

AHP WEB: UMA PLATAFORMA WEB PARA TOMADA DE DECISÃO MULTICRITÉRIO

Elana Souza Carrapateira

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso do Sul
Rua Pedro de Medeiros, 941, Popular Velha, Corumbá/MS
elanasouza4@gmail.com

Mikaella Pierre Paulo

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso do Sul
Rua Pedro de Medeiros, 941, Bairro - Popular Velha, Corumbá - MS, 79310-110
mikaella.paulo@estudante.ifms.edu.br

Luiz Sergio Velasques Urquiza Junior

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso do Sul
Rua Pedro de Medeiros, 941, Popular Velha, Corumbá/MS
luiz.urquiza@ifms.edu.br

Rafael Verão Francozo

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso do Sul
Rua Pedro de Medeiros, 941, Popular Velha, Corumbá/MS
rafael.francozo@ifms.edu.br

RESUMO

O *Analytic Hierarchy Process* é um método baseado em comparações par a par mais largamente adotados na literatura em problemas de análise de decisão multicritério. No AHP problemas que envolvem uma grande quantidade de critérios ou alternativas implicam um esforço para realizar todos os julgamentos de forma consistente. Este artigo apresenta o desenvolvimento de uma aplicação baseada em Web para utilização de uma versão simplificada do AHP que demanda $n - 1$ comparações entre os critérios ou alternativas. O modelo foi baseado na linearização dos julgamentos do AHP ao fixar a razão de inconsistência como 0. Adicionalmente o decisor pode realizar revisões dos julgamentos calculados de forma automática de modo que possa, conscientemente, realizar um julgamento com uma razão de inconsistência. Os resultados indicam uma aplicação robusta, competitiva que permite reduzir o esforço de julgamentos e inconsistências ao mesmo tempo que mantém o controle do problema com o decisor.

PALAVRAS CHAVE. Multicritério. *Software*. Comparações par a par.

Tópicos (indique, em ordem de PRIORIDADE, o(s) tópicos(s) de seu artigo)

ABSTRACT

The *Analytic Hierarchy Process* is a method based on pairwise comparisons most widely adopted in the literature in multicriteria decision analysis problems. In AHP problems involving

a large number of criteria or alternatives involve an effort to perform all judgments consistently. This paper presents the development of a Web-based application to use a simplified version of the AHP that demands $n - 1$ comparisons among criteria or alternatives. The model was based on linearizing the AHP judgments by setting the inconsistency ratio to 0. Additionally the decision maker can perform automatic reviews of the calculated judgments so that he can consciously make a judgment with an inconsistency ratio. The results indicate a robust, competitive application that allows reducing the effort of judgments and inconsistencies while keeping control of the problem with the decision maker.

KEYWORDS. Multicriteria. Software. Pairwise comparisons.

Paper topics (indicate in order of PRIORITY the paper topic(s))

1. Introdução

Analytic Hierarchy Process (AHP) é baseado em uma hierarquia onde o principal foco é avaliar alternativas e critérios à luz de um dado objetivo de modo a mitigar inconsistência do decisor na avaliação final. É um método de tomada de decisão que você pode usar para priorizar e selecionar seus projetos. Esta é uma importante ferramenta para estabelecer pesos em indicadores de um problema devido à capacidade de incorporar e considerar decisões e critérios do pesquisador para a relação de importância entre os indicadores Lima [2018]

Embora largamente adotado em processos de tomada de decisão multicritério, o AHP carece de ferramentas on-line que facilitem sua adoção em um processo colaborativo de apoio à tomada de decisão. O mundo já vivenciou vários processos de automatização em várias áreas principalmente na área da computação, nesse processo de tomada de decisão não podia ser diferente, pois envolve problemas que são baseados em operações matemáticas que em muitos casos são complexos e demorados.

Para a utilização do método AHP alguns problemas de preferências são levantados logo o problema é estruturado como hierarquia usando comparações para escolher uma alternativa mais relevante e, posteriormente, sofre um processo de priorização. Saaty [1991] explica que priorização envolve explicitar julgamentos de questões de dominância de um elemento sobre outro quando comparados a uma prioridade.

