Mecanismos de Controle de Diversidade no *Iterated Local Search* para Resolver Problemas de Roteamento de Veículos

Vinícius Rosa Máximo
Instituto de Ciência e Tecnologia, Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP)
Av. Cesare M. G. Lattes, 1201, São José dos Campos-SP, CEP: 12247-014, Brasil
vinymax10@gmail.com

Mariá Cristina Vasconcelos Nascimento
Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA)
Praça Marechal Eduardo Gomes, 50 - Vila das Acácias, São José dos Campos - SP, CEP: 12228-900, Brasil
mariah@ita.br

RESUMO

Nesta Tese de Doutorado, investigam-se alguns mecanismos de controle de diversidade aplicado à metaheurística *Iterated Local Search* (ILS) para permitir que esta escape de ótimo locais com maior facilidade. O algoritmo resultante, denominado *Adaptive Iterated Local Search* (AILS), foi aplicado ao Problema de Roteamento de Veículos Capacitado (PRVC) e ao Problema de Roteamento de Veículos com Frotas Heterogêneas (HFVRP, do inglês *Heterogeneous Fleet Vehicle Routing Problem*). Desenvolveram-se dois métodos para o PRVC, um tratando instâncias de pequena e média escala e outro, de larga escala. As três versões do AILS apresentam os melhores resultados heurísticos da literatura, encontrando inclusive novas "melhores soluções conhecidas", que seriam limitantes superiores para os respectivos problemas.

PALAVRAS CHAVE. Problema de Roteamento de Veículos Capacitado (PRVC), Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea, Adaptive Iterated Local Search (AILS).

Tópicos: MH – Metaheurísticas; L&T – Logística e Transportes; OC – Otimização Combinatória

ABSTRACT

In this Ph.D. Thesis, we investigate diversity control mechanisms applied to the Iterated Local Search (ILS) metaheuristic to allow it to escape from local optima more easily. The resulting algorithm, named Adaptive Iterated Local Search (AILS), was applied to the Capacited Vehicle Routing Problem (CVRP) and Heterogeneous Fleet Vehicle Routing Problem (HFVRP). Two methods were developed for the CVRP, one focusing on solving efficiently small and medium-sized instances and the other to better approach large-scale instances. The three versions of AILS outperform the results of the state-of-the-art heuristics from the literature, also finding new "best known solutions", upper bounds for the corresponding problems.

KEYWORDS. Capacitated Vehicle Routing Problem (CVRP), Heterogeneous Fleet Vehicle Routing Problem (HFVRP), Adaptive Iterated Local Search (AILS).

Paper Topics: MH – Metaheuristics; L&T – Logistics and Transportation; CO – Combinatorial Optimization

https://proceedings.science/p/157404?lang=pt-br

1. Resumo da Tese

O controle de diversidade em meta-heurísticas é um assunto altamente relevante dado o impacto dessas abordagens em algoritmos de busca. A principal questão sobre o controle da diversidade diz respeito ao grau de diversidade ideal utilizado em cada momento da busca. A literatura é vasta, e os algoritmos possuem mecanismos particulares que abordam essa questão de alguma forma. Uma diversidade excessiva confere robustez ao algoritmo, mas a qualidade das soluções pode não ser tão boa. Algoritmos com pouca diversidade tendem a ficarem presos em ótimos locais. Existem abordagens convergentes que variam a diversidade ao longo da busca [Kirkpatrick et al., 1983; Dueck e Scheuer, 1990]. Outras estratégias usam uma diversidade aleatória dentro de um intervalo [den Besten et al., 2001; Penna et al., 2013]. Outras abordagens oscilam periodicamente [Stützle, 2006; Nogueira et al., 2021].

O *Iterated Local Search* (ILS) é uma metaheurística proposta por Lourenço et al. [2003], utilizada para resolver problemas de otimização combinatória. O ILS tem quatro etapas principais: construção de uma solução inicial, perturbação da solução de referência, busca local na solução perturbada, e critério de aceitação. O ILS permite o controle da diversidade através do critério de aceitação e do grau de perturbação para executar a perturbação na solução de referência. Quanto maior a perturbação, maior a diversidade. O critério de aceitação consiste em regras para definir soluções de referência. Um critério mais relaxado, por exemplo, aceitar todas as soluções, proporciona maior diversidade. Se o critério for muito restritivo, o algoritmo pode ficar preso em uma determinada região do espaço de busca. Assim, o controle eficiente desses dois mecanismos permite um ganho de desempenho considerável.

