

A conformabilidade dos grafos subcúbicos

Luerbio Faria, Mauro Nigro e Diana Sasaki

Universidade do Estado do Rio de Janeiro

R. São Francisco Xavier, 524 - Maracanã, Rio de Janeiro - RJ

{luerbio, diana.sasaki}@ime.uerj.br, mauro.nigro@pos.ime.uerj.br

RESUMO

Uma k -coloração de vértices de um grafo $G = (V, E)$ é uma atribuição de k cores aos vértices de G , tal que vértices adjacentes têm cores diferentes. A deficiência de G é $def(G) = \sum_{v \in V} (\Delta - d(v))$. Um grafo G é conformable se G possui uma $(\Delta + 1)$ -coloração de vértices em que o número de classes de cor (incluindo classes de cor vazias) com paridade diferente da paridade de $|V|$ é no máximo $def(G)$. Neste trabalho estabelecemos a classificação da classe dos grafos subcúbicos conformable. Provamos que um grafo G é subcúbico não-conformable se, e somente se, G é uma união disjunta entre um número ímpar de componentes de K_4 , ou G é uma união disjunta entre um número ímpar de componentes de K_4 com o prisma triangular, ou G é uma união disjunta entre um número par de componentes de K_4 com o $K_{3,3}$. Nossa construção conduz a um algoritmo em tempo polinomial.

PALAVRAS CHAVE. Coloração conformable, Grafos subcúbicos, Coloração total.

TAG - Teoria e Algoritmos em Grafos; OC - Otimização Combinatória

ABSTRACT

A k -vertex coloring of $G = (V, E)$ is an assignment of k colors to the vertices of G so that adjacent vertices have different colors. The deficiency of G is $def(G) = \sum_{v \in V} (\Delta - d(v))$. A graph G is conformable if G has a $(\Delta + 1)$ -vertex coloring φ in which the number of color classes (including empty color classes) with different parity of $|V|$ is at most $def(G)$. In this paper, we established the classification of subcubic conformable graph class. We prove that a subcubic graph G is non-conformable, if and only if, G is either a disjoint union of an odd number of connected components of K_4 , or G is a disjoint union of an odd number of connected components of K_4 and one triangular prism graph, or G is a disjoint union of an even number of connected components of K_4 and one $K_{3,3}$. Our construction leads to a polynomial-time algorithm.

KEYWORDS. Conformable Coloring. Subcubic Graph. Total Coloring.

TAG - Theory and Algorithms in Graphs; CO - Combinatorial Optimization

1. Introdução

Seja Δ o grau máximo de G . Um grafo G é dito *subcúbico*, se $\Delta = 3$. Se G é 3-regular, dizemos que G é cúbico. A classe de grafos cúbicos desempenha um papel fundamental na teoria dos grafos. Grafos cúbicos foram introduzidos por Peter Guthrie Tait em 1878 e por Julius Petersen em 1891. A importância desses grafos está relacionada a três tópicos fundamentais na teoria dos grafos: os problemas de emparelhamento máximo, das quatro cores e o de planaridade. Além disso, esta classe serve como modelo matemático na química. Greenlaw e Petreschi [1995] produziram um trabalho sobre a história de grafos cúbicos.

Trabalhamos com grafos simples e a maior parte das definições e notações podem ser encontradas em Bondy e Murty [2008]. Uma k -coloração de vértices é uma atribuição de k cores aos vértices tal que vértices adjacentes têm cores diferentes. As cores são denotadas por números e uma classe de cor $i \in \mathbb{N}$ por C_i . A *paridade* de C_i é par se $|C_i|$ é divisível por 2 e é ímpar caso contrário. Chamamos C_i de *classe de cor par*, quando a paridade de C_i é par e de *classe de cor ímpar* caso contrário. Brooks [1941] provou que todo grafo G que não é um ciclo ímpar nem um completo possui uma Δ -coloração de vértices. Esta coloração é chamada de *coloração de Brooks* e é obtida em tempo polinomial.

Teorema 1.1 (Brooks [1941]). *Se G não é um ciclo ímpar nem um grafo completo, então G possui uma Δ -coloração de vértices.*

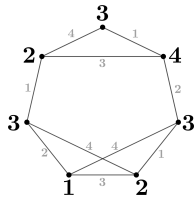
Uma k -coloração total de G é uma atribuição de cores aos vértices e às arestas de G tal que elementos adjacentes ou incidentes têm cores diferentes. O *número cromático total* $\chi''(G)$ é o menor k tal que G possui uma k -coloração total. Sánchez-Arroyo [1989] mostrou que o problema de decisão do número cromático total é NP -completo mesmo para grafos cúbicos bipartidos. Behzad [1965] e Vizing [1968] conjecturaram independentemente que o número cromático total de um grafo G está delimitado entre $\Delta + 1$ e $\Delta + 2$. Esta conjectura é chamada de Conjectura da Coloração Total. Um grafo G é dito *Tipo 1*, se $\chi''(G) = \Delta + 1$ e é dito *Tipo 2*, se $\chi''(G) = \Delta + 2$. Por consequência, se esta conjectura é válida, é possível classificar os grafos de acordo com seu número cromático total em Tipo 1 ou Tipo 2.

Brooks [1941] mostrou que o problema de COLORAÇÃO DE VÉRTICES é linear para grafos subcúbicos. Leven e Galil [1981] e Sánchez-Arroyo [1989] mostraram, respectivamente, que os problemas COLORAÇÃO DE ARESTAS e COLORAÇÃO TOTAL são NP -completos para grafos cúbicos. Chetwynd e Hilton [1988] observaram que uma $(\Delta + 1)$ -coloração de vértices especial é herdada de uma $(\Delta + 1)$ -coloração total de um grafo G , os autores chamaram esta coloração de *conformable*. Uma importante relação de um grafo G ser Tipo 1 com a conformabilidade de G foi estabelecida no Teorema 1.2.