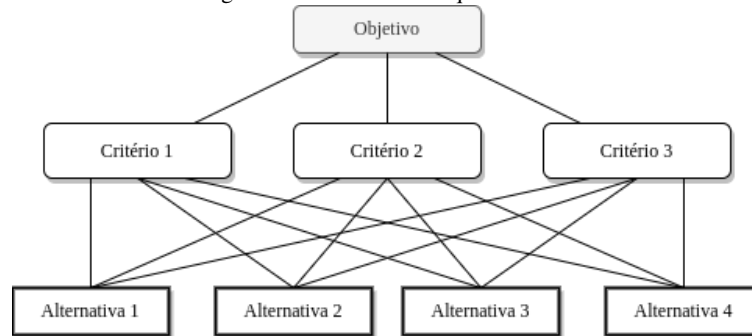
O desenvolvimento de tal aplicação será realizada a partir de estudos relacionados à área de decisão multicritério. O AHP não conta com ferramentas online que facilitem sua adoção em um processo colaborativo de apoio à tomada de decisão. A aplicação apresentará os resultados das comparações entre critérios e alternativas de um determinado objetivo com base em preferências do usuário.

2. *Analytic Hierarchy Process*

Métodos de Apoio Multicritério à Decisão (AMD) consistem em um conjunto de procedimentos metódicos, utilizados para avaliar os conjuntos de critérios e subcritérios, para obtenção de dados e alcançar o objetivo proposto pelo estudo (Saaty, 2008 apud Rocha, 2021). Tais métodos são utilizados para auxiliar o processo da tomada de decisões, estruturada através do pensamento dedutivo e indutivo Silva et al. [2010].

O AMD *Analytic Hierarchy Process* (AHP) foi desenvolvido por Thomas L. Saaty em 1980, decompõe um problema de decisão em níveis hierárquicos de modo a facilitar sua compreensão Silva et al. [1999]. A estrutura do AHP informa o objetivo de decisão no topo da hierarquia, seguido dos critérios de avaliação (e eventuais sub-critérios) e as alternativas na base como apresentado na Figura 1 (Banuelas, 2004).

Figura 1: Estrutura Hierárquica do AHP



O AHP decompõe um problema de decisão complexo em vários pequenos problemas que podem ser resolvidos por meio de comparações par a par. Os critérios são julgados par a par em relação ao objetivo e as alternativas são julgadas com relação aos critérios Brunelli [2014]. Os valores atribuídos nos julgamentos são realizados com auxílio da escala fundamental de Saaty apresentada na Tabela 2 [Saaty, 2008; Brunelli, 2014].

Tabela 1: Escala Fundamental de Saaty

Descrição da Preferência	Valor
Indiferente	1
Preferência Moderada	3
Preferência Forte	5
Preferência Muito Forte	7
Preferência Extrema	9

Na escala fundamental de Saaty os valores 2, 4, 6 e 8 representam julgamentos intermediários entre os principais [Saaty, 2008]. O conjunto de julgamentos resulta em uma matriz de comparações $A = (x_{ij})_{n \times n}$ onde x_{ij} representa a preferência de um decisor para um critério (ou alternativa) i com relação a um j conforme apresentado na expressão Brunelli [2014].

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ 1/x_{21} & 1 & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/x_{d1} & 1/x_{d2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Na matriz A cada posição na linha e coluna representa um critério a ser comparado com outro, a diagonal principal sempre terá valor 1 pois trata-se da comparação de um critério com ele próprio. Há também a reciprocidade, por exemplo admitindo que x_{12} receba valor 3 estamos informando que o critério 1 é moderadamente preferível ao critério 2 e a reciprocidade é expressa pelo valor de $1/3$ em x_{21} .

Uma vez realizado os julgamentos obtém-se o vetor de prioridade e realiza-se o cálculo de consistência para avaliar se o julgamento do decisor é coerente. O vetor prioridade é calculado a partir das médias dos valores normalizados dos julgamentos de cada critério. O valor normalizado z para um critério i com relação a um outro critério j é dado por:

$$z_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{i=1}^n x_{ij}} \quad (2)$$

Onde n é o total de critérios (ou linhas) da matriz de julgamentos. Por fim cada elemento do vetor de prioridades w^T é obtido pela média dos valores normalizados dos julgamentos de cada critério, conforme a expressão 3.

