MODELO DE PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA EM DOIS ESTÁGIOS PARA UM PROBLEMA DE EMPACOTAMENTO IRREGULAR BIDIMENSIONAL COM INCERTEZA NA DEMANDA

Oliviana Xavier do Nascimento e Marina Andretta
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação,
Universidade de São Paulo - Campus São Carlos,
Av. Trabalhador São Carlense, 400, Centro, 13566-590, São Carlos - SP, Brasil.
oliviana@usp.br, andretta@icmc.usp.br

RESUMO

Este trabalho apresenta um modelo de programação estocástica em dois estágios para um problema de corte e empacotamento irregular bidimensional com incerteza na demanda. O modelo considera a demanda como uma variável aleatória discreta, aproximada por um conjunto de cenários e busca minimizar o custo esperado dado pelo custo de comprar faixa apenas no primeiro estágio e o valor esperado vindo da penalização por demandas não atendidas no segundo estágio. Experimentos computacionais iniciais indicam que a proposta produz soluções coerentes com o contexto investigado e que é vantajoso resolver o problema estocástico e considerar a aleatoriedade no problema.

PALAVRAS CHAVE. Problema de Empacotamento Irregular em Faixa Bidimensional, Incerteza na demanda, Programação Estocástica.

POI- PO na indústria. OC - Otimização combinatória.

ABSTRACT

This paper presents a two-stage stochastic programming model for a cutting and packing problem with demand uncertainty. The model considers demand as a discrete random variable, approximated by a set of scenarios and seeks to minimize the expected cost given by the cost of buying strip only in the first stage and the expected value coming from the penalty for unsatisfied demands in the second stage. Initial computational experiments indicate that the proposal produces solutions consistent with the investigated context and that it is advantageous to solve the stochastic problem and consider the randomness in the problem.

KEYWORDS. Two-dimensional Irregular Strip Packing. Demand uncertainty. Stochastic programming.

ORI - OR in Industry. CO - Combinatorial Optimization.

https://proceedings.science/p/157409?lang=pt-br

1. Introdução

Problemas de corte e empacotamento com itens irregulares buscam determinar como arranjar objetos menores de formato irregular dentro de objetos maiores, buscando alcançar um objetivo final. Tais problemas, na maioria das vezes, são resolvidos em suas formas determinísticas, isto é, sem levar em consideração as incertezas que podem surgir na prática.

Um tipo de incerteza que é comum a problemas de corte e empacotamento é com relação à demanda dos itens. Por exemplo, em problemas em que os itens irregulares bidimensionais são alocados à uma faixa, como é o caso do corte de tecido para a fabricação de roupas na indústria de vestuário, a incerteza na demanda dos itens impacta nas decisões de compra de faixa, principalmente nos casos em que a faixa para cortar os itens é adquirida antes do conhecimento do valor exato da demanda de cada tipo de item, pois se for comprado pouco comprimento de faixa e a demanda for alta, prejuízos ocorrerão por ter que comprar mais tecido com urgência ou a empresa deixará de ter ganhos por não ter material suficiente para atender toda a demanda em um determinado período. Da mesma forma, se muito comprimento de faixa for adquirido, a empresa pode ter prejuízo devido a itens não vendidos (itens em estoque). Logo, quando a incerteza na demanda é levada em consideração, o desafio passa a ser decidir como a demanda deve ser considerada (i. e. modelada) ao resolver tais problemas a fim de diminuir prejuízos relacionados, por exemplo, à falta de produtos para atender à demanda ou excesso de produtos por superestimar a demanda.

Um tipo de problema bastante abordado na literatura de problemas (determinísticos) de corte e empacotamento irregular bidimensional é o Problema de Empacotamento Irregular em Faixa Bidimensional (*Irregular Strip Packing Problem*, em inglês e aqui referenciado pela sigla 2ISP). Este problema considera um conjunto de tipos de itens irregulares, em que cada tipo de item possui uma demanda associada. O objetivo é alocar toda a demanda de itens irregulares em uma faixa ou placa de largura fixa e comprimento ilimitado, sem sobreposição, de forma a minimizar o comprimento utilizado. Outro exemplo de problema de corte e empacotamento com itens irregulares abordado pela literatura, mas em menor frequência, é o Problema da Mochila Irregular Bidimensional (*Irregular Knapsack Problem*, em inglês e aqui referenciado pela sigla 2IKP). A diferença entre o 2IKP e o 2ISP é que o 2IKP considera que a faixa possui comprimento e largura fixos e nem toda a demanda de itens precisa ser alocada à faixa. Assim, o objetivo do 2IKP é determinar quantos itens de cada tipo devem ser alocados à faixa, de forma que o valor total de itens alocados seja maximizado.

Ambos os problemas, apesar de serem NP-Difíceis [Garey e Johnson, 1979], devido à sua natureza combinatória, contam com abordagens heurísticas presentes hoje na literatura que são capazes de fornecer, em pouco tempo computacional, boas soluções para instâncias do problema contendo muitos itens. Exemplos de abordagens assim podem ser encontrados nos trabalhos de Gomes e Oliveira [2006], Egeblad et al. [2007], Bennell e Song [2010] e Mundim et al. [2017], para o 2ISP e em Crispin et al. [2005], Alves et al. [2012], Baldacci et al. [2014], Mundim et al. [2018] e Queiroz e Andretta [2020b], para o 2IKP. No campo das abordagens exatas, a maioria dos trabalhos são para o 2ISP. Tais trabalhos trazem modelagens para o problema, que são resolvidas por meio de pacotes de otimização. Contudo, tais abordagens não são capazes de resolver instâncias grandes, contendo muitos itens. Alguns exemplos de abordagens assim para o 2ISP são o Modelo de Pontos (ou *Dotted-board model*) de Toledo et al. [2013], o qual aloca os itens em uma malha de pontos discretos, o modelo de Cherri et al. [2016] que considera os itens não convexos como a união de suas partes convexas e os modelos de Cherri et al. [2019], que também se baseiam no Modelo de Pontos de Toledo et al. [2013] e propõem restrições de programação por restrições para o problema. Dentre esses trabalhos, o de Cherri et al. [2019] apresenta uma modelagem de programação por

https://proceedings.science/p/157409?lang=pt-br

restrições para o 2IKP derivada da modelagem apresentada para o 2ISP. Por fim, em Scheithauer e Terno [1993], é proposto um modelo de programação linear inteira para o 2IKP.