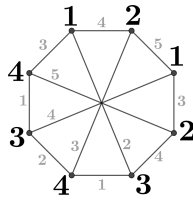
Teorema 1.2 (Chetwynd e Hilton [1988]). *Se G é Tipo 1, então G é conformable.*

A *deficiência* de G é a soma das diferenças entre o grau máximo Δ de G e o grau de cada vértice v em G , isto é, $def(G) = \sum_{v \in V} (\Delta - d(v))$. Um grafo G é *conformable* se possui uma $(\Delta + 1)$ -coloração de vértices φ em que o número de classes de cor (incluindo classes de cor vazias) com paridade diferente da paridade de $|V|$ é no máximo $def(G)$. Nesse caso, chamamos φ de *coloração conformable*. Um grafo G é chamado de *não-conformable* se não possuir uma coloração conformable. Note que em especial para grafos regulares tem-se que $def(G) = 0$, e por consequência, para φ ser conformable, toda classe de cor deve ter a mesma paridade da ordem do grafo regular G . A *união disjunta* $G = G_1 \cup G_2$ entre os grafos G_1 e G_2 consiste em $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ e em $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$. As Figuras 1a e 1b apresentam dois

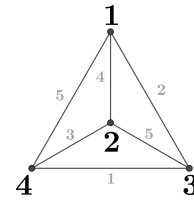
exemplos de grafos conformable com suas respectivas colorações. A Figura 1c apresenta o grafo não-conformable K_4 com a única 4-coloração de vértices.



(a) O grafo subcúbico com 7 vértices e $def(G) = 1$ que é Tipo 1, e consequentemente é conformable.



(b) O grafo Möbius Ladder com 8 vértices que é conformable, porém é Tipo 2.



(c) O grafo completo K_4 que é não-conformable, e consequentemente Tipo 2.

Figura 1: Exemplos de grafos com classificação de suas conformabilidades.

Recentemente, Zorzi et al. [2021] classificaram o problema de conformabilidade para grafos potência de ciclo contribuindo para a classificação da coloração total dos grafos potência de ciclo proposta por Campos e de Mello [2007]. Neste trabalho, nós classificamos o problema de conformabilidade para grafos subcúbicos. Na Seção 2, provamos o caso conexo, isto é, G é um grafo subcúbico conexo e não-conformable se, e somente se, G é K_4 ou $K_{3,3}$. Na Seção 3, provamos diversas propriedades úteis para o caso de grafos subcúbicos desconexos. Na Seção 4, introduzimos um novo tipo de coloração de vértices que auxilia na obtenção de uma coloração conformable e por fim provamos que G é não-conformable se, e somente se, G é uma união disjunta entre um número ímpar de componentes de K_4 , ou G é uma união disjunta entre um número ímpar de componentes de K_4 com um único prisma triangular, ou G é uma união disjunta entre um número par de componentes de K_4 com um único $K_{3,3}$.

2. Conformabilidade de grafos subcúbicos conexos

Nesta seção, provamos que G é conexo e não-conformable se, e somente se, G é K_4 ou $K_{3,3}$. A estratégia para estabelecer a classificação da conformabilidade da classe dos subcúbicos conexos consiste em usar o algoritmo polinomial de Brooks [1941] para produzir uma 3-coloração de vértices para um grafo subcúbico conexo que não é o K_4 . Prosseguimos provando que se G não é o $K_{3,3}$, então esta 3-coloração de vértices pode ser modificada de forma a obter uma coloração conformable para G . A seguir, apresentamos um resultado bem conhecido de Hilton e Hind [2002] e provamos uma propriedade auxiliar que será usada nesse processo.

Lema 2.1 (Hilton e Hind [2002]). *A deficiência $def(G)$ de G é ímpar se, e somente se, Δ e $|V|$ são ambos ímpares.*

Lema 2.2. *Seja G um grafo conexo subcúbico que não é o completo K_4 nem o bipartido completo $K_{3,3}$ com $def(G) \leq 1$ e uma 3-coloração de vértices φ com classes de cor C_1 , C_2 e C_3 obtidas através de uma coloração de Brooks. Se C_1 e C_3 são classes de cor ímpares, então existe um vértice $v \in C_1$ que não é adjacente a um vértice $u \in C_3$.*

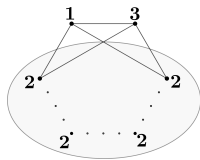
Demonstração. Suponha por absurdo que não existe um vértice $v \in C_1$ que não é adjacente a um vértice $u \in C_3$. Então cada vértice $v \in C_1$ é adjacente aos vértices $u \in C_3$.

Se $|V|$ é par, então pelo Lema 2.1 $def(G) = 0$ e G é cúbico. Portanto, as classes de cor ímpares C_1 e C_3 têm tamanho no máximo 3. Se considerarmos que ambas as classes C_1 e C_3 são unitárias, então existe um vértice $w \in C_2$ com $d(w) < 3$, pois todo vértice $w \in C_2$ tem no

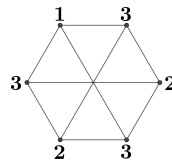
máximo duas adjacências: com os vértices de cor 1 e 3, assim conclui-se que G não é cúbico (veja a Figura 2a). Se apenas uma classe de cor é unitária, isto é, $|\mathcal{C}_1| = 1$, então temos que o vértice $v \in \mathcal{C}_1$ é adjacente a três vértices em $\mathcal{C}_3$. Então existem no máximo dois vértices em $\mathcal{C}_2$ para G ser cúbico. Porém, este grafo resulta no $K_{3,3}$, pois $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$ formam uma bipartição em G e os vértices em $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ são todos adjacentes aos vértices em $\mathcal{C}_3$ (veja a Figura 2b). Analogamente, se ambas as classes de cor ímpares forem de tamanho 3, tem-se que G é o $K_{3,3}$. Como em quaisquer dos casos temos uma contradição, concluímos que existe um vértice $v \in \mathcal{C}_1$ que não é adjacente a um vértice $u \in \mathcal{C}_3$.