$$w_i = \frac{\sum_{j=1}^n z_{ij}}{n} \quad (3)$$

O cálculo da consistência dos julgamentos é realizado em duas etapas. Primeiro calcula-se o índice de inconsistência da matriz de julgamentos A conforme indicado na expressão 4.

$$CI(A) = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1} \quad (4)$$

Onde λ_{max} é o autovalor representado pelo produto do vetor de prioridades w^T pela matriz de julgamentos A . A segunda etapa é calcular a razão de inconsistência da matriz de julgamentos A $CR(A)$ conforme indicado na expressão 5.

$$CR(A) = \frac{CI(A)}{RI_n} \quad (5)$$

Onde RI_n é um valor estimado fornecido por Saaty de acordo com a ordem da matriz e apresentado na Tabela 2.

Tabela 2: Valores para razão de inconsistência

n	3	4	5	6	7	8	9	10
RI_n	0,5247	0,8816	1,1086	1,2479	1,3417	1,4057	1,4499	1,4854

Saaty [1991] sugere que um valor de $CR(A)$ maior ou igual a 0,1 (10%) indica uma razão de inconsistência significativa e os julgamentos devem ser revistos.

Uma desvantagem do AHP ocorre quando o problema de decisão possui um volume muito grande de critérios ou alternativas a serem avaliadas. Uma matriz de julgamentos par a par muito extensa implica uma dificuldade em realizar as comparações sem que um nível de inconsistência seja obtido. A quantidade de comparações em cada matriz é igual a $\frac{n^2-n}{2}$ onde n é a quantidade de itens (critérios, subcritérios ou alternativas) a serem comparados.

Em um problema de decisão no escopo do AHP com 10 critérios e 10 alternativas, serão necessários 495 julgamentos. A Figura 2 apresenta a quantidade julgamentos necessários em função da quantidade de critérios e alternativas.

Figura 2: Quantidade de comparações no AHP
Número de Alternativas

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	7	13	21	31	43	57	73	91
3	6	12	21	33	48	66	87	111	138
4	10	18	30	46	66	90	118	150	186
5	15	25	40	60	85	115	150	190	235
6	21	33	51	75	105	141	183	231	285
7	28	42	63	91	126	168	217	273	336
8	36	52	76	108	148	196	252	316	388
9	45	63	90	126	171	225	288	360	441
10	55	75	105	145	195	255	325	405	495

Fonte: [Vasconcelos e Mota, 2014, p. 456]

Um grande número de comparações implica em uma dificuldade em manter a consistência dos julgamentos e consequente necessidade de revisão pelo decisor. Outra dificuldade associada com a consistência dos julgamentos está relacionada com a própria escala fundamental de Saaty. Considerando um problema de decisão com 3 critérios e com julgamentos do decisor para $x_{12} = 9$ e $x_{13} = 1/9$ não haveria valor, dentro dos limites da escala de Saaty, para x_{23} que não implicasse em um determinado grau de inconsistência. Nesse caso o valor mais adequado é $x_{23} = 1/9$ mas iria implicar em uma inconsistência superior a 50%. Para obter uma inconsistência nula seria necessário fazer $x_{23} = \frac{x_{13}}{x_{12}} = \frac{1}{81}$.

Alternativas para reduzir a quantidade de comparações no AHP é um tema recorrente na literatura correlata e alguns exemplos estão disponíveis em: Harker [1987]; Vasconcelos e Mota [2014]; Vasconcelos e Maria de Miranda Mota [2019]; Gavião et al. [2020]; Leal [2020]. Entretanto tais soluções nem sempre estão disponíveis nos *softwares* mais populares para uso do AHP como Super Decision e Expert Choice o que faz com que tais soluções fiquem restritas ao meio acadêmico.

A proposta apresentada neste estudo permite que o decisor faça apenas $n - 1$ julgamentos para alcançar um resultado com taxa de inconsistência igual a 0. Também permite que o decisor revise e modifique os julgamentos de modo que possa realizar comparações conscientemente inconsistentes. Tais procedimentos são realizados por meio de um *software* web desenvolvido para esta finalidade.

3. Procedimentos Metodológicos

Este estudo foi desenvolvido ao longo de 3 etapas: elaboração do modelo matemático para; desenvolvimento do *software* e; testes e validação.