No entanto, esses trabalhos abordam tais problemas em suas formas determinísticas, isto é, sem levar em consideração as incertezas que podem surgir na prática. Quando há incerteza associada a algum dado desses problemas, soluções obtidas sem que essa incerteza seja considerada podem levar a soluções de baixa qualidade, ou até mesmo inviáveis, quando os dados incertos são de fato conhecidos.

O campo de pesquisa que envolve incerteza em problemas de empacotamento com itens irregulares é relativamente novo. Um exemplo de investigação nessa linha é o trabalho de Queiroz e Andretta [2022], o qual resolve o 2ISP com incerteza na demanda usando programação estocástica em dois estágios. No modelo proposto por Queiroz e Andretta [2022], é decidido, no primeiro estágio (antes do conhecimento do valor real da demanda), qual comprimento de faixa deve ser encomendada para cortar os itens. No segundo estágio (após o conhecimento do valor real da demanda), é decido quanto comprimento de faixa ainda deve ser adquirido para atender a demanda, caso o comprimento adquirido não seja suficiente para cortar toda a demanda. Comprar mais faixa após o conhecimento da demanda dos itens, no modelo de Queiroz e Andretta [2022], tem custo mais alto do que adquirir antes (isto é, no primeiro estágio). Para auxiliar na tomada de decisão de quanto comprimento adquirir no primeiro estágio, a demanda incerta de cada tipo de item é considerada como uma variável aleatória discreta, aproximada por um conjunto de cenários, em que cada cenário possui uma probabilidade de ocorrência associada. O comprimento a ser adquirido no primeiro estágio é aquele que minimiza o custo esperado total vindo do custo de comprar tal comprimento no primeiro estágio e o custo esperado de ter que adquirir mais comprimento no segundo estágio, caso necessário. Uma versão inicial do modelo de Queiroz e Andretta [2022] é apresentadado em Queiroz e Andretta [2020a]. Em Queiroz e Andretta [2020a], os itens cuja demanda é conhecida no primeiro estágio devem ser cortados obrigatoriamente no comprimento de faixa adquirido no primeiro estágio. Em Queiroz e Andretta [2022], tal condição não é levada em consideração, uma vez que as demandas de todos os tipos de item são conhecidas somente no segundo estágio.

Neste trabalho, também temos incerteza na demanda, porém supomos que um comprimento de faixa é adquirido no primeiro estágio e não é possível comprar mais no segundo estágio, o que acontece em casos reais em que o preparo da faixa demanda muito tempo, como, por exemplo, no corte de roupas com tecidos especiais, que requerem um tempo maior para a sua fabricação. Assim, o problema pode ser tratado usando programação estocástica em dois estágios, penalizando a demanda que não pode ser atendida no segundo estágio ao comprar uma quantidade específica de tecido no primeiro estágio. Para tanto, é proposto um modelo de programação estocástica em dois estágios, no qual, no primeiro estágio, é decido o comprimento de faixa que deve ser adquirido, e no segundo estágio, quando a demanda se torna conhecida, é decidido quais itens de cada tipo podem ser cortados na faixa e onde eles podem ser cortados. Caso seja adquirido um comprimento que não seja suficiente para cortar a demanda de todos os tipos de itens, a demanda não atendida por falta de material é vista como um valor que deixa de ser ganho pelo decisor e tal valor é penalizado no problema. A demanda é vista como uma variável aleatória discreta, aproximada por um conjunto de cenários, em que cada cenário possui uma probabilidade associada de ocorrer. O comprimento a ser adquirido no primeiro estágio é aquele que minimiza o custo total esperado vindo do custo de comprar tal comprimento no primeiro estágio e o custo esperado vindo da penalização por demandas não atendidas. Caso a demanda seja tal que todos os itens possam ser cortados e ainda sobre faixa, o prejuízo já é levado em consideração no modelo pelo valor pago pela faixa no primeiro estágio.

Em outras palavras, no segundo estágio, é resolvido um 2IKP para decidir quais itens devem ser cortados no comprimento aquirido no primeiro estágio de forma a minimizar o prejuízo relacionado aos itens não escolhidos para serem alocados no recipiente. O modelo de programação estocástica em dois estágios que é proposto aqui é NP-Difícil [Dyer e Stougie, 2006].

O trabalho está organizado em 6 seções. Na Seção 2, é apresentada a definição do problema, bem como seus aspectos geométricos. Na Seção 3, é apresentado o modelo de programação estocástica em dois estágios proposto para o problema. Na Seção 4, são discutidas as medidas utilizadas para avaliar o modelo estocástico. Na Seção 5, são apresentados e discutidos resultados dos experimentos numéricos preliminares realizados para avaliar o modelo proposto. Por fim, na Seção 6, são apresentadas as considerações finais e direções para pesquisas futuras.