Se $|V|$ é ímpar, então pelo Lema 2.1 $def(G) = 1$. Assim G tem um vértice $a \in V$ com $d(a) = 2$. Como G é subcúbico, pela hipótese de absurdo, as classes de cor ímpares $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_3$ têm tamanho no máximo 3. Analogamente ao caso de $|V|$ par, suponha que ambas as classes $\mathcal{C}_1 = \{v\}$ e $\mathcal{C}_3 = \{u\}$ são unitárias. Note que se $d(v) = d(u) = 3$, então existem pelo menos dois vértices de cor 2 com grau 2, contrariando que $def(G) = 1$ (veja a Figura 2a). Suponha que u ou v tenha grau igual a 2. Assuma que $d(v) = 2$. Então existe um vértice w de cor 2 com $N(w) \subset \{u, v\}$, onde $d(w) \leq 2$. O que é uma contradição, porque $def(G) = 1$, $d(v) = 2$ e $d(w) \leq 2$ (veja a Figura 2a). Se apenas uma classe de cor ímpar é unitária, assumamos que $\mathcal{C}_1 = \{v\}$. Pela hipótese de absurdo, temos que v é adjacente aos três vértices de cor 3 (veja a Figura 2c). Portanto os vértices de cor 2 são adjacentes somente aos vértices de cor 3. Como $def(G) = 1$, existem 5 ou 6 arestas com uma extremidade em $\mathcal{C}_3$ e outra extremidade em $\mathcal{C}_2$. Como $|V|$ é ímpar, então $\mathcal{C}_2$ é uma classe de cor ímpar. Se $|\mathcal{C}_2| = 1$, então existem 2 ou 3 arestas com extremidade em $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$, portanto o tamanho $|\mathcal{C}_2| \geq 3$. Dessa forma, existem pelo menos 8 ou 9 arestas com extremidade em $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$, uma contradição. Por fim, se $|\mathcal{C}_1| = |\mathcal{C}_3| = 3$, então G é o $K_{3,3}$, contradição final.

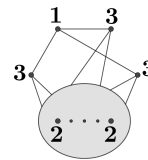
Portanto, existe um vértice $v \in \mathcal{C}_1$ que não é adjacente a um vértice $u \in \mathcal{C}_3$. $\square$



(a) Ambas as classes de cor ímpares $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_3$ são unitárias.



(b) Apenas uma classe de cor ímpar é unitária para G cúbico.



(c) Apenas uma classe de cor ímpar é unitária para G subcúbico com deficiência 1.

Figura 2: Três casos possíveis para o subcúbico G que nos leva a concluir que existe um vértice $v \in \mathcal{C}_1$ que não é adjacente a um vértice $u \in \mathcal{C}_3$.

Teorema 2.3. G é um grafo subcúbico não-conformable conexo se, e somente se, G é o completo K_4 ou G é o bipartido completo $K_{3,3}$.

Demonstração. Suponha que G seja o K_4 ou o $K_{3,3}$. Como $\Delta = 3$ e G é cúbico, então $def(G) = 0$. Se G é o K_4 , então G é não-conformable, pois toda 4-coloração de vértices têm todas as classes de cor unitárias e assim ímpares. Se G é o $K_{3,3}$, então G é não-conformable, pois em toda 4-coloração de vértices de G existem no mínimo 2 classes de cor ímpares. De fato, seja X e Y a bipartição do $K_{3,3}$. Note que se desejamos que cada classe de cor seja par em uma 4-coloração de vértices do $K_{3,3}$, então esta só poderá ter no máximo tamanho 2, pois as partes da bipartição têm tamanho 3. Assim, ao atribuir a mesma cor a dois vértices $a, b \in X$, existirá um único vértice em $X \setminus \{a, b\}$ que não poderá pertencer a uma classe de cor par, pois este é adjacente a todos os vértices

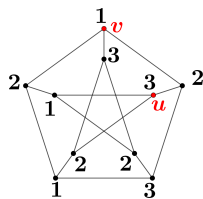
em Y . Como este argumento é análogo à parte Y , temos que toda 4-coloração de vértices em G tem no mínimo 2 classes de cor ímpares.

Suponha que G não seja o K_4 nem seja o $K_{3,3}$. Pelo Teorema de Brooks [1941], existe uma 3-coloração de vértices φ , que pode ser obtida em tempo polinomial para G . Sejam C_1, C_2 e C_3 as classes de cor de φ . A partir de agora, construímos uma 4-coloração de vértices ϕ com as classes de cor C_1, C_2 e C_3 de φ e uma nova classe de cor C_4 .

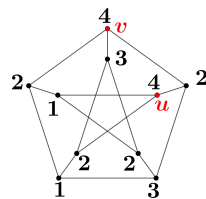
Se $|V|$ é par, então pelo Lema 2.1, a deficiência de G é par. Além disso, em qualquer 3-coloração de vértices ou cada classe de cor é par, ou existe uma única classe de cor par, pois $|V|$ é par. Para o primeiro caso, a 4-coloração de vértices ϕ com $C_4 = \emptyset$ é uma coloração conformable, pois todas as classes de cor são pares.

Para o segundo caso, considere C_2 a única classe de cor par em φ . Se $def(G) > 0$, então $def(G) \geq 2$ porque $def(G)$ é par. Assim ϕ é uma coloração conformable, pois o número de classes de cor com paridade diferente (classes de cor ímpares) da paridade de $|V|$ é 2. Portanto, devemos considerar $def(G) = 0$, ou seja, G é cúbico. Siga um exemplo na Figura 3. Como C_1 e C_3 são e $def(G) = 0$, pelo Lema 2.2 existe um vértice $v \in C_1$ que não é adjacente a um vértice $u \in C_3$. Podemos atribuir a cor 4 aos vértices v e u em ϕ , resultando que ϕ é uma 4-coloração de vértices, onde $C_1 \setminus \{v\}$ e $C_3 \setminus \{u\}$ têm tamanho par e $|C_4| = 2$. Como por hipótese, C_2 é uma classe de cor par, resulta que toda classe de cor têm mesma paridade que $|V|$, resultando que G é conformable.