Esta Tese de Doutorado investiga diversos mecanismos de controle de diversidade para a metaheurística ILS. Para isso, estratégias adaptativas foram investigadas para estabelecer a intensidade do grau da perturbação e o critério de aceitação. Para testar o desempenho das propostas, dois problemas de roteamento de veículos foram abordados: o de Problema de Roteamento de Veículos Capacitado (PRVC) e Problema de Roteamento de Veículos com Frotas Heterogêneas (HFVRP, do inglês *Heterogeneous Fleet Vehicle Routing Problem*). Como resultado, os algoritmos propostos apresentam uma grande robustez e obtêm melhores resultados do que os atuais algoritmos estado-da-arte para esses problemas, incluindo versões do ILS.

2. Publicações e Prêmios

1. Máximo, V.R.; Nascimento, M.C.V. (2021). *A hybrid adaptive iterated local search with diversification control to the capacitated vehicle routing problem.* **European Journal of Operational Research**, 294(3):1108–1119. ISSN 0377-2217.

2. Máximo, V.R.; Cordeau, J.F.; Nascimento, M.C.V. (2022). *An Adaptive Iterated Local Search Heuristic for the Heterogeneous Fleet Vehicle Routing Problem.* **Computers & Operations Research**, 148:105954. ISSN 0305-0548.

3. Máximo, V.R.; Cordeau, J.F.; Nascimento, M.C.V. (2022). AILS-II: *An Adaptive Iterated Local Search Heuristic for the Large-scale Capacitated Vehicle Routing Problem.* ArXiv preprint:2205.12082.

4. AILS-II, que é a versão que foi desenvolvida para a solução de instâncias de larga escala, competiu na solução do PRVC no *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* (DIMACS) *12th Implementation Challenge* e obteve o 3º lugar geral, e 1º lugar em instâncias de larga escala[1].

[1] http://dimacs.rutgers.edu/programs/challenge/vrp/results/

Uma visão geral dessas publicações é apresentada nas próximas seções seguindo a ordem enumerada das publicações.

2.1. AILS-PR para o PRVC

Este estudo, publicado em [Máximo e Nascimento, 2021], introduziu o *Adaptive Iterated Local Search* hibridizado com *Path Relinking* (PR) proposto por Glover [1997] para resolver o PVRC. Este problema consiste em encontrar um conjunto de rotas que minimizem o custo de percurso de uma frota de veículos idênticos para atender a todos os clientes, respeitando a capacidade dos veículos.

2.1.1. Descrição do Algoritmo

No AILS proposto, o grau de perturbação e o critério de aceitação dependem de estratégias adaptativas. Em resumo, a intensidade do grau de perturbação é ajustada iterativamente levando em conta a distância entre a última solução encontrada após a busca local e uma solução de referência. A estratégia adaptativa para definir o critério de aceitação é baseada em um limiar para evitar a aceitação de soluções de baixa qualidade, que é ajustado dinamicamente ao longo das iterações. A ideia principal por trás do ajuste está na observação empírica de que regiões promissoras geralmente são compostas por inúmeras soluções de boa qualidade. Neste caso, o algoritmo deve restringir o critério de aceitação, para que o algoritmo intensifique a busca naquela região. O número de boas soluções em regiões não promissoras é geralmente baixo e o algoritmo deve relaxar o critério de aceitação para que o algoritmo escape de tal região. Algoritmo 1 mostra um pseudocódigo do AILS introduzido.

