, such that $a(G) > n - 4$, presenting their formation expression. Finally, we introduce an infinite family of graphs whose algebraic connectivity reaches the maximum bound given by the minimum degree of the graph.

KEYWORDS. Algebraic Connectivity, Maximization, Minimum Degree.

Paper topics: Theory and Algorithms in Graphs (TAG)
Combinatory Optimization (OC)

1. Introdução

Podemos definir um veículo autônomo como aquele que possui um conjunto de tecnologias cognitivas e de controle altamente automatizadas. A pesquisa pelo controle descentralizado desses veículos vem se desenvolvendo nos últimos anos devido à alta aplicabilidade que essa tecnologia oferece. A saber, o controle é descentralizado quando não existe uma central que tem acesso e controla todos os agentes, estes então interagem entre si. Um dos objetivos no desenvolvimento desse controle descentralizado é fazer com que seus sistemas alcancem e mantenham posições e orientações pré-especificadas em relação aos outros, otimizando seu funcionamento. Assim, irão convergir para uma formação de equilíbrio que irá minimizar potenciais problemáticas, como colisões, falta de alinhamento e coesão entre os veículos. Em [Saber and Murray 2003], a comunicação entre veículos autônomos é modelada por grafos orientados. Em especial o trabalho [Fax and Murray 2004] utiliza técnicas da teoria espectral de grafos para estudar a estabilização de veículos descentralizados, com comunicação bidirecional (grafo sem orientação), onde é obtido que a taxa de convergência para estabilidade é determinada pelo segundo menor autovalor da matriz laplaciana do grafo, conhecido como conectividade algébrica.

Baseando-se na questão supracitada, é de interesse buscar grafos que maximizem a conectividade algébrica, visando uma eficiência na estabilidade do sistema. Na literatura, encontramos trabalhos que atuam neste interesse, como [Ogiwara et al. 2017], que busca maximizar tal parâmetro fixando o número de vértices e arestas; já em [Li et al. 2018] é estudado o aumento da conectividade algébrica através de inserção de arestas; e ainda vale citar [Kolokolnikov 2015], que se restringe a específicas classes de grafos. Em vista do interesse nesta área, aliado à motivação da sua aplicação em controle de veículos autônomos, desenvolvemos resultados acerca da maximização da conectividade algébrica para os maiores valores que podem ser atingidos, dentre todos os grafos.

O artigo é estruturado da seguinte forma: A Seção 2 apresenta algumas definições e resultados sobre o estudo de grafos e da Teoria Espectral que foram utilizados ao longo da pesquisa. Na seção seguinte apresentamos as contribuições deste trabalho. Em resumo, definindo n como o número de vértices de um grafo, caracterizamos aqueles que possuem a maior conectividade algébrica possível para os casos em que assume valores de $n-2$ e $n-3$, garantindo que não existe grafo com conectividade entre esse intervalo. Na sequência, obtemos todos os grafos com $n-4 < a(G) < n-3$, mostrando ainda que existem apenas $n-3$ combinações de valores para a invariante nesse intervalo para cada número de vértices. Por fim, para cada valor de n, exibimos ao menos um grafo cuja conectividade algébrica seja igual ao grau mínimo, sendo essa uma cota máxima da invariante. Na Seção 4 apresentaremos uma breve conclusão do artigo.

2. Aportes Teóricos

Um grafo é uma estrutura $G = G(V, E)$, constituída por um conjunto finito e não vazio V, cujo elementos são denominados **vértices**, e um conjunto E de subconjuntos a dois elementos de V, denominados **arestas**. O **grau de um vértice** v, denotado por $d(v)$, é o número de arestas que incidem em v. Vértices u, v ligados por arestas são denominados **adjacentes**, denotado por $uv \in E$. O **grau mínimo** de G é o número $\delta(G) = min\{d(v): v \in V\}$, enquanto o **grau máximo** de G é dado por $\Delta(G) = max\{d(v): v \in V\}$. Diremos que um grafo $H(V', E')$ é **subgrafo** de $G(V, E)$, se $V' \subset V$ e $E' \subset E$, denotando assim $H \subset G$. Além disso, $H(V', E')$ é dito **subgrafo induzido** de $G(V, E)$ se é subgrafo de G tal que dois vértices de H são adjacentes se, e somente se, eles são adjacentes em G. Diremos que G é um grafo livre de H, quando este não é subgrafo induzido de G.

Um **caminho** é uma sequência finita $v_1, v_2, \cdots, v_k$ de vértices de um grafo $G(V, E)$ em que v_i e v_{i+1} são adjacentes para $1 \leq i \leq k-1$. Um caminho fechado é denominado **ciclo**. O

grafo formado por um caminho de n vértices é denotado por P_n, analogamente C_n denota o grafo formado pelo ciclo de ordem n.

Um grafo G é dito **conexo** quando existe um caminho ligando cada par de vértices. Caso contrário, o grafo G é denominado **desconexo,** neste caso dizemos que $G' \subset G$ é uma **componente conexa** de G quando G' é um grafo conexo e não existe um grafo conexo $H \subset G$ tal que $G' \subset H$ e $G' \neq H$. Definimos ainda o **grafo completo**, com n vértices, como aquele em que quaisquer dois vértices distintos são adjacentes, o denotaremos por K_n.

A seguir, serão apresentadas algumas operações com grafos utilizadas no desenvolvimento do presente trabalho.