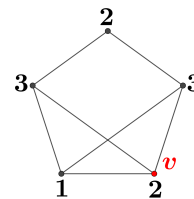
Se $|V|$ é ímpar, então pelo Lema 2.1 a deficiência de G é ímpar. Além disso, em qualquer 3-coloração de vértices ou cada classe de cor é ímpar, ou existe uma única classe de cor ímpar, pois $|V|$ é ímpar. No primeiro caso, temos que a 4-coloração de vértices ϕ com $C_4 = \emptyset$ é conformable, pois o número de classes de cor com paridade diferente de $|V|$ é 1 e a deficiência de G é ímpar, isto é, $def(G) \geq 1$. Para o segundo caso, note que existe ao menos uma classe de cor par não-vazia, pois se as duas classes de cor pares fossem vazias, o grafo G seria um conjunto de vértices isolados. Seja C_2 uma classe de cor par não-vazia e C_1 a única classe de cor ímpar de φ . Siga um exemplo na Figura 4. Tome $v \in C_2$ e atribua ao vértice v a cor 4 em ϕ . Como $C_2 \setminus \{v\}$ é ímpar e $|C_4| = 1$, temos que apenas C_3 difere da paridade de $|V|$, isto é, C_3 é par. Como $def(G) \geq 1$, conclui-se que G é conformable. $\square$



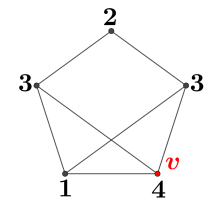
(a) Aplicação de uma coloração de Brooks para um grafo cúbico.



(b) Transformação da coloração de (3a) para uma coloração conformable.



(a) Aplicação de uma coloração de Brooks para um grafo subcúbico com $def(G) = 1$.



(b) Transformação da coloração em (4a) para uma coloração conformable.

Figura 3: Exemplo de aplicação do algoritmo de coloração conformable do Teorema 2.3 para $|V|$ par.

Figura 4: Exemplo de aplicação do algoritmo de coloração conformable do Teorema 2.3 para $|V|$ ímpar.

A demonstração do Teorema 2.3 conduz a um algoritmo de tempo polinomial para produzir uma coloração conformable para um grafo subcúbico G , se G não é o K_4 nem o $K_{3,3}$. A Figura 3

mostra um exemplo deste processo para o grafo de Petersen e a Figura 4 mostra um exemplo para um grafo com $|V|$ ímpar e $def(G) = 1$.

3. A conformabilidade dos grafos subcúbicos desconexos

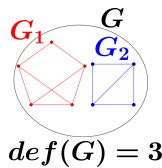
Nesta seção, investigamos o problema de conformabilidade para os grafos subcúbicos desconexos. Apesar destes resultados não serem motivados ou aplicados ao problema de coloração total, é interessante de trabalharmos na perspectiva de resolução do problema de conformabilidade.

A seguir, provamos que a união disjunta entre grafos conformable é conformable. Note que nossa investigação é restrita a grafos com $def(G) < 4$. Caso contrário, temos que G é conformable, como vemos.

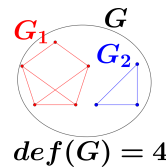
Observação 3.1. Se G é um grafo subcúbico e $def(G) \geq 4$, então G é conformable.

Demonstração. Seja G subcúbico, isto é, $\Delta = 3$. Como $def(G) \geq 4$, qualquer 4-coloração de vértices trivialmente discorda da paridade de $|V|$ em no máximo $def(G)$ cores. $\square$

Assim, mostramos que o grafo subcúbico G , que é união disjunta de grafos conformable, é conformable. Note que se $G = G_1 \cup G_2$, então ao menos uma das suas componentes conexas possui grau máximo 3. Se ambas componentes conexas são subcúbicas então $def(G) = def(G_1) + def(G_2)$ (Figura 5a). Se apenas G_1 possui grau máximo 3, então $def(G) = def(G_1) + \sum_{v \in V(G_2)} (\Delta(G_1) - d_{G_2}(v))$ (Figura 5b).



(a) Deficiência dos grafos subcúbicos.



(b) Deficiência com apenas um grafo subcúbico.

Figura 5: Dois possíveis casos da deficiência da união disjunta entre grafos conexos.

Um fato importante está no caso onde apenas G_1 possui grau máximo 3, pois resultará que G_1 é cúbico e G_2 é o C_3 ou o grafo trivial. Além disso, nesse caso se G_1 é conformable, temos que G é conformable.

Lema 3.2. Se $G = G_1 \cup G_2$, $\Delta(G_1) = 3$, $\Delta(G_2) \leq 2$ e $def(G) \leq 3$, então o grafo G_1 é cúbico, $G_2 = C_3$ ou G_2 é o grafo trivial. Além disso, se G_1 é conformable, então G é conformable.

Demonstração. Observe que G_2 é a união de ciclos com caminhos, pois $\Delta(G_2) \leq 2$.

1. Se G_2 tem uma componente conexa que é um ciclo, então necessariamente G_2 é o C_3 e é única, pois cada vértice em G_2 aumenta a deficiência de G em uma unidade (Figura 6a). Caso contrário, $def(G) > 3$.
2. Se G_2 tem um vértice isolado, então necessariamente G_2 é o grafo trivial, pois $\Delta(G_1) = 3$ e, se $V(G_2) = \{v\}$, resulta que $def(G) = 3$. Caso contrário, $def(G) > 3$ (Figura 6b).
3. Se G_2 tem algum caminho P_k com $k > 1$, então $def(G) \geq 4$, pois existem dois vértices u e v em G_2 de grau 1 (Figura 6c).

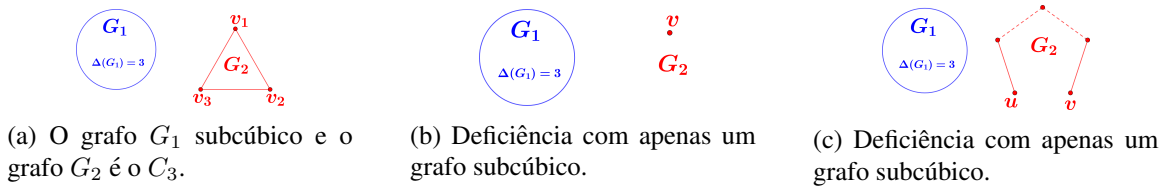


Figura 6: Os três casos que nos faz concluir que G_1 é cúbico.