Entrada: Dado da Instancia
Resultado: A melhor solução encontrada s^*
1 $s^r, s^* \leftarrow$ Construir uma solução inicial
2 **enquanto** *o critério de parada não for atingido* **faça**
3 $\quad s \leftarrow$ Procedimento de Perturbação (s^r)
4 $\quad s \leftarrow$ Busca Local (s)
5 $\quad$ Atualize o grau da perturbação considerando a distância entre s e s^r
6 $\quad s^r \leftarrow$ Aplicar critério de aceitação para s
7 $\quad$ Atualizar o critério de aceitação
8 $\quad$ Atribua s para s^* se $f(s) < f(s^*)$
9 **fim**

Algoritmo 1: AILS

No Algoritmo 1, uma solução inicial é construída para o problema estudado e atribuída a s^* e s^r, respectivamente, a melhor solução global e a solução de referência. O processo iterativo começa aplicando primeiro à solução de referência um processo de perturbação. Então, à solução resultante da perturbação, chamada de s, é aplicada a uma busca local. Em seguida, como parte da estratégia adaptativa proposta, as variáveis do controle de diversidade são atualizadas. Assim, o critério de aceitação decide se a solução s substitui a solução de referência atual s^r. Novamente, como parte da estrutura adaptativa aqui proposta, o critério de aceitação é atualizado. A melhor solução geral é atualizada na sequência. O processo iterativo para quando o critério de parada é atendido.

O processo de perturbação consiste em remover ω vértices da solução de referência e adicioná-los em outras posições com o intuito de produzir uma solução s diferente de s^r. O valor de ω é ajustado pelo controle de diversidade de tal forma que a distância $d_{\mathscr{H}}$ entre a solução s obtida

após a busca local e a solução de referência s^r seja controlada por um parâmetro, o d_β. Se $d_{\mathscr{H}}$ for maior que d_β, então o valor de ω deve ser diminuído; se for menor, aumenta-se o ω. Periodicamente, o valor de ω é atualizado por $\omega = \omega d_\beta / d_{\mathscr{H}}$.

O critério de aceitação estabelece as regras para a solução s substituir a solução de referência s^r. O critério de aceitação é um importante mecanismo de controle de diversidade do algoritmo [Lourenço et al., 2003]. Um critério muito restritivo implica em menos diversidade. Por outro lado, um critério muito relaxado fornece uma alta diversidade para o algoritmo. Por isso, encontrar o critério ideal é uma tarefa relevante. Neste estudo, propõe-se um critério que tem como referência o fluxo de soluções aceitas. Quanto maior o fluxo de soluções aceitas, mais relaxado será o critério. O fluxo ideal é estabelecido pelo parâmetro κ. Deste modo, durante o processo de busca, o controle de diversidade irá ajustar o limiar $\bar{b}$ tendo como referência o fluxo de soluções que estão sendo aceitas. Assim, o critério de aceitação irá restringir as soluções que possuem qualidade inferior a $\bar{b}$.

Com o intuito de intensificar o processo de busca, introduz-se a estratégia de PR no AILS. A principal diferença entre o AILS e o AILS-PR é que o AILS-PR possui a etapa de PR após a linha 8 do Algoritmo 1 além da atualização do conjunto elite após a busca local.

2.1.2. Resultados

Nos experimentos computacionais, testa-se o AILS-PR utilizando um conjunto contendo 100 instâncias de referência para o PRVC propostas por Uchoa et al. [2017]. Os experimentos mostraram que o AILS-PR obteve melhores resultados em comparação com os UHGS [Vidal et al., 2014], ILS-SP [Subramanian et al., 2013] e SISRs [Christiaens e Vanden Berghe, 2020]. Os resultados demonstraram que o algoritmo proposto foi significativamente melhor que os algoritmos do estado-da-arte, sendo melhor tanto na qualidade de solução quanto no tempo computacional. Em comparação aos três algoritmos, o AILS-PR apresentou os menores *gaps* médios em 93% das instâncias testadas.

2.2. AILS para o HVRP

A investigação do AILS para a solução do *Heterogeneous Fleet Vehicle Routing Problem* (HFVRP) foi publicada em Máximo et al. [2022b].

O HFVRP é muito relevante em diversos setores da indústria e comércio. Este problema visa encontrar rotas que minimizem os custos totais de viagem utilizando uma frota heterogênea de veículos. Este problema é de grande interesse dada a sua importância em aplicações reais. Esta seção apresenta um AILS aplicado ao HFVRP.