Definição 2.1 (União de Grafos). *Sejam $G_1 = G_1(V_1, E_1)$ e $G_2 = G_2(V_2, E_2)$ dois grafos, com V_1 e V_2 disjuntos. O **grafo união**, $G = G_1 + G_2$, é dado pelo conjunto de vértices $V_1 \cup V_2$ e o conjunto de arestas $E_1 \cup E_2$. Além disso, dado um $k \in \mathbb{N}$, podemos escrever kG para indicar o grafo que é união de k cópias disjuntas de G.*

Diremos que G é combinação linear dos grafos H_i, $1 \leq i \leq A$, se G pode ser escrito como abaixo, onde $a_i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq A$ e $a_A \neq 0$,

$$G = a_1H_1 + a_2H_2 + \cdots + a_AH_A = \sum_{i=1}^{A} a_iH_i,$$

Definição 2.2 (Junção). *Sejam $G_1 = G_1(V_1, E_1)$ e $G_2 = G_2(V_2, E_2)$ dois grafos. O grafo junção, denotado por $G = G_1 \vee G_2$, é dado pelo conjunto de vértices $V_1 \cup V_2$ e o conjunto de arestas $E = E_1 \cup E_2 \cup \{(u, v), u \in V_1, v \in V_2\}$.*

Definição 2.3 (Grafo Complementar). *Seja $G = G(V, E)$ um grafo. O seu grafo complementar $\overline{G} = \overline{G}(\overline{V}, \overline{E})$ é tal que $\overline{V} = V$ e $v_iv_j \in \overline{E}$ se, e somente se, $v_iv_j \notin E$.*

A Teoria Espectral de Grafos faz o estudo dos autovalores e autovetores referente às matrizes associadas aos grafos. Este trabalho é focado na matriz a Laplaciana, definida a seguir:

Definição 2.4. *Seja $G = G(V, E)$ um grafo com n vértices. A **matriz de adjacência** $A(G)$ é a matriz quadrada de ordem n cujas entradas valem 1 se v_i e v_j são adjacentes e 0 caso contrário. Definimos $L = D - A$ como a **matriz Laplaciana** do grafo G, denotada por $L(G)$, em que D é a **matriz diagonal dos graus** dos vértices de um grafo G, ou seja, $[D]_{ii} = d(v_i)$.*

O **espectro Laplaciano** de um grafo G é o conjunto $\zeta(G) = \{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n\}$, formado pelos autovalores de $L(G)$. Fixaremos uma notação para a ordenação dos autovalores, ou seja, consideraremos que $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n$. Além disso, se um autovalor μ tem multiplicidade $p > 1$, indicaremos por $\mu^{(p)}$.

Para todo grafo G, é conhecido que o menor autovalor laplaciano é zero, então o espectro pode ser escrito como $\zeta(G) = \{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{n-1}, 0\}$, onde $\mu_n = 0$. O que motiva a definição de conectividade algébrica, que é um parâmetro importante na teoria espectral de grafos e é alvo de muitos trabalhos, inclusive vale citar o *survey* [Abreu 2007] especificamente sobre este invariante.

Definição 2.5. *O segundo menor autovalor do Laplaciano de G, μ_{n-1} é denominado **conectividade algébrica** do grafo G e é denotado por $a(G)$. O maior autovalor do Laplaciano de G, $\mu_1(G)$, é denominado **índice do Laplaciano** de G.*

A tabela a seguir mostra o espectro Laplaciano dos principais grafos utilizados no presente texto, evidenciando ainda a conectividade algébrica e índice Laplaciano. Estas e outras propriedades espectrais podem ser vistas em [Brouwer and Haemers 2011].

Tabela 1: Espectro Laplaciano

G	Espectro Laplaciano $\zeta(G)$	$a(G)$	$\mu_1(G)$
K_n	$\{0^{(1)}, n^{(n-1)}\}$	n	n
P_n	$\left\{2-2\cos\left(\frac{\pi j}{n}\right)\right\},\ j \in \{0,\dots,n-1\}$	$2-2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$	$2+2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$
C_n	$\left\{2-2\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)\right\}, j \in \{0,\dots,n-1\}$	$2-2\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$	4 , se n é par; $2+2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$, se n é impar.

Os valores de $a(G)$ e $\mu_1(G)$, apresentados na tabela anterior, foram obtidos a partir do espectro laplaciano dado e da aplicação de propriedades trigonométricas. Para $G = P_n$, o espectro é crescente, então $a(P_n)$ e $\mu_1(P_n)$ são obtidos por $j = 1$ e $j = n-1$, respectivamente. Enquanto $a(C_n)$ é obtida para $j = 1$, $\mu_1(C_n)$ é obtido quando $j = \frac{n+1}{2}$ caso n seja ímpar e $j = \frac{n}{2}$ caso n seja par. Observe que, se n é ímpar, $\mu_1(C_n) = \mu_1(P_n)$.

O resultado a seguir pode ser visto como o ponto de partida dos estudos nesse trabalho, visto que evidencia o maior valor possível de $a(G)$ através do número de vértices n.

Proposição 2.1 [Fiedler 1973]. *Para o grafo completo K_n vale $a(K_n) = n$. Se G, com n vértices, não é o grafo completo, então $a(G) \leq n-2$.*

Proposição 2.2 [Fiedler 1973]. *Se G não é o grafo completo, então $a(G) \leq k(G) \leq k'(G) \leq \delta(G)$.*

No resultado acima, $k(G)$ denota a conectividade de vértices, ou seja, é o menor número de vértices que, ao serem removidos, tornam o grafo desconexo. Analogamente, $k'(G)$ denota a conectividade de arestas.