Em quaisquer dos casos G_1 é um grafo cúbico, pois $def(G) \leq 3$.

Agora provamos que se G_1 é conformable, então G é conformable. Seja φ_1 uma coloração conformable para G_1 com classes de cor $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ e $\mathcal{C}_4$. Seja φ_2 uma coloração de vértices com classes de cor $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ e $\mathcal{D}_4$ com pelo menos uma classe de cor vazia, digamos $\mathcal{D}_4$, para G_2 . Como G_1 é cúbico e conformable, as quatro classes de cor de φ_1 são pares. Considere os dois casos:

1. Se $G_2 = C_3$, então $|V(G_1 \cup G_2)|$ é ímpar. Assim, a união, duas a duas, das classes de cor de φ_1 e de φ_2 , isto é, $\mathcal{C}_i \cup \mathcal{D}_i$, com $1 \leq i \leq 4$, produzem uma coloração φ com três classes de cor ímpares e uma par. Conclui-se que φ é conformable, pois φ discorda em apenas uma cor da paridade de $|V(G)|$, $def(G) = 3$, e $|V(G)|$ é ímpar.
2. Se G_2 é o grafo trivial, então $|V(G_1 \cup G_2)|$ é ímpar. Assim, a união, duas a duas, das classes de cor de φ_1 e de φ_2 , isto é, $\mathcal{C}_i \cup \mathcal{D}_i$, com $1 \leq i \leq 4$, produzem uma coloração φ com três classes de cor pares e uma ímpar. Conclui-se que φ é conformable, pois φ discorda em três cores da paridade de $|V(G)|$, $def(G) = 3$, e $|V(G)|$ é ímpar.

Portanto, se G_1 é conformable, então $G = G_1 \cup G_2$ é conformable. $\square$

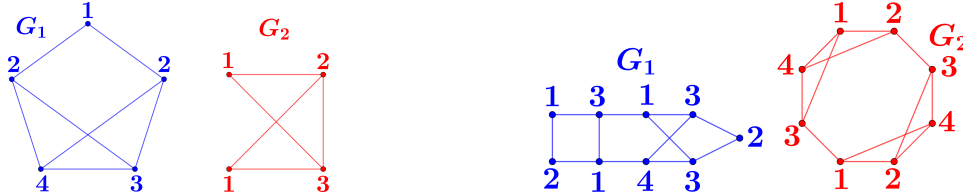
Lema 3.3. *O grafo subcúbico obtido através da união disjunta entre dois grafos conformable é conformable.*

Demonstração. Sejam G_1 e G_2 grafos conformable onde no mínimo um destes é subcúbico e sejam φ_1 e φ_2 suas colorações conformable, respectivamente. Considere G a união disjunta entre G_1 e G_2 . Se $def(G) \geq 4$, pela Observação 3.1 temos que G é conformable. Logo, devemos considerar que $def(G) \leq 3$. Vamos usar φ_1 e φ_2 para definir uma coloração conformable φ para G . A prova é dividida em dois casos, ou ambos G_1 e G_2 são subcúbicos ou apenas G_1 é subcúbico.

Considere que G_1 e G_2 são grafos subcúbicos. Note que $def(G) = def(G_1) + def(G_2)$ e considere os seguintes casos:

1. Se $def(G) = 3$, então $def(G_1) = 1$ e $def(G_2) = 2$ ou $def(G_1) = 3$ e $def(G_2) = 0$. Em qualquer caso, do Lema 2.1 extraímos que em um grafo subcúbico, $def(G)$ e $|V(G)|$ possuem a mesma paridade. Assim, $|V(G_1)|$ é ímpar e $|V(G_2)|$ é par, concluindo-se que $|V(G)|$ é ímpar.
 - (a) Suponha que $def(G_1) = 1$ e $def(G_2) = 2$. Assim, φ_1 tem pelo menos três classes de cor ímpares e φ_2 tem pelo menos duas classes de cor pares. Logo, existe uma classe de cor ímpar $\mathcal{C}_1$ em φ_1 e uma classe de cor par $\mathcal{D}_1$ em φ_2 , as quais podemos unir $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{D}_1$ definindo uma classe de cor ímpar. As demais classes de φ_1 e φ_2 são unidas, duas a duas, em qualquer ordem, definindo uma coloração conformable φ para G , pois $def(G) = 3$ e $|V(G)|$ é ímpar. A Figura 7a apresenta um exemplo para este caso.

- (b) Suponha que $def(G_1) = 3$ e $def(G_2) = 0$. Como G_2 é cúbico e conformable, cada classe de cor em φ_2 de G_2 é par e como G_1 é conformable e de ordem ímpar, existe ao menos uma classe de cor ímpar em φ_1 . Portanto, como no caso anterior, existe uma classe de cor ímpar C_1 em φ_1 e uma classe de cor par D_1 em φ_2 , podemos uní-las $C_1 \cup D_1$ para definir uma classe de cor ímpar. As demais classes de φ_1 e φ_2 são unidas, duas a duas, em qualquer ordem, definindo uma coloração conformable φ para G , pois $def(G) = 3$ e $|V(G)|$ é ímpar. A Figura 7b apresenta um exemplo para este caso.

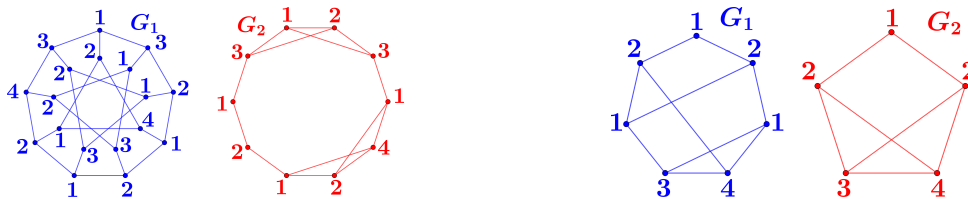


- (a) Uma coloração conformable para G_1 e G_2 com $def(G_1) = 1$ e $def(G_2) = 2$, onde $C_i \cup D_i$ com $1 \leq i \leq 4$ define uma coloração conformable para G . (b) Uma coloração conformable para G_1 e G_2 com $def(G_1) = 3$ e $def(G_2) = 0$, onde $C_i \cup D_i$ com $1 \leq i \leq 4$ define uma coloração conformable para G .