2. Definição do problema

O problema tratado neste trabalho considera um conjunto I de tipos de itens irregulares e uma faixa de largura W e comprimento z a ser determinado. Considera-se que a faixa é posicionada em um sistema de coordenadas cartesiano, no qual o eixo x está associado ao comprimento da faixa e o eixo y à largura da faixa. O canto inferior esquerdo da faixa é posicionado em (0,0). Cada tipo de item i possui área a_i, demanda incerta $\tilde{d}_i$ e um vértice de referência $v_i = (v_i^x, v_i^y)$, que é aquele com menor coordenada y (em caso de ter mais de um vértice com a mesma menor coordenada y, opta-se pelo vértice que possuir a menor coordenada x). A distância entre o vértice mais à esquerda do item i e o vértice mais à direita é dada por r_i^x e a distância entre o vértice mais abaixo e o vértice mais acima é dada por r_i^y. A Figura 1a ilustra as medidas r_i^x e r_i^y e o vértice de referência para um item irregular, no caso, um triângulo.

A faixa é considerada discretizada. O conjunto de pontos em que cada item i pode ser colocado sem ultrapassar as dimensões da faixa é denominado *inner-fit polygon* do item i ou IFP_i. A Figura 1b ilustra o *IFP* para o item da Figura 1a. Para garantir que os itens não se sobreponham, é definido, para cada par de itens i e j, o NFP_{ij}. O NFP_{ij} indica o conjunto de pontos em o ponto de referência do item j não pode ser colocado, pois, se isso for feito, ocorre sobreposição entre i e j. A Figura 1c ilustra o NFP de dois itens (o triângulo da Figura 1a e um quadrado). Em Toledo et al. [2013] é descrito como são calculados o IFP_i e NFP_{ij}.

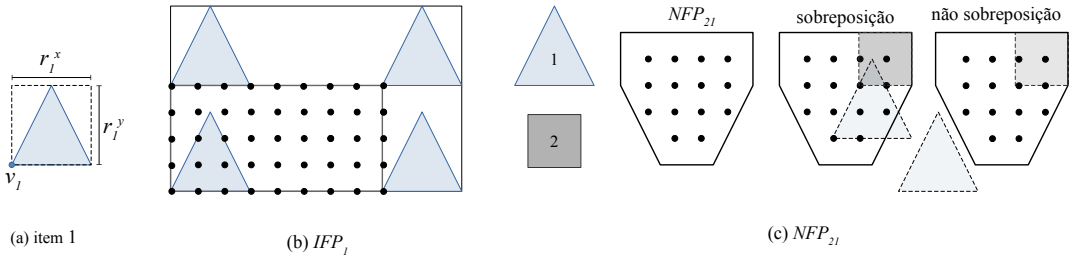


Figura 1: Exemplo para a representação do item, *IFP* e *NFP*.

A demanda incerta $\tilde{d}_i$ é aproximada por um conjunto Ω de cenários, em que cada cenário s tem probabilidade π_s. Assim, d_i^s representa a demanda do item no cenário s. O custo de uma unidade de área da faixa no primeiro estágio (momento t_0) é dado por c_0. A quantidade de itens de cada tipo i que não pode ser cortada no segundo estágio na faixa que foi adquirida no primeiro estágio em cada cenário s é denotada por y_i^s. Cada unidade do item i que não pode ser cortada no segundo estágio tem um peso R_i para o decisor. Aqui, R_i é considerado como o valor de venda do item i e é definido como um fator α definido pelo tomador de decisão multiplicado pela área a_i

https://proceedings.science/p/157409?lang=pt-br

do item i e pelo custo de uma unidade de área da faixa, isto é, $R_i = \alpha c_0 a_i$. Assim, o objetivo do problema é determinar o comprimento z de faixa que deve ser adquirido no primeiro estágio e que minimiza o custo esperado total dado pelo custo de comprar faixar no primeiro estágio ($c_0 W z$) e o custo esperado vindo da penalização por demandas não atendidas ($\sum_{s\in S}\sum_{i\in I}\pi_s R_i y_i^s$).

3. Modelo estocástico de dois estágios

O modelo de 2 estágios para lidar com a incerteza na demanda no 2ISP é definido em (1)-(8) e é baseado no modelo de Toledo et al. [2013] para a versão determinística do problema.

$$\text{Minimizar} \quad c_0 W z + Q(z,\xi) \tag{1}$$

$$\text{sujeita a} \quad z \geq 0, \tag{2}$$

em que

$$Q(z,\xi) = \text{Minimizar} \quad \sum_{s\in S}\sum_{i\in I}\pi_s R_i y_i^s \tag{3}$$

$$\text{sujeita a} \quad (p + (r_i^x - v_i))x_{ipq}^s \leq z, \qquad \forall s \in \Omega, i \in I, (p,q) \in IFP_i, \tag{4}$$

$$\sum_{j\in I}\sum_{p'q'\in NFP_{ij}^{(p,q)}} x_{jp'q'}^s \leq (1 - x_{ipq}^s)M, \qquad \forall s \in \Omega, i \in I, (p,q) \in IFP_i, \tag{5}$$

$$\sum_{(p,q)\in IFP_i} x_{ipq}^s = d_i^s - y_i^s, \qquad \forall s \in \Omega, i \in I, \tag{6}$$

$$0 \leq y_i^s \leq d_i^s, \qquad \forall s \in \Omega, i \in I, \tag{7}$$

$$x_{ipq}^s \in \{0,1\}, \qquad s \in \Omega, i \in I, (p,q) \in IFP_i. \tag{8}$$

O modelo (1)-(8) busca encontrar um comprimento z de faixa para ser adquirido no primeiro estágio que minimiza a função objetivo (1), isto é, que minimiza o custo total esperado. O custo total esperado é dado pelo custo de comprar faixa no primeiro estágio, isto é, antes do conhecimento do valor real da demanda de cada tipo de item e pelo custo esperado da penalização de demandas não atendidas no segundo estágio (quando o valor real da demanda de cada tipo de item se torna conhecida). Há demandas não atendidas no segundo estágio quando a área Wz adquirida não é suficiente para cortar toda a demanda observada quando esta se torna conhecida (lembrando que W é um parâmetro fixo).