As variantes existentes do HFVRP diferem nas características quanto às restrições de capacidade da frota, limitada ou não, e custos envolvidos na utilização de um veículo, que podem ser fixos e/ou dependentes, do uso do veículo (proporcional à duração da viagem) . Esta tese trata de cinco variantes abordadas por Penna et al. [2013]: HFVRP com custos fixos e dependentes (HVRPFD); o HFVRP com frota limitada e apenas custos dependentes (HVRPD); o FSM com frota ilimitada, custos fixos e dependentes (FSMFD); o FSM com frota ilimitada e custos fixos (FSMF); e o FSM com frota ilimitada e custos dependentes (FSMD).

2.2.1. Descrição do Algoritmo

O AILS proposto para o HVRP possui as mesmas etapas do Algoritmo 1. As principais diferenças estão relacionadas com as peculiaridades de cada variante do problema. A construção da solução inicial é bastante similar àquela proposta para o PRVC. A principal diferença é que durante a construção de uma rota é necessário atribuir um tipo de veículo a ela. A escolha desses veículos depende da variante do problema. O processo de perturbação também é similar àquele apresentado para o PRVC. A principal diferença dessa etapa é que, além de variar a posição dos vértices na

solução, é necessário variar também o tipo de veículo atribuído às rotas. Tanto a busca local quanto o controle do grau da perturbação são os mesmos utilizados para o PRVC. O critério de aceitação empregado foi um limiar constante, pois esta apresentou melhor resultado para o HVRP.

2.2.2. Resultados

Nos experimentos computacionais, compara-se o AILS com os métodos heurísticos estado-da-arte: ILS-RVND Penna et al. [2013], ILS-RVND-SP Subramanian et al. [2012] e UHGS Vidal et al. [2014]. Os experimentos foram realizados usando as instâncias de *benchmark* propostas por Golden et al. [1984] e Taillard [1999] com até 100 vértices. Considerando este conjunto de dados, o AILS teve um melhor resultado médio na grande maioria das instâncias. Os tempos computacionais exigidos pelo AILS foram razoáveis em comparação com os demais algoritmos. O AILS também foi comparado com ILS-RVND-SP usando as instâncias propostas por Li et al. [2007] e Brandão [2011]. Em tal experimento, o AILS encontrou uma solução melhor do que a mais conhecida em 8 das 15 instâncias. O AILS teve uma solução média melhor do que ILS-RVND-SP em todas as 15 instâncias. O AILS apresentou uma convergência mais lenta e, por esta razão, os tempos computacionais foram menores apenas em 5 das 15 instâncias.

2.3. AILS-II para PRVC de larga escala

Este trabalho visa melhor tratar instâncias de larga escala para o PRVC. Um artigo reportando essa investigação, resumida nesta seção, será submetido posteriormente a um periódico e está disponível no repositório *arxiv* [Máximo et al., 2022a]. Além disso, o *software* do método, chamado AILS-II, participou do *DIMACS Challenge* deste ano, dedicado a problemas de roteamento de veículos. Os experimentos realizados na competição apontaram que o AILS-II foi o melhor para instâncias de larga escala, obtendo 3o lugar considerando todas instâncias. Vale ressaltar porém que o AILS-II foi o que atingiu os melhores *gaps*, já que a competição usou outra métrica de desempenho para classificar os algoritmos.

O AILS-PR apresentou excelentes resultados para o PRVC considerando instâncias de pequeno e médio porte (com até 1000 vértices). No entanto, para instâncias grandes, os resultados do AILS-PR indicam que o PR torna o método muito custoso, tornando a sua junção com o AILS menos vantajosa. O PR possui um comportamento de intensificação no processo de busca e grande parte dessa característica é oriunda da exploração do conjunto elite. Tendo isto mente, uma versão nova do AILS, chamada de AILS-II, que possui um conjunto elite e não faz uso do PR, foi proposta nesse estudo. O propósito deste método foi a solução de problemas de larga escala. O AILS-II possui as mesmas etapas do AILS proposto por Máximo e Nascimento [2021], no entanto, parte das iterações é realizada tendo como solução de referência uma solução do conjunto elite.