Figura 7: Coloração conformable para grafos com $def(G) = 3$.

2. Se $def(G) = 2$, então $def(G_1) = 0$ e $def(G_2) = 2$ ou $def(G_1) = 1$ e $def(G_2) = 1$. Pelo Lema 2.1, temos que ambos $V(G_1)$ e $V(G_2)$ possuem a mesma paridade e portanto $|V(G)|$ é par.

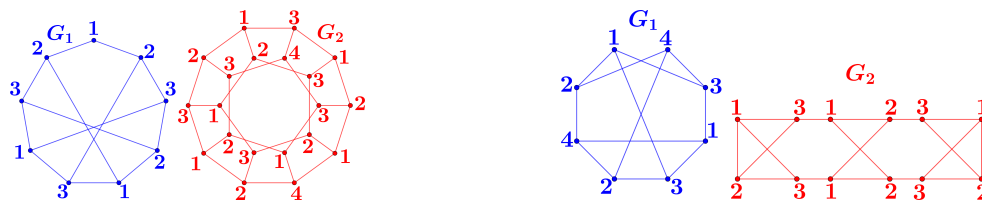
- (a) Suponha que $def(G_1) = 0$ e $def(G_2) = 2$. Como G_1 é cúbico, cada classe de cor em φ_1 é par e como $def(G_2) = 2$, então existem no máximo duas classes de cor ímpares. Logo, uma união, duas a duas, das classes de cor de φ_1 com φ_2 , terá no máximo duas classes de cor ímpares, pois $def(G) = 2$ e $|V(G)|$ é par. Conclui-se que φ é conformable e portanto G é conformable. A Figura 8a apresenta um exemplo para este caso.
- (b) Suponha que $def(G_1) = 1$ e $def(G_2) = 1$. Pelo Lema 2.1 sabemos que $|V(G_1)|$ e $|V(G_2)|$ são ímpares. Assim, φ_1 e φ_2 têm, cada uma, pelo menos três classes de cor ímpares. Realizando a união, duas a duas, de cada classe de cor ímpar de φ_1 e de φ_2 e das duas demais classes, obtendo pelo menos três classes de cor pares, definimos uma coloração conformable φ para G , pois $def(G) = 2$ e $|V(G)|$ é par. A Figura 8b apresenta um exemplo para este caso.



- (a) Uma coloração conformable para G_1 e G_2 com $def(G_1) = 0$ e $def(G_2) = 2$ onde $C_i \cup D_i$ com $1 \leq i \leq 4$ define uma coloração conformable para G . (b) Uma coloração conformable para G_1 e G_2 com $def(G_1) = 1$ e $def(G_2) = 1$ onde $C_i \cup D_i$ com $1 \leq i \leq 4$ define uma coloração conformable para G .

Figura 8: Coloração conformable para grafos com $def(G) = 2$.

3. Se $def(G) = 1$, então $def(G_1) = 1$ e $def(G_2) = 0$. Temos pelo Lema 2.1 que $|V(G_1)|$ é ímpar e $|V(G_2)|$ é par e conclui-se que $|V(G)|$ é ímpar. Como G_2 é cúbico, então toda classe de cor de φ_2 é par. Como $def(G_1) = 1$ e $|V(G_1)|$ é ímpar, existem pelo menos três classes de cor ímpares em φ_1 . Logo a união, duas a duas, das três classes de cor ímpares de φ_1 com três das classes de cor pares de φ_2 e a união das demais duas classes, produzem uma coloração conformable φ para G , pois $def(G) = 1$ e $|V(G)|$ é ímpar. A Figura 9a apresenta um exemplo para este caso.
4. Se $def(G) = 0$, então $def(G_1) = 0$ e $def(G_2) = 0$. É imediato que G é conformable, pois G_1 e G_2 são cúbicos e possuem apenas classes de cor pares. A união, duas a duas, das classes de cor de φ_1 e de φ_2 produzem uma coloração conformable φ para G , pois cada classe de cor em φ é par. A Figura 9b apresenta um exemplo para este caso.



(a) Uma coloração conformable para G_1 e G_2 com $def(G_1) = 1$ e $def(G_2) = 0$, onde $C_i \cup D_i$ com $1 \leq i \leq 4$ define uma coloração conformable para G . (b) Uma coloração conformable para G_1 e G_2 com $def(G_1) = 0$ e $def(G_2) = 0$, onde $C_i \cup D_i$ com $1 \leq i \leq 4$ define uma coloração conformable para G .

Figura 9: Exemplos de coloração conformable para G com $def(G) = 1$ e $def(G) = 0$.

Se apenas G_1 é subcúbico, isto é, $\Delta(G_1) = 3$, então $\Delta(G_2) \leq 2$. Como $def(G) \leq 3$, pelo Lema 3.2, tem-se que G_1 é cúbico e $G_2 = C_3$ ou G_2 é o grafo trivial e, além disso, $G = G_1 \cup G_2$ é conformable. $\square$

Note que as argumentações no Lema 3.3 se baseiam essencialmente na definição de conformabilidade e na restrição da deficiência de G , isto é, $def(G) \leq 3$. Logo, é fácil ver que esta propriedade pode ser generalizada quando G possui n componentes conexas. Note também que o caso quando $\Delta(G_2) \leq 2$ no Lema 3.3 é válido até quando G_2 é não-conformable, pois $def(G) \geq 4$.