É possível ainda obter o comportamento do espectro Laplaciano através das operações de união, junção e complementar, descritos nas proposições abaixo.

Proposição 2.3. [Merris 1998] *Se o espectro do Laplaciano de um grafo G é dado por $\zeta(G) = \{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{n-1}, 0\}$, então o espectro de $\overline{G}$ é da forma $\zeta(\overline{G}) = \{n-\mu_{n-1}, \cdots, n-\mu_1, 0\}$. Em particular, vale $\mu_1(\overline{G}) = n - a(G)$.*

Proposição 2.4 [Merris 1998]. *Sejam G_1 e G_2 grafos tais que G_1 tem n_1 vértices e espectro laplaciano $\zeta(G_1) = \{v_1, v_2, \cdots, v_{n_1-1}, 0\}$ e G_2 com n_2 vértices e $\zeta(G_2) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n_2-1}, 0\}$. O espectro laplaciano de $G_1 + G_2$ e $G_1 \vee G_2$ são dados por:*

- $\zeta(G_1 + G_2) = \{v_1, v_2, \cdots, v_{n_1-1}, 0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n_2-1}, 0\}$;
- $\zeta(G_1 \vee G_2) = \{n_1+n_2, v_1+n_2, \cdots, v_{n_1-1}+n_2, \lambda_1+n_1, \cdots, \lambda_{n_2-1}+n_1, 0\}$.

Em particular, podemos expressar o índice laplaciano por

$$\mu_1(G_1 + G_2) = \max\{v_1, \lambda_1\} \ \text{ e } \ \mu_1(G_1 \vee G_2) = n_1 + n_2.$$

Por fim apresentamos uma classe bem conhecida na área de grafos: os cografos. Caracterizado por aqueles grafos livres de P_4, ou pela definição alternativa descrita abaixo.

Definição 2.6. *Um grafo $\mathcal{C}$ é um **cografo** se ele pode ser gerado a partir de um único vértice pelas operações de união disjunta e junção:*

1. *K_1 é um cografo.*
2. *Se $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são cografos, então $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$ é um cografo.*
3. *Se $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são cografos, então $\mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_2$ é um cografo.*
4. *Se $\mathcal{C}$ é um cografo, então $\overline{\mathcal{C}}$ é um cografo.*

A saber, foi provado em [Merris 1998] que todo cografo possui seu espectro laplaciano formado por números inteiros.

3. Maximizando a Conectividade Algébrica

Tendo ciência do embasamento teórico e das motivações do presente estudo, se torna possível o desenvolvimento dos resultados que serão apresentados ao longo desta seção. As contribuições deste trabalho consistem na caracterização dos grafos que atingem os maiores valores possíveis de $a(G)$ inspirados na desigualdade $a(G) \leq n-2$, para $G \neq K_n$, posta na Proposição 2.1. Portanto, os resultados podem ser vistos como extensões da proposição citada. Além dessas caracterizações, construímos uma família infinita de grafos que atingem a igualdade na Proposição 2.2. Vale destacar que todas as caracterizações foram obtidas com auxílio do software *Graph Filter* [Castro and Jones 2021], [Graph Filter 2020].

Proposição 3.1. *Seja G um grafo com n vértices. Temos que $a(G) = n-2$ se, e somente se, $\delta(G) = n-2$, ou seja, $G = \overline{pK_2 + (n-2p)K_1}, p = 1, 2, 3, \cdots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.*

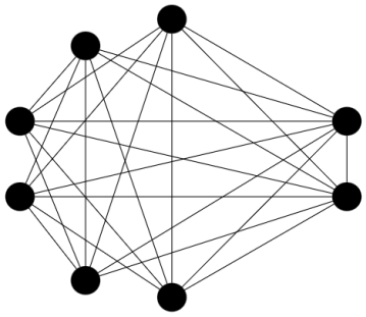
Demonstração: Consideremos um grafo G, com n vértices e $a(G) = n-2$. Tendo em vista que $a(K_n) = n$, podemos supor $G \neq K_n$. Pela Proposição 2.2, temos que $n-2 = a(G) \leq \delta(G)$, dessa forma $\delta(G) = n-2$.

Reciprocamente, suponhamos $\delta(G) = n-2$, observamos que esse grafo é gerado pela remoção de p arestas de K_n, em que $p = 1, 2, 3, \cdots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ desde que seja mantido $\delta(G) = n-2$, ou seja, $G = \overline{pK_2 + (n-2p)K_1}$. Pela Tabela 1 temos $\mu_1(K_2) = 2$ então pela Proposição 2.4, $\mu_1(\overline{G}) = 2$. Logo garantimos $a(G) = n-2$, pela Proposição 2.3.

■

Como exemplo, ao adotarmos $n = 8$ e $p = 3$, obtemos o grafo G apresentado abaixo, onde $a(G) = n-2 = 6$.

Figura 1: $G = \overline{3K_2 + 2K_1}$.



Corolário 3.1. *Não existe grafo G com $n-3 < a(G) < n-2$.*

Demonstração: Suponhamos que exista um grafo G com n vértices, em que $n-3 < a(G) < n-2$, naturalmente, $G \neq K_n$. Pela Proposição 2.2 temos $\delta(G) = n-2$, então pela Proposição 3.1 vale $a(G) = \delta(G) = n-2$, o que é uma contradição, logo não existe tal grafo.