Como mencionado, a demanda incerta é considerada como uma variável aleatória discreta definida por um conjunto Ω de cenários, em que cada cenário $s \in \Omega$ possui uma probabilidade π_s.

O posicionamento dos itens na faixa é realizado no segundo estágio, de forma que a variável de decisão binária x_{ipq}^s indica se o item do tipo i deve ser posicionado ou não no ponto (p,q) no cenário s. Se sim, x_{ipq}^s assume 1, caso contrário, x_{ipq} assume o valor 0. A variável y_i^s determina a quantidade de itens do tipo i que não podem ser cortados no cenário s. O vetor ξ é definido pelos parâmetros estocásticos x_{ipq}^s e y_i^s. Assim, a função objetivo do segundo estágio $Q(z,\xi)$ representa o custo esperado por demandas não atendidas.

https://proceedings.science/p/157409?lang=pt-br

As restrições (4) garantem que, em cada cenário, os itens são posicionados na faixa de forma que terminem em uma coordenada menor ou no máximo igual à coordenada do comprimento z adquirido no primeiro estágio. As restrições (5) garantem que os itens serão posicionados em cada cenário de forma que não ocorra sobreposição entre itens, em que M é um número grande. As restrições (6) impõem, para cada cenário s e tipo de item i que, caso o comprimento z adquirido não seja suficiente para cortar toda a demanda do cenário s, a quantidade y_i^s da demanda do item do tipo i no cenário s deve deixar de ser atendida. A quantidade cyany_i^s, por sua vez, é penalizada na função objetivo, sendo multiplicada pelo preço de venda do item R_i, que aqui é definido como um fator α definido pelo tomador de decisão multiplicado pela área a_i do item i e pelo custo de uma unidade de área de faixa, isto é, $R_i = \alpha c_0 a_i$. As restrições (7) e (8) definem o domínio das variáveis de decisão do modelo do segundo estágio. Já a restrição (2) define o domínio da variável de decisão do modelo do primeiro estágio.

4. Medidas para avaliar o modelo estocástico de dois estágios

Há na literatura algumas medidas que costumam ser utilizadas para avaliar se realmente vale a pena resolver o modelo estocástico de dois estágios, entre elas o Valor Esperado da Informação Perfeita (EVPI - Expected Value of Perfect Information) EVPI e o Valor da Solução Estocástica (VSS - *Value of Stochastic Solution*) [Alem e Morabito, 2015]. O EVPI é usado para avaliar a solução do modelo estocástico de dois estágios (*here-and-now*) diante da opção de esperar o conhecimento do valor real dos parâmetros incertos para só então tomar uma decisão (*wait-and-see*). É tido como a diferença entre o valor esperado do problema *here-and-now* (i.e. o valor obtido ao resolver o problema estocástico em dois estágios, também denominado Recourse Problem - RP) e o valor esperado das soluções *wait-and-see* (WS), ou seja, EVPI = RP - WS. O valor esperado das soluções *wait-and-see* (WS) é dado por WS $= \sum_{s \in S} \pi_s W_s^*$, em que W_s^* é o valor de uma solução ótima para o cenário s, ou seja, a solução *wait-and-see* para o cenário s e π_s é a probabilidade do cenário s. No problema considerado neste trabalho, isso consiste em descobrir o custo do comprimento mínimo de tecido para cortar a demanda de cada cenário e com base nesses custos (que são as soluções *wait-and-see*) é calculado o valor esperado das soluções *wait-and-see*. Por fim, se o EVPI for muito pequeno, pode não ser tão interessante resolver o problema estocástico.

O VSS é usado para avaliar se é melhor ou não resolver um problema de valor esperado (EV) em vez de resolver o modelo estocástico (RP). Resolver o EV consiste em resolver o problema determinístico para um cenário de referência. Após resolver o EV, é necessário avaliar qual seria o custo se a solução para o EV fosse adotada. Isso é o mesmo que substituir as variáveis de primeiro estágio do modelo estocástico de dois estágios pelo valor encontrado para essas variáveis ao resolver o EV. O valor obtido nesse processo é denominado EVV (*Expectation of the Expected Value*) e a diferença entre o valor EVV e a solução do problema estocástico RP consiste no valor VSS, ou seja, VSS = EVV - RP. Quanto maior for o VSS, maior é o ganho ao considerar a aleatoriedade no problema por meio do modelo estocástico.

5. Experimentos computacionais

O equivalente determinístico do modelo estocástico em dois estágios (1)-(8) foi implementado em linguagem C++ e foi resolvido usando o pacote de otimização Gurobi Optimizer na versão 9.5.1 em suas configurações padrões para a mesma instância usada em Queiroz e Andretta [2020a] (BLAZ). Esta instância é baseada na instância *blazewicz* encontrada em EURO Special Interest Group on Cutting and Packing (ESICUP)[1]. O computador usado nos experimentos possui sistema operacional Linux Ubuntu 20.04.4 LTS, processador Intel Core i5-7200U de 2.5 GHz e

[1]https://www.euro-online.org/websites/esicup/data-sets. Acessado em 21 de maio de 2022.

https://proceedings.science/p/157409?lang=pt-br

8GB de memória RAM. O objetivo com os experimentos foi avaliar o modelo estocástico e calcular o EVPI e o VSS para constatar se vale a pena resolver ou não o problema usando o modelo de programação estocástica em dois estágios estágios (1)-(8).