4. Coloração unconformable: uma coloração auxiliar para determinar conformabilidade de grafos desconexos

Nesta seção, introduzimos uma coloração de vértices que nos auxiliará na conformabilidade de grafos subcúbicos desconexos. Nos resultados anteriores sempre consideramos o caso das componentes conexas de G serem conformable e pelo Lema 3.3 concluímos que G é conformable. Porém, os resultados anteriores não são suficientes ao tratarmos da união disjunta onde um dos grafos é não-conformable, por exemplo, $G \cup K_4$ ou $G \cup K_{3,3}$, com G subcúbico.

Portanto, desenvolvemos uma outra coloração de vértices que nos auxiliou na prova de conformabilidade para essa situação. Por exemplo, considere um grafo $G = G_1 \cup K_4$ cúbico, onde G_1 não é o K_4 e nem o $K_{3,3}$. Pelo Teorema 2.3, tem-se que G_1 é conformable e assim G_1 possui uma 4-coloração de vértices φ tal que cada classe de cor de φ é par. Seja $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ uma 4-coloração de vértices que estende φ , isto é, $\varphi(v) = f(v)$, se $v \in V(G_1)$. Note que f não é uma coloração conformable, pois $|V(G)|$ é par e cada classe de cor de f é ímpar. Porém, se γ é uma 4-coloração de vértices para G_1 onde cada classe de cor é ímpar, a extensão $g: V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$

onde $\gamma(v) = g(v)$, se $v \in V(G_1)$, é conformable para G . A Figura 10b apresenta uma 4-coloração de vértices onde cada classe de cor é ímpar para o grafo prisma pentagonal P o que nos faz concluir que $P \cup K_4$ é conformable.

Um grafo G é *unconformable* se possui uma $(\Delta + 1)$ -coloração de vértices φ em que o número de classes de cor (incluindo classes de cor vazias) com paridade igual a paridade de $|V|$ é no máximo $def(G)$. Nesse caso, chamamos φ de *coloração unconformable*. Um grafo G é chamado de *não-unconformable* se não possuir uma coloração unconformable. A Figura 10 apresenta dois exemplos de grafos subcúbicos unconformable e o grafo prisma triangular que é não-unconformable e vemos a seguir que este é o único grafo subcúbico não-unconformable.

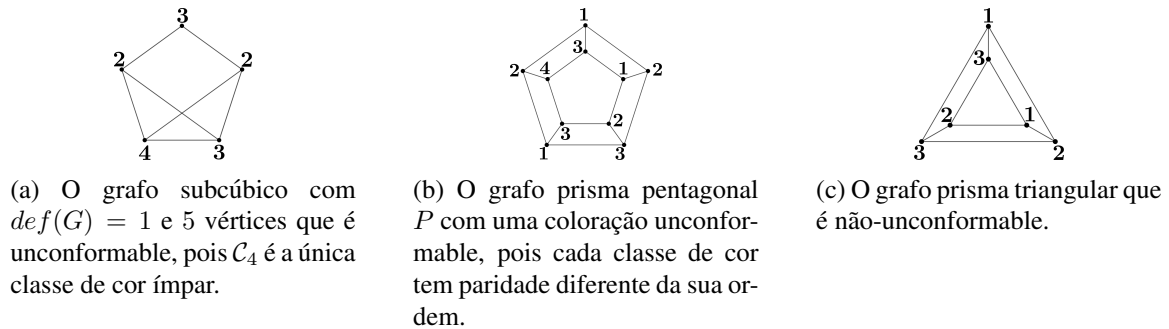


Figura 10: Exemplos de grafos com suas classificações de unconformabilidade.

Um resultado de coloração unconformable é que o grafo obtido da união disjunta entre grafos regulares unconformable é conformable.

Teorema 4.1. *Sejam dois grafos d -regulares G e H . Se G é unconformable e H é unconformable, então $G \cup H$ é conformable.*

Demonstração. Sejam π uma coloração unconformable para G e μ uma coloração unconformable para H . Considere os seguintes casos:

1. Se $|V(G)|$ é par e $|V(H)|$ é par, então $|V(G \cup H)|$ é par. Como G e H são unconformable e regulares, então todas as classes de cor de π e μ são ímpares. Sejam $C_1, C_2, C_3, \dots, C_{d+1}$ as classes de cor de π e $D_1, D_2, D_3, \dots, D_{d+1}$ as classes de cor de μ . Logo, tomando a união, duas a duas, de C_i e D_i com $1 \leq i \leq d+1$ como uma coloração φ para $G \cup H$, temos que cada classe de cor de φ para $G \cup H$ é par. Isto é, $G \cup H$ é conformable.
2. Se $|V(G)|$ é ímpar e $|V(H)|$ é par, então $|V(G \cup H)|$ é ímpar. Como G e H são unconformable e regulares, então cada classe de cor de π é par e cada classe de cor de μ é ímpar. Sejam $C_1, C_2, C_3, \dots, C_{d+1}$ as classes de cor de π e $D_1, D_2, D_3, \dots, D_{d+1}$ as classes de cor de μ . Logo, tomando a união, duas a duas, de C_i e D_i com $1 \leq i \leq d+1$ como uma coloração para $G \cup H$, temos que cada classe de cor de φ para $G \cup H$ é ímpar. Isto é, $G \cup H$ é conformable.
3. Se $|V(G)|$ é par e $|V(H)|$ é ímpar, então observe que este caso é análogo ao Caso 2.
4. Se $|V(G)|$ é ímpar e $|V(H)|$ é ímpar, então $|V(G \cup H)|$ é par. Como G e H são unconformable e regulares, então todas as classes de cor de π e μ são pares. Sejam $C_1, C_2, C_3, \dots, C_{d+1}$ as classes de cor de π e $D_1, D_2, D_3, \dots, D_{d+1}$ as classes de cor de μ . Logo, tomando a união, duas a duas, de C_i e D_i com $1 \leq i \leq d+1$ como uma coloração para $G \cup H$, temos que cada classe de cor de φ para $G \cup H$ é par. Isto é, $G \cup H$ é conformable.

□

Devido ao limite de páginas deste trabalho, a prova do Teorema 4.2 será omitida e na prova do Teorema 4.3 consideramos apenas dois casos, com objetivo de expor a aplicação dos lemas e da coloração unconformable.