3.1. Modelo Proposto

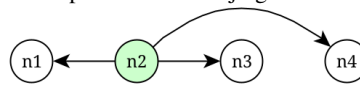
Dentro da estrutura hierárquica do AHP um conjunto de critérios, sub-critérios ou alternativas (daqui em diante chamados simplesmente de vértices) no mesmo nível são organizados em forma de um matriz quadrada com ordem igual a quantidade de vértices a serem comparados. Os n valores da diagonal principal representam a comparação de um vértice com ele próprio portanto são sempre 1. Abaixo da diagonal principal são os valores recíprocos dos que estão acima – e representam os julgamentos do decisor. A Figura 3 mostra um exemplo de uma matriz de julgamentos de ordem 4.

Figura 3: Exemplo de matriz de julgamentos de ordem 4

	n_1	n_2	n_3	n_4
n_1	1	x_{12}	x_{13}	x_{14}
n_2	$1/x_{12}$	1	x_{23}	x_{24}
n_3	$1/x_{13}$	$1/x_{23}$	1	x_{34}
n_4	$1/x_{14}$	$1/x_{24}$	$1/x_{34}$	1

Na Figura 3 os valores x_{12} , x_{13} , x_{14} , x_{23} , x_{24} e x_{34} são aqueles que devem receber um julgamento do decisor. Desse modo a quantidade de julgamentos é equivalente a $\frac{n^2-n}{2}$. Alternativamente este estudo propõe a comparação de um vértice (escolhido pelo decisor) com os demais como ilustrado na Figura 4.

Figura 4: Exemplo de matriz de julgamentos de ordem 4



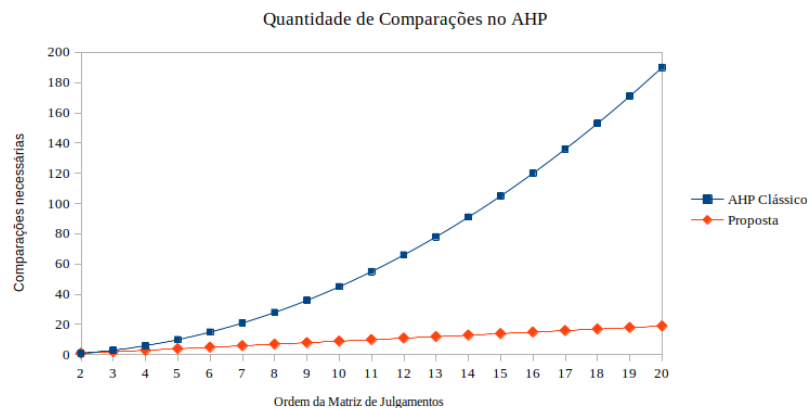
Neste caso o decisor escolhe um vértice p e realiza as comparações com os $n - 1$ vértices restantes. Os demais julgamentos são calculados com base nessas comparações.

A título de exemplo, admitindo que em uma matriz de ordem 4, caso o decisor escolha o primeiro vértice para realizar as comparações teremos a seguinte matriz de julgamentos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ 1/x_{12} & 1 & x_{13}/x_{12} & x_{14}/x_{12} \\ 1/x_{13} & (x_{13}/x_{12})^{-1} & 1 & x_{14}/x_{13} \\ 1/x_{14} & (x_{14}/x_{12})^{-1} & (x_{14}/x_{13})^{-1} & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Desse modo a inconsistência sempre será 0 e a quantidade de comparações necessárias será menor. Entretanto, os resultados calculados não necessariamente ficarão dentro dos limites da escala de Saaty. Tais resultados poderão variar dentro de um intervalo fechado $I = [1/81 \dots 81]$. A Figura 5 apresenta um gráfico comparativo entre o total de julgamentos demandados pelo AHP e a proposta deste estudo.

Figura 5: Comparação entre a quantidade de julgamentos necessários no AHP e a Proposta deste estudo



Problemas de decisão que envolvam uma quantidade muito grande de critérios e alternativas podem desestimular os participantes em utilizar o AHP devido ao volume de julgamentos necessários assim como realizar revisões necessárias para adequar os julgamentos dentro dos limites da uma taxa de inconsistência proposto por Saaty de 10%.