■

Proposição 3.2. *Seja G um grafo com n vértices. Então $a(G) = n-3$ se, e somente se, $G = \overline{aK_1 + bK_2 + cK_3 + dP_3}$, para a, b, c, d inteiros positivos, em que $c + d > 0$.*

Demonstração: Suponhamos que G seja um grafo com n vértices e que $a(G) = n-3$. Pela Proposição 2.2, temos que $\delta(G) \geq n-3$ e, a partir da Proposição 3.1, garantimos que $\delta(G) = n-3$. Para o complemento de G é obtido $\Delta(\overline{G}) = 2$ e $\mu_1(\overline{G}) = 3$, pela Proposição 2.3.

CASO 1: Se $\overline{G}$ é conexo, então $\Delta(\overline{G}) = 2$ garante que $\overline{G} = C_n$ ou $\overline{G} = P_n$. Pela Tabela 1, obtemos $\mu_1(C_n) = \mu_1(P_n) = 2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = 3$, onde $n = 3$. Ou seja, $\overline{G} = K_3 = C_3$ ou $\overline{G} = P_3$.

CASO 2: Supondo $\bar{G}$ desconexo podemos escrevê-lo como união de p componentes conexas, sendo $\overline{G} = \sum_{i=1}^{p} H_i$, em que cada H_i possui n_i vértices. Pela Proposição 2.4, temos $\mu_1(\overline{G}) = \max\{\mu_1(H_i), 1 \leq i \leq p\} = 3$, então para cada $1 \leq i \leq p$ vale que $\mu_1(H_i) \leq 3$ e $\Delta(H_i) \leq 2$, em que ao menos uma componente deve atingir o grau máximo 2 e o índice 3.

Digamos que $\mu_1(H_r) = 3$, para algum $1 \leq r \leq p$, logo $H_r \neq K_1$ e $H_r \neq K_2$, dessa forma, temos de imediato que $\Delta(H_r) = 2$. Portanto, H_r se enquadra no CASO 1, o que garante $H_r = C_3$ ou $H_r = P_3$. Para as outras componentes conexas H_i, temos que $\mu_1(H_i) \leq 3$, sabendo que H_i só pode ser isomorfo a um ciclo ou a um caminho, em virtude de $\Delta(H_i) \leq 2$, temos então que $n_i \leq 3$ pela Tabela 1. Assim:

- Se $n_i = 1$, então $\Delta(H_1) = 0$ e $H_i = P_1 = K_1$.
- Se $n_i = 2$, então $\Delta(H_2) = 1$ e $H_i = P_2 = K_2$.
- Se $n_i = 3$, então $\Delta(H_2) = 2$ e $H_i = P_3$ ou $H_i = C_3 = K_3$.

Dessa forma, temos que $\overline{G}$ é formado pela combinação linear de K_1, K_2, K_3 e P_3 sendo que deve existir ao menos uma componente C_3 ou P_3. Logo $G = \overline{aK_1 + bK_2 + cK_3 + dP_3}$, para $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ em que $c + d > 0$ e $n = a + 2b + 3c + 3d$, o que prova o enunciado.

Reciprocamente, suponhamos que $G = \overline{aK_1 + bK_2 + cK_3 + dP_3}$, para a, b, c, d inteiros positivos, em que $c + d > 0$. Através da Proposição 2.4 temos

$$\mu_1(\overline{G}) = \max\{\mu_1(K_1), \mu_1(K_2), \mu_1(K_3), \mu_1(P_3)\} = 2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3$$

Donde segue pela Proposição 2.3 que $a(G) = n - \mu_1\left(\overline{G}\right) = n - 3$.

■

Como exemplo da Proposição 3.2, observe o grafo da Figura 2, em que foram adotados os parâmetros $a = 1$, $b = 2, c = 0$ e $d = 1$. Este resultado ainda garante que, para todo G com $a(G) = n - 3$, temos $\delta(G) = n - 3$. Além disso, vale ressaltar que a recíproca não é verdadeira, o que pode ser observado no contraexemplo apresentado na Figura 3, tendo $n = 9$, $\delta(G) = n - 3$ e $a(G) \approx 5{,}2$.

Figura 2: $G = \overline{K_1 + 2K_2 + P_3}$.

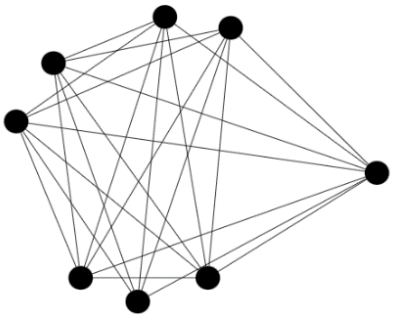
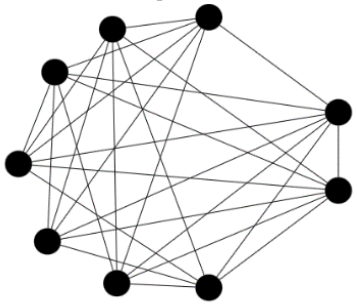


Figura 3: Contraexemplo $\delta(G) = n - 3 \neq a(G)$.



Ainda com o objetivo de caracterizar os grafos com maiores conectividades algébricas, o próximo resultado caracteriza os grafos de n vértices com conectividade algébrica entre $n - 3$ e $n - 4$.