Na instância BLAZ, a discretização da faixa, dos *IFP*s e *NFP*s dos itens possui escala unitária, isto é, um ponto a cada unidade distância. A faixa possui largura W igual a 9, com limitante superior igual a 30. O custo da unidade de área de faixa no primeiro estágio é definido como $c_0 = 1$.

A instância possui 6 tipos de itens e 3 cenários de demanda. A probabilidade dos cenários é equiprovável. A média de itens por cenário é 8. As demandas de cada cenário, bem como as respectivas probabilidades, são mostradas na Tabela 1. Observe que a demanda dos itens nos 3 cenários é pequena, contudo, ela foi a mesma demanda utilizada por Queiroz e Andretta [2020a] e experimentos preliminares mostraram que o aumento em poucas unidades da demanda de cada tipo de item leva a uma dificuldade em termos de tempo computacional de alcançar a solução ótima para instância. Além disso, a escolha da mesma instância de Queiroz e Andretta [2020a] deve-se a fins de comparação. O problema de Queiroz e Andretta [2020a] não é o mesmo problema abordado aqui. Mas as decisões do primeiro estágio do modelo são as mesmas, se diferenciando somente quanto as decisões do segundo estágio. O objetivo com a comparação é o de avaliar quanto as mudanças nas decisões de segundo estágio adotadas aqui impactam ou nas decisões de primeiro estágio, isto é, no comprimento a ser adquirido no primeiro estágio.

Tabela 1: Demanda dos itens em cada cenário na instância BLAZ de Queiroz e Andretta [2020a].

Cenário	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	Probabilidade
1	5	1	0	1	1	0	0,33
2	0	1	3	1	1	0	0,33
3	0	1	0	1	1	8	0,34
Cenário de referência	1	1	1	1	1	2	

A instância BLAZ foi resolvida para 5 valores de α, sendo o valor de α o multiplicador utilizado para penalizar os itens que não podem ser cortados na faixa no segundo estágio em função do valor da área desses itens. Não foi definido um tempo limite, sendo o fato de encontrar a solução ótima para o problema definido como o critério de parada. A solução ótima, para cada valor de α, é apresentada em cada linha da Tabela 2.

Tabela 2: Solução ótima para instância BLAZ para 5 valores de α usando o modelo (1)-(8).

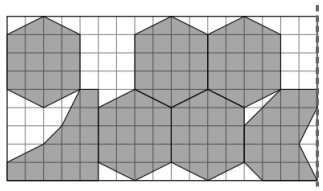
	Estágio 1		Estágio 2			Medidas de avaliação		
α	z	Custo	Custo esperado (demanda não atendida)	Custo Esperado Total	Tempo (s)	EVPI	EVV	VSS
1,5	8	72	69,67	141,67	62,12	5,39	145,47	3,80
2,0	14	126	28,39	154,39	96,91	7,33	157,96	3,57
2,5	16	144	17,06	161,06	43,44	14,00	170,45	9,39
3,0	17	153	10,89	163,89	37,57	16,83	182,94	19,05
3,5	17	153	12,71	165,71	41,75	18,65	195,43	29,73

Valor esperado da soluções *wait-and-see* (WS) = 147,06.

Na Tabela 2, são apresentados, primeiramente, o comprimento z que deve ser adquirido no primeiro estágio, o custo $c_0 W z$ de adquirir a área da faixa, o custo esperado por demandas não

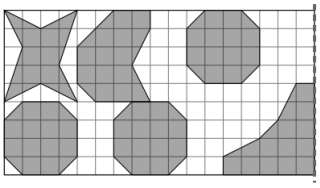
atendidas no segundo estágio ao adquirir o comprimento z no primeiro estágio, o custo esperado total, o qual consiste no custo do primeiro estágio somado ao custo esperado do segundo estágio, e o tempo computacional (em segundos) gasto para encontrar a solução. Em seguida, são apresentados os valores obtidos para as medidas de avaliação EVPI, EVV e VSS.

Quanto maior o valor de α, mais caro é deixar de cortar os itens no segundo estágio, mais importante passa a ser ter faixa suficiente para atender a demanda no segundo estágio e isso é refletido nas soluções encontradas. Como o modelo estocástico em dois estágios (1)-(8) considera o caso em que o decisor não pode ou não deseja adquirir mais faixa no momento em que a demanda dos itens se torna conhecida, um valor de α maior leva a soluções em que mais cenários são satisfeitos. A Figura 2 ilustra a solução obtida para $\alpha = 3$, em que apenas 1 item do tipo 4 não pode ser cortado caso o cenário 1 ocorra (veja na Figura 2). Logo, ela é uma solução mais robusta, que protege mais o decisor da variação dos dados, garantindo a viabilidade de mais cenários quando comparado com as soluções obtidas para outros valores de α. Por exemplo, a solução obtida para $\alpha = 2$ ($z = 14$) resulta no não atendimento à demanda em dois cenários, uma vez que são necessários, no caso determinístico, 19, 13 e 17 unidades de comprimento para cortar toda a demanda dos cenários 1, 2 e 3, respectivamente.



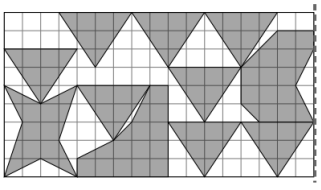
1 item do tipo 4 não pôde ser cortado.

(a) Cenário s = 1



Todos os itens puderam ser cortados.

(b) Cenário s = 2



Todos os itens puderam ser cortados.