Teorema 4.2. *G é um grafo subcúbico não-unconformable conexo se, e somente se, G é o prisma triangular.*

Teorema 4.3. *G é um grafo subcúbico não-conformable, se e somente se:*

1. *G é uma união disjunta entre um número ímpar de componentes de K_4 ou;*
2. *G é uma união disjunta entre um número ímpar de componentes de K_4 com o prisma triangular ou;*
3. *G é uma união disjunta entre um número par de componentes de K_4 com o $K_{3,3}$.*

Esboço da Prova. Se G é conexo, então pelo Teorema 2.3 temos que G é conformable, exceto se G é o K_4 ou o $K_{3,3}$, isto é, G é a união disjunta de uma única componente de K_4 ou G é a união disjunta entre zero componentes de K_4 com o $K_{3,3}$. Logo, devemos considerar o caso do grafo G ser desconexo. Seja G um grafo subcúbico desconexo. Vamos descrever $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$, onde G_1 possui apenas componentes conexas que não são K_4 nem $K_{3,3}$, G_2 possui apenas componentes conexas isomorfas a K_4 , e G_3 possui apenas componentes conexas isomorfas a $K_{3,3}$. Veja que $def(G_2) = def(G_3) = 0$. Pela Observação 3.1, se $def(G_1) \geq 4$, então G é conformable. Dessa forma, vamos considerar $def(G_1) \leq 3$. Existem 7 casos possíveis de acordo com G_1 , G_2 e G_3 serem ou não vazios, porém apresentamos 2 casos.

1. Suponha que $G = G_1$. Pelo Teorema 2.3 e os Lemas 3.3 e 3.2, temos que G é conformable.
2. Suponha que $G = G_2 \cup G_3$. Observe que G é um grafo cúbico.
 - (a) Suponha que G_2 tenha um número ímpar λ de componentes conexas de K_4 .
 - i. Suponha que G_3 possua $\gamma = 1$ componentes conexas de $K_{3,3}$. Como G_2 é unconformable, pois cada classe de cor de G_2 é ímpar e $|V(G_2)|$ é par, e pelo Teorema 4.2, G_3 é unconformable. Logo, pelo Teorema 4.1, temos que G é conformable.
 - ii. Suponha que G_3 possua $\gamma > 1$ componentes conexas de $K_{3,3}$.
 - A. Suponha que $\gamma = 2$ e considere as colorações π e μ de $K_{3,3}$ apresentadas na Figura 11. Como cada classe de cor em 2 componentes de $K_{3,3}$ é ímpar e cada classe de cor de G_2 é ímpar, temos que G possui uma coloração conformable.
 - B. Suponha que $\gamma \geq 3$. Note que $G_2 \cup K_{3,3}$ é conformable e seja H o grafo formado pela união disjunta de $\gamma - 1 \geq 2$ componentes conexas de $K_{3,3}$. Construímos uma coloração conformable para H , com auxílio de π , μ e φ , apresentadas na Figura 11. Usando o Lema 3.3, temos que $G = G_2 \cup K_{3,3} \cup H = G_2 \cup G_3$ é conformable.
 - (b) Suponha que G_2 tenha um número par λ de componentes conexas de K_4 .

- i. Suponha que G_3 possua $\gamma = 1$ componentes conexas de $K_{3,3}$. Como $K_{3,3}$ possui no mínimo duas classes de cor ímpares e G_2 possui cada classe de cor de tamanho λ , isto é, par, temos que existirá ao menos uma classe de cor de $G_2 \cup G_3$ que é ímpar. Como $|V(G)|$ é par e $def(G) = 0$, temos que G é não-conformable.
- ii. Suponha que G_3 possua $\gamma \geq 2$ componentes conexas de $K_{3,3}$. Como G_2 é conformable e G_3 é conformable, então temos que pelo Lema 3.3, G é conformable.

□

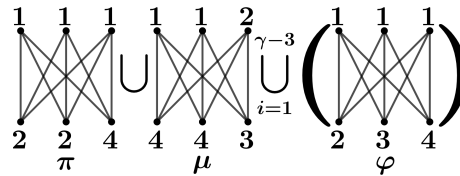


Figura 11: O grafo H com $\gamma - 1$ componentes conexas de $K_{3,3}$ com as colorações π , μ e φ .

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, do CNPq (406036/2021-7, 313797/2020-0, 308654/2018-8) e da FAPERJ (E26/201.360/2021 JCNE, E-26/010.002674/2019 ARC, E26/202.902/2018 CNE)

Referências

- Behzad, M. (1965). *Graphs and their chromatic numbers*. PhD thesis, Michigan State University.
- Bondy, J. e Murty, U. (2008). *Graph Theory*. Springer, New York.
- Brooks, R. L. (1941). On colouring the nodes of a network. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, p. 194–197.
- Campos, C. N. e de Mello, C. P. (2007). A result on the total colouring of powers of cycles. *Discrete Appl. Math.*, p. 585–597.
- Chetwynd, A. G. e Hilton, A. J. W. (1988). Some refinements of the total chromatic number conjecture. *Congr. Numer.*, p. 195–216. ISSN 0384-9864.
- Greenlaw, R. e Petreschi, R. (1995). Cubic graphs. *ACM Comput. Surv.*, 27(4):471–495. ISSN 0360-0300. URL <https://doi.org/10.1145/234782.234783>.
- Hilton, A. J. W. e Hind, H. R. (2002). Non-conformable subgraphs of non-conformable graphs. *Discrete Math.*, p. 203–224.
- Leven, D. e Galil, Z. (1981). NP-completeness of finding the chromatic index of regular graphs. *J. Algorithm*, p. 35–44.
- Sánchez-Arroyo, A. (1989). Determining the total colouring number is NP-hard. *Discrete Math.*, p. 315–319.
- Vizing, V. G. (1968). Some unsolved problems in graph theory. *Russ. Math. Surv.*, p. 125–141.
- Zorzi, A., Figueiredo, C., Machado, R., Zatesko, L., e Souza, U. (2021). Compositions, decompositions, and conformability for total coloring on power of cycle graphs. *Discrete Appl. Math.*