Proposição 3.3. *Seja G um grafo com n vértices. Então $n - 3 < a(G) < n - 4$ se, e somente se,*

$$G = \overline{\sum_{J=1}^{A} a_{2J+1} C_{2J+1} + \sum_{J=1}^{B} b_J P_J},$$

em que $A \geq 2$ *ou* $B \geq 4$. *Além disso, em caso afirmativo, vale* $a(G) = n - 2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{M}\right)$ *para* $M = max\{2A + 1, B\}$.

Demonstração: Considere um grafo G em que $n - 4 < a(G) < n - 3$, pela Proposição 2.2, vale $\delta(G) \geq n - 3$. Além disso, pelas Proposições 2.1 e 3.1 temos que $\delta(G) \neq n - 1$ e $\delta(G) \neq n - 2$, respectivamente. Portanto, $\delta(G) = n - 3$, obtendo então $\Delta(\bar{G}) = 2$ e, pela Proposição 2.3, $3 < \mu_1(\bar{G}) < 4$. Temos dois casos a considerar:

CASO 1: Se $\bar{G}$ conexo, então $\overline{G} = P_n$ ou $\overline{G} = C_n$, pois $\Delta(\overline{G}) = 2$. Se $\overline{G} = P_n$ obtemos $\mu_1(\overline{G}) = 2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ pela Tabela 1. Então valem as seguintes equivalências $(*)$:

$$3 < \mu_1(\overline{G}) < 4 \Leftrightarrow 3 < 2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) < 4$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) < 1$$
$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow n > 3$$
$$\Leftrightarrow n \geq 4$$

A última equivalência é garantida pelo fato $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, considere $\overline{G} = C_n$, então, como $3 < \mu_1(\overline{G}) < 4$, novamente pela Tabela 1 temos que n é ímpar e $\mu_1(\overline{G}) = 2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$, nesse caso as mesmas equivalências resultam em $n \geq 5$.

CASO 2: Se $\overline{G}$ desconexo, então podemos escrever $\overline{G}$ como união de p componentes conexas, ou seja $\overline{G} = \sum_{i=1}^{p} H_i$, onde cada H_i possui n_i vértices. Pela Proposição 2.4 temos $\mu_1(\overline{G}) = \max\{\mu_1(H_i), 1 \leq i \leq p\}$, então para cada $1 \leq i \leq p$ valem $\mu_1(H_i) < 4$ e $\Delta(H_i) \leq 2$, em que ao menos uma componente deve atingir o grau máximo 2 e índice entre 3 e 4.

Digamos que $\mu_1(\overline{G}) = \mu_1(H_r)$ para algum $1 \leq r \leq p$. Então $3 < \mu_1(H_r) < 4$, o que já garante $H_r \neq K_1$ e $H_r \neq K_2$, ou seja, $\Delta(H_r) = \Delta(\overline{G}) = 2$. A partir destas propriedades podemos aplicar o mesmo raciocínio desenvolvido no CASO 1, concluindo que H_r é isomorfo a um ciclo de ordem ímpar $n_r \geq 5$ ou H_r é isomorfo a um caminho de ordem $n_r \geq 4$.

Em relação às outras componentes, para cada i, com $1 \leq i \leq p$, vale $\mu_1(H_i) \leq \mu_1(H_r) < 4$ e temos três subcasos a considerar:

- Se $\Delta(H_i) = 0$, então $H_i = P_1 = K_1$, onde $\mu_1(P_1) = 0$.
- Se $\Delta(H_i) = 1$, então $H_i = P_2 = K_2$, onde $\mu_1(P_2) = 2$.
- Se $\Delta(H_i) = 2$, então temos $H_i = P_{n_i}$ ou $H_i = C_{n_i}$. Através de raciocínio semelhante ao CASO 1 analisamos as duas possibilidades: Se $H_i = P_{n_i}$, então $\mu(H_i) = 2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n_i}\right) < 4$, o que é válido para qualquer inteiro positivo n_i; por outro lado a mesma conclusão ocorre para a possibilidade $H_i = C_{n_i}$, para n_i ímpar.

Em resumo, concluímos neste CASO 2 que $\overline{G}$ é formado pela combinação linear de ciclos ímpares e caminhos, de forma que ao menos uma componente conexa será isomorfa ao caminho com ao menos 4 vértices ou a um ciclo com ordem ímpar maior ou igual a 5.

Logo podemos escrever:

$$G = \overline{\sum_{J=1}^{A} a_{2J+1} C_{2J+1} + \sum_{J=1}^{B} b_J P_J} \qquad (**)$$

em que $A \geq 2$ ou $B \geq 4$, onde $a_{2A+1} > 0$ e $b_B > 0$.

Reciprocamente, suponha G um grafo conforme $(**)$, onde $A \geq 2$ ou $B \geq 4$. A partir da Proposição 2.4, sabemos $\mu_1(\overline{G})$ é dado pelo maior índice dentre todas as componentes conexas. Enquanto pela Tabela 1 constatamos que:

- $\max\{\mu_1(C_{2j+1})\,;\ 1 \le j \le A\} = \mu_1(C_{2A+1}) = 2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2A+1}\right)$
- $\max\{\mu_1(P_j)\,;\ 1 \le j \le B\} = \mu_1(P_B) = 2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{B}\right)$

Portanto, podemos escrever $\mu_1(\overline{G}) = 2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{M}\right)$, onde $M = \max\{2A+1, B\}$. Como por hipótese temos $A \ge 2$ ou $B \ge 4$, então $M \ge 4$ e podemos aplicar a mesma cadeia de equivalências de $(*)$, obtendo assim que $3 < \mu_1(\overline{G}) < 4$. Finalmente, como $a(G) = n - \mu_1(\overline{G})$, então provamos que $n-4 < a(G) < n-3$ e ainda $a(G) = n - 2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{M}\right)$, conforme desejado.