Desse modo o modelo proposto permite uma tomada de decisão mais rápida e mais consistente. Adicionalmente o decisor pode realizar revisões nos julgamentos automáticos. A revisão pode implicar em alguma taxa de inconsistência mas nesse caso o decisor estará consciente que está realizando um julgamento inconsistente, tendo sua preferência soberana em relação ao método.

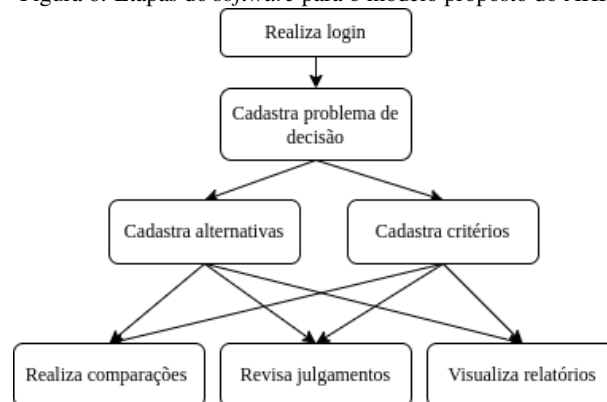
Para viabilizar a proposta deste estudo foi desenvolvido um *software* de natureza web descrito a seguir.

3.2. Software para o Modelo Proposto

O *software* elaborado visa facilitar o uso da abordagem proposta. Foi desenvolvido utilizando a linguagem de programação PHP, o *framework* Laravel e banco de dados PostgreSQL. A versão atual do sistema está hospedada em um servidor de *cloud* o que permite que o sistema seja utilizado a partir de um navegador web através de um computador pessoal ou dispositivo móvel. O sistema está acessível pela URL: <https://ahpweb.net/>.

O fluxograma a seguir (em forma de estrutura hierárquica) apresenta as etapas do sistema.

Figura 6: Etapas do *software* para o modelo proposto do AHP



Em primeiro lugar o usuário realiza login, assim seus problemas de decisão ficam separados dos demais usuários. É possível realizar login social com contas no Github ou Google. Em seguida o usuário deve cadastrar um problema de decisão informando um título para ele e em seguida cadastrar critérios e alternativas. A versão atual não permite adição de sub-critérios.

Após os cadastros o usuário poderá realizar as $n - 1$ comparações entre os critérios e alternativas. Será habilitado também a visualização de 3 níveis de relatórios: gráfico; numérico com os valores dos julgamentos em cada matriz e; relatório simplificado que permite ao usuário realizar a revisão dos julgamentos, neste relatório é possível visualizar a taxa de inconsistência atual.

3.3. Testes e validação

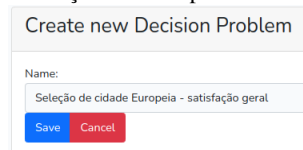
A validação foi realizada por meio de comparações com os resultados obtidos no modelo proposto com o disponível em [Brunelli, 2014] sobre problema de seleção da cidade Européia.

4. Resultados

A tela inicial do sistema proposto, chamado daqui em diante de AHP-WEB, possui apenas um menu com um botão *About* com informações gerais sobre o sistema e atualizações recentes e um botão para realizar o login. Após efetuar o login será habilitado mais dois botões: *My Decision Problems* que mostra os problemas de decisão já cadastrados e; *New Decision Problem* para cadastro de um novo problema.

Após efetuar o login deve-se clicar em *New Decision Problem* para cadastrar o problema e, no formulário que surgir, cadastrar o nome do problema conforme indicado na Figura 7.

Figura 7: Criação de novo problema de decisão



Create new Decision Problem

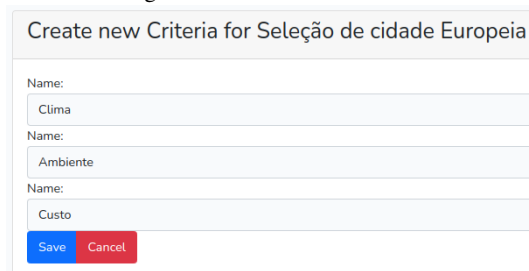
Name:

Seleção de cidade Europeia - satisfação geral

Save Cancel

Após cadastrar o problema o usuário será direcionado para a tela da lista de problemas onde deve clicar em *Criteria* para cadastrar os critérios. Na tela de cadastro de critérios deve clicar em *New Criterion* e escolher a quantidade de critérios que deseja cadastrar, um formulário será exibido para cadastro dos nomes dos critérios conforme indicado na Figura 8

Figura 8: Cadastro de critérios



Create new Criteria for Seleção de cidade Europeia

Name:

Clima

Name:

Ambiente

Name:

Custo

Save Cancel

O próximo passo é cadastrar as alternativas — de modo similar ao cadastro dos critérios. Após o cadastro dos critérios e alternativas o decisor pode clicar no botão group e adicionar contas de e-mail de outros eventuais decisores para o caso de decisão em grupo. A decisão em grupo é realizada no escopo da agregação individual das prioridades Forman e Peniwati [1998]. O proprietário do problema de decisão pode, inclusive, realizar um julgamento entre os decisores para definir uma constante de escala sobre seu peso na decisão.

Com os critérios e alternativas cadastrados o usuário deve clicar novamente em *Criteria* e em *Alternatives* para proceder com os julgamentos. Em seguida o usuário escolhe um dos critérios (ou alternativas) para realizar os $n - 1$ julgamentos e clica no botão *Comparisons* como mostra a Figura 9.

Figura 9: Cadastro de alternativas

Criteria from Decision Problem: Seleção de cidade Europeia

#	Description	Operations
43	Clima	Comparisons Remove
44	Ambiente	Comparisons Remove
45	Custo	Comparisons Remove

Neste exemplo foi escolhido o critério Clima para comparar com os demais. O usuário será conduzido ao formulário de julgamento dos critérios como mostra a Figura 10.

Figura 10: Julgamento entre os critérios

In respect to *Seleção de cidade Europeia - satisfação geral*

Clima x Ambiente	1/2 - Intermediate judgment
Clima x Custo	1/4 - Intermediate judgment

[Save](#) [Cancel](#)

O julgamento das alternativas é similar, entretanto é realizado em função de cada um dos critérios como mostra a Figura 11. Os julgamentos (tanto dos critérios quanto das alternativas) seguiram os mesmos valores disponíveis em [Brunelli, 2014, p. 8].

Figura 11: Julgamento entre as alternativas

In respect to *Clima*

Barcelona x Reykjavik	1 - Barcelona is indifferent to Reykjavik
Barcelona x Rome	4 - Intermediate judgment

In respect to *Ambiente*

Barcelona x Reykjavik	2 - Intermediate judgment
Barcelona x Rome	6 - Intermediate judgment

In respect to *Custo*

Barcelona x Reykjavik	1/2 - Intermediate judgment
Barcelona x Rome	1/8 - Intermediate judgment

[Save](#) [Cancel](#)

Após realizar os julgamentos o usuário pode visualizar os relatórios por meio do botão *Report*. O primeiro relatório exibido é o gráfico que deverá ser similar ao mostrado na Figura 12

Figura 12: Resultados gráficos



No exemplo de Brunelli [2014] o vetor de prioridades resultou em 0.287, 0.253, 0.460 que são os mesmos valores apresentados para as prioridades das cidades da Figura 12, o que indica que no exemplo do autor a inconsistência é nula.

O relatório disponível em *Numerical Results* apresenta as matrizes com os valores numéricos para os julgamentos assim como os valores de λ_{max} o índice e a taxa de consistência. Também permite ao decisor clicar em qualquer um dos valores para modificar os julgamentos, mesmo que implique em alguma inconsistência. Essa tela de resultados é apresentada na Figura 13.