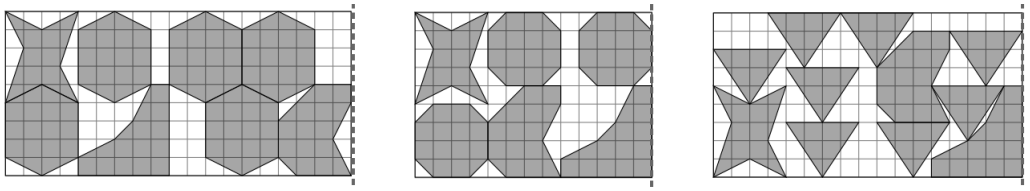
(c) Cenário s = 3

Figura 2: Solução ótima para instância gerada obtida usando o modelo estocástico em dois estágios para $\alpha = 3$.

O EVPI representa a diferença entre o valor da solução estocástica e o valor esperado das soluções *wait-and-see* (WS) e, assim, avalia se vale a pena resolver o modelo estocástico de dois estágios ou se é melhor esperar o conhecer o valor real dos parâmetros incertos e resolver um problema determinístico. Quanto maior for o valor do EVPI, mais vantajoso é resolver o problema estocástico. O valor das soluções *wait-and-see* (WS) para a instância BLAZ é 147,06. A Figura 3 ilustra as soluções *wait-and-see* para os cenários da instância gerada e o cálculo do valor esperado dessas soluções (WS).

Analisando os EVPIs da Tabela 2, observa-se que o menor EVPI é obtido para o valor de $\alpha = 1,5$ e representa uma diferença de 3,67% com relação à solução WS, enquanto que o maior EVPI é obtido para o valor de $\alpha = 3,5$ e representa uma diferença de 12,68% com relação à solução WS. Os valores de EVPI obtidos não foram tão grandes, mas, ainda assim, indicam que é esperado que o decisor obtenha ganhos ao resolver o modelo estocástico e que, para este caso, quanto mais se paga por não cortar os itens, maior é o EVPI e mais vantajoso é resolver o problema estocástico.

O EVV representa o custo esperado por comprar, no primeiro estágio, a área mínima de faixa necessária para cortar toda a demanda do cenário de referência (última linha da Tabela 1). A área mínima é dada pelo comprimento z mínimo para cortar os itens do cenário de referência multiplicado pela largura fixa da faixa. O comprimento mínimo de faixa necessária para cortar os itens do cenário de referência é 12 e é obtido ao resolver o problema EV (isto é, a versão determinística para



(a) Cenário 1: WS_1* = 171; Comprimento = 19

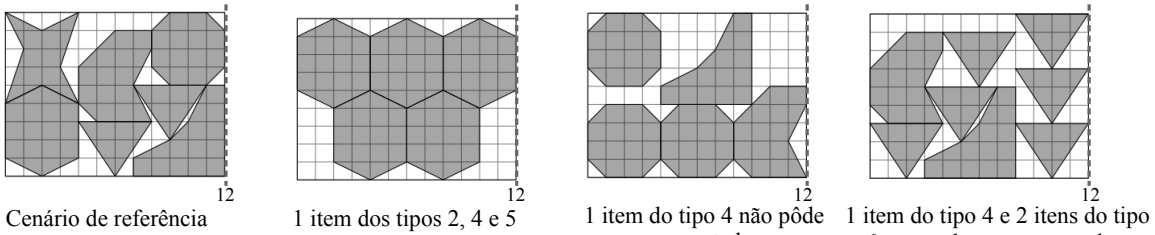
(b) Cenário 2: WS_2* = 117; Comprimento = 13

(c) Cenário 3: WS_3* = 153; Comprimento = 17

WS = (0,33)171 + (0,33)117 + (0,34)153 = **147,06**

Figura 3: Soluções *wait-and-see* para a instância gerada.

o cenário de referência). Em outras palavras, o EVV representa o valor esperado que seria gasto se fosse adquirida uma faixa de comprimento 12 e altura fixa 9. Tal custo esperado, para cada valor de α, é dado na coluna EVV da Tabela 2. A Figura 4 ilustra a solução obtida para o problema EV e a soluções EVV para cada cenário s indicando quais itens podem ser cortados caso a solução do problema EV ($z = 12$) fosse adotada (itens contidos na faixa) e quais itens não podem ser cortados na faixa, para o caso em que $\alpha = 3$.



Cenário de referência

(a) Solução EV: comprimento = 12

1 item dos tipos 2, 4 e 5 não pôde ser cortado.

(b) Solução EVV para o cenário s = 1

1 item do tipo 4 não pôde ser cortado.

(c) Solução EVV para o cenário s = 2

1 item do tipo 4 e 2 itens do tipo 6 não puderam ser cortados.

(d) Solução EVV para o cenário s = 3

Figura 4: Soluções EV e EVV para a instância gerada para $\alpha = 3$.

O VSS representa a diferença entre o EVV e o valor da solução estocástica obtida para o modelo de dois estágios e avalia se vale a pena considerar a aleatoriedade no problema ou se é melhor comprar a quantidade de faixa indica ao resolver um problema determinístico com os dados do cenário de referência. Analisando os valores de VSS obtidos na Tabela 2, observa-se que o menor VSS é obtido para $\alpha = 2$ e representa uma diferença de 2,31%, enquanto que o maior VSS é obtido para $\alpha = 3,5$ e representa uma diferença de 17,94%, seguido por uma diferença de 2,68% para $\alpha = 1,5$. Isso indica que, para esse caso, o VSS não aumentou sempre com o valor da penalização por demandas não atendidas, mas que para valores de α iguais a 3 e 3,5, para este caso, foi mais vantajoso resolver o modelo estocástico do que para os demais valores.