■

A partir da Proposição 3.3 obtemos o corolário a seguir, o qual garante que se um grafo G tem $a(G)$ no intervalo real $(n-4, n-3)$, então existe apenas um número finito de valores que $a(G)$ pode assumir.

Corolário 3.2. *Seja G grafo com n vértices e $n-4 < a(G) < n-3$, então existem apenas $n-3$ possíveis valores distintos para $a(G)$.*

Demonstração: Pela Proposição 3.3, garantimos que $G = \overline{\sum_{j=1}^{A} a_{2j+1}C_{2j+1} + \sum_{j=1}^{B} b_j P_j}$, em que $A \ge 2$ ou $B \ge 4$. Além disso $a(G) = n - 2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{M}\right)$, para $M = max\{2A+1, B\}$. Vamos analisar os possíveis valores para o inteiro M.

Observe que M é o tamanho do maior caminho ou ciclo no grafo $\overline{G}$, portanto, o maior valor possível ocorre em $M = n$, ou seja, $A = \frac{n-1}{2}$ e $B = 0$ com n ímpar ou ainda $A = 0$ e $B = n$, que resultam em apenas duas possibilidades para o grafo, a saber $G = \overline{C_n}$ com n ímpar ou $G = \overline{P_n}$. Por outro lado, o menor valor que M pode assumir é $M = 4$, visto $2A + 1 \ge 5$ e $B \ge 4$. Neste caso temos $A = 1$ e $B = 4$, que ocorre quando $G = \overline{a_3C_3 + b_1P_1 + b_2P_2 + b_3P_3 + b_4P_4}$, onde $b_4 > 0$. Portanto M é um inteiro $4 \le M \le n$, ou seja, o que implica que $a(G)$ pode assumir apenas $n-3$ valores distintos, a saber, $a(G) \in \{n - 2 - 2\,cos\left(\frac{\pi}{k}\right); 4 \le k \le n\}$.

■

Exemplificamos a Proposição 3.3 e o Corolário 3.2 através da tabela abaixo, que lista todos os grafos G com n vértices, para $4 \le n \le 9$ com $a(G) \in (n-4, n-3)$, onde dividimos as colunas pelos grupos dos grafos para cada possível valor que $a(G)$ pode assumir de acordo com $4 \le M \le n$. Para não sobrecarregar o texto da tabela denotaremos $f(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

Tabela 2: Grafos com $n-4 < a(G) < n-3$

	$M=n$	$M=n-1$	$M=n-2$	$M=n-3$	$M=n-4$	$M=n-5$
$a(G)$	$2-f(4)$					
$n=4$	$\overline{P_4}$					
$a(G)$	$3-f(5)$	$3-f(4)$				
$n=5$	$\overline{P_5}$ $\overline{C_5}$	$\overline{P_4+P_1}$				
$a(G)$	$4-f(6)$	$4-f(5)$	$4-f(4)$			
$n=6$	$\overline{P_6}$	$\overline{P_5+P_1}$ $\overline{C_5+P_1}$	$\overline{P_4+P_2}$ $\overline{P_4+2P_1}$			
$a(G)$	$5-f(7)$	$5-f(6)$	$5-f(5)$	$5-f(4)$		
$n=7$	$\overline{P_7}$ $\overline{C_7}$	$\overline{P_6+P_1}$	$\overline{P_5+P_2}$ $\overline{C_5+P_2}$ $\overline{P_5+2P_1}$ $\overline{C_5+2P_1}$	$\overline{P_4+P_3}$ $\overline{P_4+C_3}$ $\overline{P_4+3P_1}$ $\overline{P_4+P_2+P_1}$		
$a(G)$	$6-f(8)$	$6-f(7)$	$6-f(6)$	$6-f(5)$	$6-f(4)$	
$n=8$	$\overline{P_8}$	$\overline{P_7+P_1}$ $\overline{C_7+P_1}$	$\overline{P_6+P_2}$ $\overline{P_6+2P_1}$	$\overline{P_5+P_3}$ $\overline{C_5+P_3}$ $\overline{P_5+C_3}$ $\overline{C_5+C_3}$ $\overline{P_5+3P_1}$ $\overline{C_5+3P_1}$ $\overline{P_5+P_2+P_1}$ $\overline{C_5+P_2+P_1}$	$\overline{2P_4}$ $\overline{P_4+4P_1}$ $\overline{P_4+2P_2}$ $\overline{P_4+P_3+P_1}$ $\overline{P_4+C_3+P_1}$ $\overline{P_4+P_2+2P_1}$	
$a(G)$	$7-f(9)$	$7-f(8)$	$7-f(7)$	$7-f(6)$	$7-f(5)$	$7-f(4)$
$n=9$	$\overline{P_9}$ $\overline{C_9}$	$\overline{P_8+P_1}$	$\overline{P_7+P_2}$ $\overline{C_7+P_2}$ $\overline{C_7+2P_1}$ $\overline{P_7+2P_1}$	$\overline{P_6+P_3}$ $\overline{P_6+C_3}$ $\overline{P_6+3P_1}$ $\overline{P_6+P_2+P_1}$	$\overline{P_5+P_4}$ $\overline{C_5+P_4}$ $\overline{P_5+4P_1}$ $\overline{C_5+4P_1}$ $\overline{P_5+2P_2}$ $\overline{C_5+2P_2}$ $\overline{P_5+P_3+P_1}$ $\overline{C_5+P_3+P_1}$ $\overline{P_5+C_3+P_1}$ $\overline{C_5+C_3+P_1}$ $\overline{P_5+P_2+2P_1}$ $\overline{C_5+P_2+2P_1}$	$\overline{P_4+5P_1}$ $\overline{2P_4+P_1}$ $\overline{P_4+P_3+P_2}$ $\overline{P_4+P_3+2P_1}$ $\overline{P_4+C_3+P_2}$ $\overline{P_4+C_3+2P_1}$ $\overline{P_4+2P_2+P_1}$ $\overline{P_4+P_2+3P_1}$