Figura 13: Matriz numérica

Criteria				
Criteria	Clima	Ambiente	Custo	Priority Vector
Clima	1	1/2	1/4	0.143
Ambiente	2	1	1/2	0.286
Custo	4	2	1	0.571
λ max: 3, Consistency Index: 0, Consistency Rate: 0 (0%)				
Alternatives				
Clima	Roma	Barcelona	Reykjavik	Priority Vector
Roma	1	1	4	0.444
Barcelona	1	1	4	0.444
Reykjavik	1/4	1/4	1	0.111
λ max: 3, Consistency Index: 0, Consistency Rate: 0 (0%)				
Ambiente	Roma	Barcelona	Reykjavik	Priority Vector
Roma	1	2	6	0.6
Barcelona	1/2	1	3	0.3
Reykjavik	1/6	1/3	1	0.1
λ max: 3, Consistency Index: 0, Consistency Rate: 0 (0%)				
Custo	Roma	Barcelona	Reykjavik	Priority Vector
Roma	1	1/2	1/8	0.091
Barcelona	2	1	1/4	0.182
Reykjavik	8	4	1	0.727
λ max: 3, Consistency Index: 0, Consistency Rate: 0 (0%)				

5. Conclusões e Trabalhos Futuros

O AHP é largamente utilizado na literatura nos mais diversos problemas de decisão desde a década de 1980. Ao longo de quase 50 anos de desenvolvimento várias versões alternativas e melhoramentos foram adicionados. Entretanto ainda carece de mais *softwares* para auxiliar o seu uso e das versões adicionadas.

Os principais *softwares* para uso do AHP (Super Decisions e Expert Choice) possuem limitações conhecidas, como versões exclusivas para o Sistema Operacional Windows, necessidade de registro e aquisição de licenças de uso. Há ainda pacotes disponíveis para a linguagem de programação R, mas naturalmente demanda conhecimentos nesta linguagem específica.

O *software* proposto é uma aplicação web que pode ser acessada de computadores e dispositivos móveis, demandando somente conexão com a internet e um navegador. A aplicação permite os julgamentos de forma rápida e com redução das inconsistências e oferece ao decisor o poder de ajustar seus julgamentos de modo que assumam valores inconsistentes mas de forma consciente do decisor.

A versão apresentada neste documento carece de melhorias as quais pretende-se abordar em trabalhos futuros tais como: possibilidade de adição de níveis de sub-critérios; análise de sensibilidade; tomada de decisão em grupo e; uso do AHP com *ratings*. Entretanto trata-se de um sistema funcional em sua proposta e que pode contribuir para facilitar a utilização do AHP em diversos contextos.

Referências

- Brunelli, M. (2014). *Introduction to the analytic hierarchy process*. Springer.
- Forman, E. e Peniwati, K. (1998). Aggregating individual judgments and priorities with the analytic hierarchy process. *European Journal of Operational Research*, 108(1):165–169. ISSN 0377-2217. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221797002440>.
- Gavião, L. O., Lima, G. B. A., e de Almada Garcia, P. A. (2020). Procedimento de redução das avaliações do ahp por transitividade da escala verbal de saaty. *Engenharia de Produção: Além Dos Produtos e Sistemas Produtivos*, edited by Elói Martins Senhoras,, p. 88–102.
- Harker, P. T. (1987). Incomplete pairwise comparisons in the analytic hierarchy process. *Mathematical modelling*, 9(11):837–848.
- Leal, J. E. (2020). Ahp-express: A simplified version of the analytical hierarchy process method. *MethodsX*, 7:100748.
- Lima, V. (2018). Mapeamento da qualidade ambiental urbana com o uso da técnica ahp (analytic hierarchy process). *Braz Geographical J.*, 9(1):60–72.
- Saaty, T. L. (1991). Some mathematical concepts of the analytic hierarchy process. *Behaviormetrika*, 18(29):1–9.
- Saaty, T. L. (2008). Decision making with the analytic hierarchy process. *International Journal of Services Sciences*, 1(1):83–98.
- Silva, A. B., Souza, C. D., e Santos, E. F. (1999). Título de um relatório técnico. Relatórios de Pesquisa em Engenharia de Produção 4, Universidade Z.
- Silva, A. C., Belderrain, M. C. N., e Pantoja, F. C. M. (2010). Prioritization of r&d projects in the aerospace sector: Ahp method with ratings. *Journal of Aerospace Technology and Management*, 2:339–348.
- Vasconcelos, G. R. e Maria de Miranda Mota, C. (2019). Exploring multicriteria elicitation model based on pairwise comparisons: Building an interactive preference adjustment algorithm. *Mathematical Problems in Engineering*, 2019.
- Vasconcelos, G. R. e Mota, C. (2014). Modelo multicritério de comparação par a par baseado no ahp: proposta de linearização do processo de comparação. *XLVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*.