Penalizar muito as demandas não atendidas pode levar a uma solução muito conservadora e talvez não condizente com a realidade. Vale destacar, no entanto, que se existe demanda para o item e ele não pode cortado por falta de faixa, tal preço de venda é penalizado, pois ele deixa de ser ganho pelo tomador de decisão. Logo, em algumas situações, o preço de venda não pode ser muito maior que o preço pago pela área que o item ocuparia.

A instância BLAZ também foi resolvida usando o modelo de Queiroz e Andretta [2022], o

qual foi implementado em liguagem C++ e resolvido usando o mesmo resolvedor e no mesmo computador dos experimentos anteriores. No modelo de Queiroz e Andretta [2022], o custo esperado por quantidade de comprimento que deve ser adquirida no segundo estágio é penalizado ao invés do custo esperado por demandas não atendidas. Isso faz com que a solução obtida ao resolver o modelo Queiroz e Andretta [2022] seja diferente da solução obtida a resolver o modelo (1)-(8). Na solução usando o modelo de Queiroz e Andretta [2022], são indicados os comprimentos de faixa a serem adquiridos no primeiro e no segundo estágio e os locais em que devem ser cortados todos os itens da demanda de cada cenário e, na solução usando o modelo (1)-(8), são indicados o comprimento de faixa que deve ser adquirido no primeiro estágio, os itens que podem ser alocados no comprimento adquirido e suas respectivas posições de corte para cada cenário, além da demanda que não pode ser atendida. Diante disso, o objetivo ao resolver o modelo de Queiroz e Andretta [2022] para a instância utilizada nos experimentos anteriores é conhecer o comprimento de faixa que tal maneira indica para ser adquirida no primeiro estágio. Busca-se, com isso, saber quão próximo é o comprimento obtido usando o modelo de Queiroz e Andretta [2022] dos comprimentos obtidos usando modelo (1)-(8) (Tabela 2), além de observar o quanto é vantajoso ou não, do ponto de vista de tempo computacional, resolver o modelo proposto aqui para ter uma opção de quanto comprimento adquirir no primeiro estágio em detrimento de resolver o modelo de Queiroz e Andretta [2022].

Os resultados obtidos usando o modelo de Queiroz e Andretta [2022] para a instância BLAZ são apresentados na Tabela 3 juntamente com os resultados obtidos para o modelo (1)-(8) quando o $\alpha = 3$ e o custo da unidade de área de faixa no primeiro estágio igual é a 1. O custo da unidade de área de faixa no primeiro estágio no modelo de Queiroz e Andretta [2022] é igual a 1 e o custo do unidade de área de faixa no segundo estágio igual a 1,5. A Tabela 3 traz o comprimento z_0 de faixa que deve ser adquirido no primeiro estágio, o custo de se fazer isso, o que acontece no segundo estágio dada a decisão tomada no primeiro estágio, o custo total esperado, o GAP da solução e o tempo computacional, em segundos, gasto para resolver a instância usando os dois modelos.

Tabela 3: Comparação entre o modelo (1)-(8) e o modelo de Queiroz e Andretta [2022].

Proposta	Estágio 1		Estágio 2	Custo total esperado	GAP(%)	Tempo (s)
	z_0	Custo				
Modelo (1)-(8)	17	153	1 item do tipo 4 não pode ser cortado no cenário 1 . O decisor deixa de ganhar o esperado de 10,89.	163,89	0	37,57
Modelo de Queiroz e Andretta [2022]	17	153	2 unidades de comprimento devem ser adquiridas a mais se o cenário 1 ocorrer. O decisor precisará gastar a mais o esperado de 58,59.	161,91	61,09	21600,00

Observe, na Tabela 3, que o Gurobi não pôde provar que a solução encontrada usando o modelo de Queiroz e Andretta [2022] é ótima dentro do tempo limite de 21600 segundos, resultando em um GAP de otimalidade de 61,09%. Conhecendo as soluções determinísticas para cada cenário da instância mostradas na Figura 3, é possível, a partir do comprimento mínimo requerido para cada cenário, calcular o custo esperado para cada valor de comprimento z de 0 até 19, que é o comprimento que pode ser usado para cortar todos os cenários individualmente. Ao fazer isso, constata-se que a melhor solução dentre todas as opções com $z \in [0, 19]$ para a instância, usando a proposta de Queiroz e Andretta [2022], consiste em adquirir 17 unidades de comprimento no primeiro estágio e 4 unidades no segundo estágio se o cenário 1 acontecer, resultando em um custo total esperado de 161,91, assim como a solução obtida usando o pacote Gurobi para resolver o modelo, mostrando que a solução apresentada na Tabela 3 é, de fato, uma solução ótima para a instância usando a modelagem de Queiroz e Andretta [2022].

Ao comparar a solução obtida usando o modelo de Queiroz e Andretta [2022] com as

soluções obtidas usando a modelagem proposta neste artigo, observa-se que o comprimento 17 obtido usando a modelagem de Queiroz e Andretta [2022] é igual ao comprimento obtido quando α é igual a 3, o custo esperado é próximo para ambos os modelos e as consequência, no segundo estágio, de se adquirir 17 unidades de comprimento de faixa no primeiro estágio impactam o mesmo cenário, indicando que, se o cenário 1 ocorrer, o decisor não consegue cortar 1 unidade do tipo 4 no modelo proposto aqui ou terá que adquirir 2 unidades de comprimento a mais usando o modelo de Queiroz e Andretta [2022]. Contudo, o GAP e o tempo computacional usando o modelo de Queiroz e Andretta [2022] foi maior do que os obtidos usando o modelo proposto aqui. Logo, para a instância testada, os resultados indicam que resolver o modelo proposto aqui pode indicar um comprimento de faixa para ser adquirido no primeiro estágio coerente com o comprimento obtido usando a modelagem de Queiroz e Andretta [2022] a um tempo computacional menor.