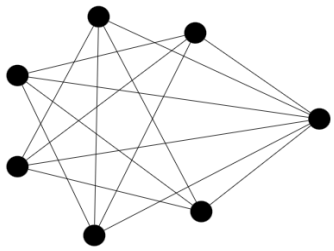
Os resultados obtidos anteriormente expandem a Proposição 2.1 ao caracterizarmos os grafos que atingem $a(G)=n-2$, em seguida $a(G)=n-3$, garantindo que não existe grafo com $n-3<a(G)<n-2$ e por fim caracterizando aqueles com $n-4<a(G)<n-3$. A tabela abaixo resume todos os grafos que satisfazem a condição imposta para $a(G)$.

Tabela 3: Resumo dos resultados que maximizam conectividade algébrica

$a(G)$	Todos os grafos	Resultado obtido em:
$a(G) = n$	$G = K_n$	[Fiedler 1973]
$n-2 < a(G) < n$	Não existe grafo	[Fiedler 1973]
$a(G) = n-2$	$G = \overline{lK_2 + (n-2l)K_1}$ $l = 1, 2, 3, \cdots, \lfloor n/2 \rfloor$	Proposição 3.1
$n-3 < a(G) < n-2$	Não existe grafo	Corolário 3.1
$a(G) = n-3$	$G = \overline{aK_1 + bK_2 + cK_3 + dP_3}$ $c + d > 0$	Proposição 3.2
$n-3 < a(G) < n-4$	$G = \overline{\sum_{J=1}^{a} a_{2J+1}C_{2J+1} + \sum_{J=1}^{b} b_J P_J}$ $a \geq 2$ ou $b \geq 4$	Proposição 3.3

Observe que, pela tabela acima, todos os grafos obtidos podem ser vistos como complementar de possíveis combinações lineares de caminhos e ciclos, sujeitos à específicas restrições. Destacamos ainda que todos os grafos com $a(G) \geq n-3$ são cografos, naturalmente nenhum grafo com $n-3 < a(G) < n-4$ é cografo, visto que se trata de conectividade algébrica não inteira, porém existem grafos não cografos com $a(G) = n-4$, por exemplo o grafo ilustrado na Figura 4.

Figura 4: $n = 7$, $a(G)=3$ e não cografo.



Em adicional, na proposição abaixo apresentamos uma família infinita de grafos que atingem a igualdade da Proposição 2.2.

Proposição 3.4. *Seja n um inteiro positivo, para cada $\delta = 1,2,\cdots,n-2$, existe ao menos um grafo $G_\delta = G_\delta(V,E)$ com n vértices, grau mínimo δ e $a(G) = \delta(G)$.*

Demonstração: Seja $p = n - \delta - 1$, note que $p > 0$. Então considere:

$$G_\delta = (K_1 + K_p) \vee K_\delta$$

Dados $\zeta(K_1) = \{0\}$, $\zeta(K_p) = \{p^{(p-1)}, 0\}$, onde a potência denota a multiplicidade do autovalor. Pela Proposição 2.4, temos $\zeta(K_1 + K_p) = \{p^{(p-1)}, 0^{(2)}\}$

Obtemos então:

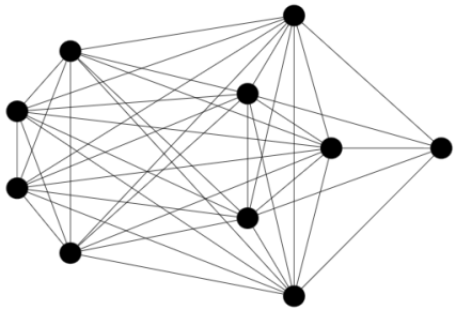
$$\zeta(G_\delta) = \{p+1+\delta, (p+\delta)^{(p-1)}, \delta, (\delta+p+1)^{(\delta-1)}, 0\} =$$
$$= \{(\delta+p+1)^{\delta}, (p+\delta)^{(p-1)}, \delta, 0\}$$

Logo, $a(G_\delta) = \delta$

■

O grafo G ilustrado a seguir exemplifica um grafo com 10 vértices e $a(G) = \delta(G) = 5$, pela proposição acima.

Figura 5: $G = (K_1 + K_4) \vee K_5$



Podemos ainda destacar que os grafos G_δ do resultado anterior, são grafos *threshold* e *claw-free*. A saber uma caracterização de um grafo *threshold* é que são livres de $C_4, 2K_2$ e P_4, enquanto um grafo é *claw-free* quando é livre da garra $K_1 \vee 3K_1$.