2.3.1. Controle do Grau da Perturbação

Como já dito anteriormente, controlar a diversidade e a intensidade da perturbação são tarefas difíceis e, neste trabalho, nós analisamos algumas possibilidades. Novamente, a variável ω indica a quantidade de vértices que serão removidos de uma solução e quatro estratégias foram investigadas para esse fim:

- Fixo, $\mathscr{D}_1$: um valor fixo para ω .
- Relativo, $\mathscr{D}_2$: O valor de ω é proporcional ao tamanho da instância.
- Aleatório, $\mathscr{D}_3$: escolha aleatória em um intervalo definido por valores encontrados em iterações anteriores.
- Distância, $\mathscr{D}_4$: Essa abordagem ajusta ω baseando-se na solução de referência.

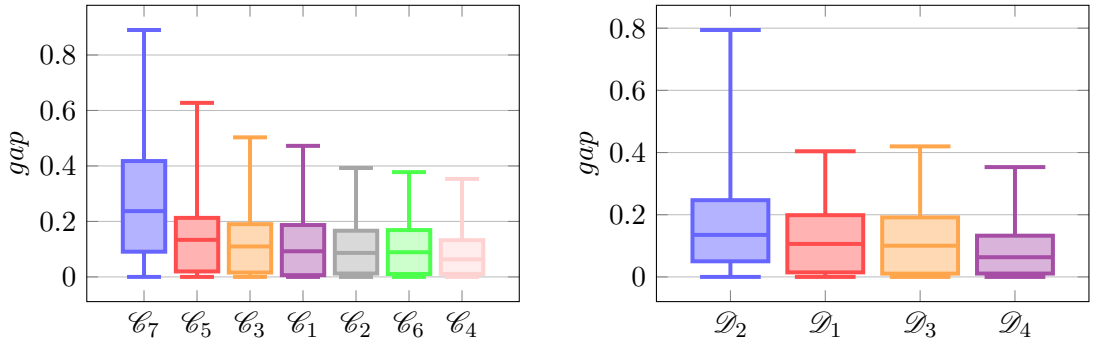
2.3.2. Critério de Aceitação

Conforme já mencionado, o critério de aceitação é uma etapa bastante relevante para o controle de diversidade. Esta seção apresenta os sete critérios de aceitação avaliados neste estudo.

- Limiar, $\mathscr{C}_1$: limitante é definido com valores baseados no histórico de busca;
- Fluxo, $\mathscr{C}_2$: limitante é definido com volume de soluções já aceitas.
- Distância, $\mathscr{C}_3$: limitante baseia-se na distância média das soluções aceitas.
- Convergente, $\mathscr{C}_4$: critério baseado em mecanismo que avalia a convergência da solução, inspirado no algoritmo de Dueck e Scheuer [1990];
- Limitante Relativo, $\mathscr{C}_5$: limitante é calculado baseando-se na melhor solução;
- k-melhores, $\mathscr{C}_6$: critério basea-se na melhor solução obtida nas últimas k iterações;
- Melhor, $\mathscr{C}_7$: aceita a solução se ela for melhor do que as já encontradas [Stützle, 2006].

2.3.3. Resultados

Esta seção apresenta os resultados do AILS-II considerando as 100 instâncias de referência [Uchoa et al., 2017] avaliando os 7 critérios de aceitação e os 4 mecanismos para controle do grau da perturbação. As Figuras 1(a) e 1(b) apresentam o resultado de 10 execuções do algoritmo considerando os diversos mecanismos para controle da diversidade. Para análise do critério de aceitação, utilizou-se o mecanismo $\mathscr{D}_4$ como controle do grau da perturbação. Para análise do controle do grau da perturbação, empregou-se o critério de aceitação $\mathscr{C}_4$. Conforme pode-se verificar, a escolha adequada desses mecanismos é bastante relevante. Esse resultado reforça a importância do estudo do controle de diversidade em métodos heurísticos.



(a) Análise dos 7 critérios de aceitação.

(b) Análise dos 4 mecanismos para controlar o grau de perturbação.

Figura 1: *Box-plots* dos *gaps* médios do AILS-II utilizando as 100 instâncias propostas por Uchoa et al. [2017] considerando os mecanismos de controle de diversidade.

Para avaliar o desempenho do AILS-II para instâncias grandes, foram realizados experimentos com um conjunto de dados proposto por Arnold et al. [2019] que contém 10 instâncias grandes de PRVC. Nesse experimento, avaliam-se o algoritmo proposto AILS-II, o AILS-PR [Máximo e Nascimento, 2021] e o HGS [Vidal, 2022]. Todos os testes foram executados na mesma máquina utilizando o critério de parada de $10n$ segundos, sendo n o número de vértices da instância. Cada instância foi executada 10 vezes e os resultados deste experimento são apresentados na Tabela 1. Conforme pode-se verificar, o AILS-II superou AILS-PR e o HGS em todas as instâncias.