6. Considerações finais

Neste trabalho, foi proposto um modelo de programação estocástica em dois estágios para o Problema de Empacotamento Irregular em Faixa Bidimensional com incerteza na demanda dos itens. O modelo considerou a demanda como uma variável aleatória discreta aproximada por um conjunto de cenários, buscando decidir, no primeiro estágio, o comprimento de faixa a ser adquirido e penalizando, no segundo estágio, a demanda que não pode ser cortada no comprimento de faixa adquirido no primeiro estágio. Tais decisões foram tomadas de forma a minimizar o custo de adquirir faixa no primeiro estágio somado ao custo esperado pago por demandas não atendidas no segundo estágio. O valor penalizado por cada item não cortado foi igual ao preço de venda, sendo calculado no modelo por um multiplicador α vezes o preço pago pela área do item. Por fim, o modelo foi resolvido para uma instância gerada considerando 3 cenários equiprováveis.

Os resultados mostraram que, para a instância avaliada, dependendo de como a demanda que não pode ser cortada é penalizada, é vantajoso resolver o modelo estocástico proposto diante da possibilidade de resolver um problema determinístico após a demanda dos itens se tornar conhecida. A comparação dos resultados com a implementação do modelo de Queiroz e Andretta [2022] usando os mesmos recursos computacionais mostrou que a abordagem proposta aqui de penalização de demandas não atendidas pode ser uma alternativa para determinar o comprimento a ser adquirido no segundo estágio. Contudo, mais experimentos precisam ser realizados, em trabalhos futuros, pois apenas uma instância foi testada. Outro trabalho futuro consiste em investir em tentativas de melhorar o tempo computacional, uma vez que o problema resolvido aqui é NP-Díficil, o que indica que pacotes de otimização como o usado aqui encontrarão dificuldades para resolver instâncias maiores do problema, exigindo a investigação de uma heurística ou de uma *math*-heurística para o problema.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de financiamento 001 e Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP - 2013/07375-0, 2016/01860-1 e 2018/07240-0).

Referências

Alem, D. e Morabito, R. (2015). Modelos de programação estocástica no planejamento da produção de empresas moveleiras. *Production*, 25:657–677.

Alves, C., Bras, P., Valerio de Carvalho, J. M., e Pinto, T. (2012). A variable neighborhood search algorithm for the leather nesting problem. *Mathematical Problems in Engineering*, 2012.

Baldacci, R., Boschetti, M. A., Ganovelli, M., e Maniezzo, V. (2014). Algorithms for nesting with defects. *Discrete Applied Mathematics*, 163:17–33.

Bennell, J. A. e Song, X. (2010). A beam search implementation for the irregular shape packing problem. *Journal of Heuristics*, 16(2):167–188.

Cherri, L. H., Mundim, L. R., Andretta, M., Toledo, F. M., Oliveira, J. F., e Carravilla, M. A. (2016). Robust mixed-integer linear programming models for the irregular strip packing problem. *European Journal of Operational Research*, 253(3):570–583.

Cherri, L. H., Carravilla, M. A., Ribeiro, C., e Toledo, F. M. B. (2019). Optimality in nesting problems: New constraint programming models and a new global constraint for non-overlap. *Operations Research Perspectives*, 6:100125.

Crispin, A., Clay, P., Taylor, G., Bayes, T., e Reedman, D. (2005). Genetic algorithm coding methods for leather nesting. *Applied Intelligence*, 23(1):9–20.

Dyer, M. e Stougie, L. (2006). Computational complexity of stochastic programming problems. *Mathematical Programming*, 106(3):423–432.

Egeblad, J., Nielsen, B. K., e Odgaard, A. (2007). Fast neighborhood search for two-and three-dimensional nesting problems. *European Journal of Operational Research*, 183(3):1249–1266.

Garey, M. R. e Johnson, D. S. (1979). *Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness*. Freeman, San Francisco.

Gomes, A. M. e Oliveira, J. F. (2006). Solving irregular strip packing problems by hybridising simulated annealing and linear programming. *European Journal of Operational Research*, 171 (3):811–829.

Mundim, L. R., Andretta, M., Carravilla, M. A., e Oliveira, J. F. (2018). A general heuristic for two-dimensional nesting problems with limited-size containers. *International Journal of Production Research*, 56(1-2):709–732.

Mundim, L. R., Andretta, M., e de Queiroz, T. A. (2017). A biased random key genetic algorithm for open dimension nesting problems using no-fit raster. *Expert Systems with Applications*, 81: 358–371.

Queiroz, L. R. d. S. e Andretta, M. (2020a). Modelo de programação estocástica para um problema de corte de itens irregulares. *Anais do LII SBPO Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, 1:2375–2385.

Queiroz, L. R. d. S. e Andretta, M. (2020b). Two effective methods for the irregular knapsack problem. *Applied Soft Computing*, 95:106485.

Queiroz, L. R. S. d. e Andretta, M. (2022). A branch-and-cut algorithm for the irregular strip packing problem with uncertain demands. *International Transactions in Operational Research*.

Scheithauer, G. e Terno, J. (1993). Modeling of packing problems. *Optimization*, 28(1):63–84.

Toledo, F. M., Carravilla, M. A., Ribeiro, C., Oliveira, J. F., e Gomes, A. M. (2013). The dotted-board model: a new mip model for nesting irregular shapes. *International Journal of Production Economics*, 145(2):478–487.