De fato, considerando $G_\delta = (K_1 + K_p) \vee K_\delta$, pela própria construção temos que G_δ é cografo e, portanto, livre de P_4. Vamos verificar as possibilidades de grafos com 4 vértices induzidos por G_δ. Podemos particionar os vértices de $G_\delta = (K_1 + K_p) \vee K_\delta$ seguindo sua construção, ou seja, definimos v como o vértice referente ao K_1, o conjunto $\mathcal{A}$ formado pelos p vértices referentes ao K_p, por fim $\mathcal{B}$ o conjunto de δ vértices referentes ao K_δ.

Seja $X \subset V(G_\delta)$ com quatro vértices e vamos denotar por $G_\delta[X]$ o subrafo induzido pelos vértices de X em G_δ. Note que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ forma um conjunto de vértices totalmente adjacentes, então se X possui 3 ou 4 vértices de $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ temos que $G_\delta[X] \neq C_4$, $G_\delta[X] \neq K_1 \vee 3K_1$ e $G_\delta[X] \neq 2K_2$. Então X deveria conter no máximo 2 vértices de $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, como só existe um vértice de $V(G_\delta)$ que não está em $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, então não existe subconjunto X tal que $G_\delta[X] = C_4$, $G_\delta[X] = K_1 \vee 3K_1$ ou $G_\delta[X] = 2K_2$. Logo o grafo G_δ é *threshold* e *claw-free.*

4. Conclusão

Este trabalho foi motivado pela importância da conectividade algébrica, não apenas para a Teoria Espectral de Grafos, mas também por suas aplicações. Em específico, neste texto, realizamos a maximização da conectividade algébrica, motivados pela otimização dos métodos de controle de formação de veículos. Apresentamos caracterizações de grafos que atendem a maximização do invariante, cujos resultados foram obtidos com auxílio de filtragem de grafos a partir do software *Graph Filter*. Conseguimos garantir que a$(G) = n - 2$ apenas no caso em que $a(G) = \delta(G) = n - 2$; em seguida caracterizamos todos os grafos com $a(G) = n - 3$, mostrando que não há grafo com $n - 2 < a(G) < n - 3$. Na sequência, também caracterizamos os grafos com $n - 4 < a(G) < n - 3$, sendo possível definir o valor exato de $a(G)$ para cada caso e, ainda, mostrar que existem apenas $n - 3$ valores distintos que a invariante pode assumir. Por fim, foi construímos uma família infinita de grafos que satisfazem $a(G) = \delta(G)$.

Para trabalhos futuros, propomos a busca pela maximização da conectividade algébrica, que em sequência, pode se estender aos demais valores iguais ou menores que $n - 4$. Além de uma possível busca por essa maximização restrita à determinadas condições, como já realizado em outros trabalhos da área.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio do IF Sudeste MG – *Campus* Juiz de Fora, CNPq e FAPEMIG.

Referências

Abreu, N. M. M. (2007). "Old and New Results on Algebraic Connectivity of Graphs." *Linear Algebra and Its Applications* 423 (1): 53–73. https://doi.org/10.1016/j.laa.2006.08.017.

Brouwer, AE, and WH Haemers. (2011). "Spectra of Graphs." Springer Science & Business Media.

Castro L B, and Jones A A. (2021). "Graph Filter 2.0: Nova Versão Do Software Para Filtragem de Grafos." In *Anais Do LIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*. Campinas: Galoá. https://proceedings.science/sbpo-series/sbpo-2021/papers/graph-filter-2-0--nova-versao-do--software-para-filtragem-de-grafos. Acessado: 30-06-22.

Fax, J.A., and Murray, R.M. (2004). "Information Flow and Cooperative Control of Vehicle Formations." *IEEE Transactions on Automatic Control* 49 (9): 1465–76. https://doi.org/10.1109/TAC.2004.834433.

Fiedler, M. (1973). "Algebraic Connectivity of Graphs." *Czechoslovak Mathematical Journal* 23 (2): 298–305. https://doi.org/10.21136/CMJ.1973.101168.

Graph Filter. (2020). "Graph Filter." GitHub Repository. 2020. https://github.com/GraphFilter/GraphFilter. Acessado: 30-06-22.

Kolokolnikov, T. (2015). "Maximizing Algebraic Connectivity for Certain Families of Graphs." *Linear Algebra and Its Applications* 471 (April): 122–40. https://doi.org/10.1016/j.laa.2014.12.023.

Li, G, Hao, Z. F., Huang H. and Wei H. (2018). "Maximizing Algebraic Connectivity via Minimum Degree and Maximum Distance." *IEEE Access* 6: 41249–55. https://doi.org/10.1109/ACCESS.2018.2857411.

Merris, R. (1998). "Laplacian Graph Eigenvectors." *Linear Algebra and Its Applications* 278 (1–3): 221–36. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(97)10080-5.

Ogiwara, K., Fukami T., and Takahashi N. (2017). "Maximizing Algebraic Connectivity in the Space of Graphs With a Fixed Number of Vertices and Edges." *IEEE Transactions on Control of Network Systems* 4 (2): 359–68. https://doi.org/10.1109/TCNS.2015.2503561.

Saber, R. O. and Murray, R. M. (2003). "Consensus Protocols for Networks of Dynamic Agents." In *Proceedings of the 2003 American Control Conference, 2003.*, 951–56. IEEE. https://doi.org/10.1109/ACC.2003.1239709.