Tabela 1: Resultados alcançados por AILS-II, HGS e AILS-PR nas instâncias introduzidas por Arnold et al. [2019].

			AILS-PR [Máximo e Nascimento, 2021]			HGS [Vidal, 2022]			AILS-II		
Instância	n	BKS	Média (*gap*)	Melhor	T (min)	Média (*gap*)	Melhor	T (min)	Média (*gap*)	Melhor	T (min)
Antwerp1	6000	477277	481978 (0.9850)	481493	**981.19**	482543.6 (1.1035)	482115	998.99	**477886.4 (0.1277)**	**477642**	995.55
Antwerp2	7000	291371	297493.6 (2.1013)	296906	1158.54	300460.1 (3.1194)	300253	**1152.18**	**292466.6 (0.3760)**	**292351**	1153.86
Brussels1	15000	501767	511513.4 (1.9424)	510973	2490.47	518255.1 (3.2860)	518003	**2483.12**	**502207.9 (0.0879)**	**502109**	2493.06
Brussels2	16000	345551	357326.2 (3.4077)	354899	2664.81	361062.8 (4.4890)	361000	**2637.30**	**347223.9 (0.4841)**	**346949**	2653.04
Flanders1	20000	7240845	7359931 (1.6446)	7348763	3332.40	7448609 (2.8693)	7446950	**3308.83**	**7244956.3 (0.0568)**	**7243669**	3330.73
Flanders2	30000	4375193	4600045 (5.1392)	4574321	4992.01	4642602 (6.1119)	4641730	**4651.51**	**4423072.8 (1.0943)**	**4416035**	4992.51
Ghent1	10000	469532	476001.2 (1.3778)	475517	**1652.78**	480354.5 (2.3050)	480349	1658.97	**470024.3 (0.1048)**	**469860**	1659.58
Ghent2	11000	257802	263584 (2.2428)	262391	1830.27	268288.6 (4.0677)	268025	**1661.51**	**259669.6 (0.7244)**	**259023**	1811.13
Leuven1	3000	192848	194417.5 (0.8139)	194272	**412.48**	194430.6 (0.8206)	194408	497.57	**193121.5 (0.1418)**	**193031**	486.99
Leuven2	4000	111397	113117.9 (1.5448)	112885	653.91	113424.1 (1.8197)	113300	654.70	**112143.8 (0.6704)**	**111962**	**648.04**
Média			(2.1200)		2016.89	(2.9992)		1970.47	(0.3868)		2022.45

3. Considerações finais

Esta Tese apresentou um estudo do controle de diversidade no ILS por meio de estratégias adaptativas. Para atestar a eficiência da proposta, os métodos propostos, chamados de AILS e AILS-II, foram submetidos a problemas clássicos de roteamento de veículos. Os resultados dos experimentos indicam superioridade da proposta em comparação com metaheurísticas estado-da-arte. No total, produziram-se 3 artigos em periódicos qualificados (um ainda em fase de submissão), e um dos *softwares* produzidos competiu no evento DIMACS *Challenge* 2022, ficando em ótima colocação, destacando-se em instâncias de larga escala e por sua originalidade.

4. Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq e CAPES pelo apoio financeiro. Pesquisa desenvolvida com utilização dos recursos computacionais do Centro de Ciências Matemáticas Aplicadas à Indústria (CeMEAI), financiados pela FAPESP (proc. 2013/07375-0).

Referências

Arnold, F., Gendreau, M., e Sörensen, K. (2019). Efficiently solving very large-scale routing problems. *Computers & Operations Research*, 107:32–42. ISSN 0305-0548.

Brandão, J. (2011). A tabu search algorithm for the heterogeneous fixed fleet vehicle routing problem. *Computers & Operations Research*, 38(1):140–151. ISSN 0305-0548. Project Management and Scheduling.

Christiaens, J. e Vanden Berghe, G. (2020). Slack induction by string removals for vehicle routing problems. *Transportation Science*, 54(2):417–433.

den Besten, M., Stützle, T., e Dorigo, M. (2001). Design of iterated local search algorithms. In Boers, E. J. W., editor, *Applications of Evolutionary Computing*, p. 441–451, Berlin, Heidelberg. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-540-45365-9.

Dueck, G. e Scheuer, T. (1990). Threshold accepting: A general purpose optimization algorithm appearing superior to simulated annealing. *Journal of Computational Physics*, 90(1):161–175. ISSN 0021-9991.

Glover, F. (1997). A template for scatter search and path relinking. In *European Conference on Artificial Evolution*, Lecture Notes in Computer Science, p. 1–51. Springer.

Golden, B., Assad, A., Levy, L., e Gheysens, F. (1984). The fleet size and mix vehicle routing problem. *Computers & Operations Research*, 11(1):49 – 66. ISSN 0305-0548.

https://proceedings.science/p/157404?lang=pt-br

Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D., e Vecchi, M. P. (1983). Optimization by simulated annealing. *science*, 220(4598):671–680.

Li, F., Golden, B., e Wasil, E. (2007). A record-to-record travel algorithm for solving the heterogeneous fleet vehicle routing problem. *Computers & Operations Research*, 34(9):2734–2742. ISSN 0305-0548.

Lourenço, H. R., Martin, O. C., e Stützle, T. (2003). Iterated local search. In *Handbook of Metaheuristics*, volume 57 of *International Series in Operations Research and Management Science*, p. 320–353. Springer US, Boston, MA. ISBN 978-0-306-48056-0.

Máximo, V. R., Cordeau, J.-F., e Nascimento, M. C. V. (2022a). AILS-II: An adaptive iterated local search heuristic for the large-scale capacitated vehicle routing problem. *arXiv preprint*.

Máximo, V. R., Cordeau, J.-F., e Nascimento, M. C. (2022b). An adaptive iterated local search heuristic for the heterogeneous fleet vehicle routing problem. *Computers Operations Research*, 148:105954. ISSN 0305-0548.

Máximo, V. R. e Nascimento, M. C. V. (2021). A hybrid adaptive iterated local search with diversification control to the capacitated vehicle routing problem. *European Journal of Operational Research*, 294(3):1108–1119. ISSN 0377-2217.

Nogueira, B., Tavares, E., e Maciel, P. (2021). Iterated local search with tabu search for the weighted vertex coloring problem. *Computers & Operations Research*, 125:105087. ISSN 0305-0548.

Penna, P. H. V., Subramanian, A., e Ochi, L. S. (2013). An iterated local search heuristic for the heterogeneous fleet vehicle routing problem. *Journal of Heuristics*, 19(2):201–232. ISSN 1572-9397.

Stützle, T. (2006). Iterated local search for the quadratic assignment problem. *European Journal of Operational Research*, 174(3):1519–1539. ISSN 0377-2217.

Subramanian, A., Penna, P. H. V., Uchoa, E., e Ochi, L. S. (2012). A hybrid algorithm for the heterogeneous fleet vehicle routing problem. *European Journal of Operational Research*, 221 (2):285–295. ISSN 0377-2217.

Subramanian, A., Uchoa, E., e Ochi, L. S. (2013). A hybrid algorithm for a class of vehicle routing problems. *Computers & Operations Research*, 40(10):2519 – 2531. ISSN 0305-0548.

Taillard, E. D. (1999). A heuristic column generation method for the heterogeneous fleet vrp. *RAIRO - Operations Research*, 33(1):1–14.

Uchoa, E., Pecin, D., Pessoa, A., Poggi, M., Vidal, T., e Subramanian, A. (2017). New benchmark instances for the capacitated vehicle routing problem. *European Journal of Operational Research*, 257(3):845 – 858. ISSN 0377-2217.

Vidal, T. (2022). Hybrid genetic search for the CVRP: Open-source implementation and swap* neighborhood. *Computers & Operations Research*, 140:105643. ISSN 0305-0548.

Vidal, T., Crainic, T. G., Gendreau, M., e Prins, C. (2014). A unified solution framework for multi-attribute vehicle routing problems. *European Journal of Operational Research*, 234(3):658 – 673. ISSN 0377-2217.