LIV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional
Juiz de Fora, MG - 8 a 11 de novembro de 2022

RESTRIÇÕES PRÁTICAS DO CORTE BIDIMENSIONAL RETANGULAR DE CHAPAS METÁLICAS

Matheus Francescatto
Universidade Federal de Santa Maria
Av. Roraima, 1000, Camobi, Santa Maria (RS), 97105-900
matheusfrancescatto@hotmail.com

Alvaro Neuenfeldt Júnior
Universidade Federal de Santa Maria
Av. Roraima, 1000, Camobi, Santa Maria (RS), 97105-900
alvaro.junior@ufsm.br

Dani Bromberger
Universidade Federal de Santa Maria
Av. Roraima, 1000, Camobi, Santa Maria (RS), 97105-900
antoninibromberger@gmail.com

Gabriel Stieler
Universidade Federal de Santa Maria
Av. Roraima, 1000, Camobi, Santa Maria (RS), 97105-900
gabrielstieler@gmail.com

David Disconzi
Universidade Federal de Santa Maria
Av. Roraima, 1000, Camobi, Santa Maria (RS), 97105-900
david.disconzi@hotmail.com

RESUMO

Esta pesquisa aborda o problema de corte bidimensional retangular em faixas, onde o objetivo principal é alocar um determinado número de retângulos, sem sobreposição, minimizando a altura da faixa. A pesquisa pretende avaliar o impacto de restrições práticas presentes no processo de corte a plasma de chapas metálicas. Um modelo matemático da literatura foi adaptado, considerando as restrições práticas encontradas no corte a plasma e o impacto das restrições utilizadas foi determinado em instâncias conhecidas do corte bidimensional retangular de faixas e novas instâncias geradas. As melhores soluções foram encontradas no cenário com baixa heterogeneidade e baixo aspectratio e as piores soluções foram encontradas no cenário com aspectratio muito alto e baixa heterogeneidade. No entanto, a combinação de tamanho e número de retângulos, com a largura da faixa, foi o principal fator que impactou a qualidade da solução, dificultando a alocação de retângulos no arranjo e gerando espaços vazios.

PALAVRAS CHAVE. Corte bidimensional retangular de faixas, Corte e empacotamento, Indústria metalmecânica

PO na Indústria.

ABSTRACT

This research approaches the two-dimensional strip packing problem, where the main objective is to allocate a certain number of rectangles, without overlapping, minimizing the strip height. The main goal is to evaluate the impact of practical constraint found in the sheet metal plasma cutting process. An exact mathematical model was adapted, considering the practical constraints found in plasma cutting, and the impact of the constraints used was determined on well-known literature instances and new instances generated. The best solutions were found in the scenario with low heterogeneity and low aspectratio and the worst solutions were found in the scenario with very high aspectratio and low heterogeneity. However, the combination of size and number of rectangles, with strip width strip, was the main factor impacting the quality of the solution, hampering the allocation of rectangles and generating empty spaces.

KEYWORDS. Strip packing problem. Cutting and packing. Metalmechanical industry.

OR in Industry.

1. Introdução

O setor industrial tem ligação com o surgimento de novas tecnologias e metodologias provenientes da necessidade de atendimento da demanda do mercado, o qual se torna cada vez mais competitivo. Ao longo dos anos, novos métodos originados pela busca por melhores soluções que maximizem o lucro e minimizem os custos são incorporadas dentro da indústria. Neste contexto, um dos processos afetados pela modernização industrial é o processo de corte e estampagem, onde, muitas vezes, a matéria-prima é cortada em itens menores e, com base no arranjo destes itens, pode ou não haver desperdício de material.

Os problemas de corte e empacotamento podem ser classificados com base no arranjo dos itens e na forma como ocorre o empacotamento. Entre eles, destacam-se o problema do empacotamento em faixas, do inglês *strip packing problem* (SPP), onde o objetivo principal é minimizar a altura ou maximizar a área utilizada para empacotar todos os pequenos itens listados dentro de uma faixa (*strip*), a qual possua pelo menos uma dimensão infinita. Ainda, não pode haver sobreposição dos itens pequenos e os itens pequenos devem estar completamente dentro da faixa, sendo caracterizado como um problema de dimensão aberta [Wäscher et al. 2007].

Dentre as variações do SPP, o empacotamento retangular bidimensional em faixas, ou *rectangular two-dimensional strip packing problem* (2D-SPP), está presente em uma variedade de aplicações práticas, sendo encontrado em indústrias têxtis, madeireiras, e também no corte de chapas metálicas e rolos de papel. Entretanto, comparado a outros problemas de corte e empacotamento, a literatura do 2D-SPP carece de estudos práticos, ainda que um número relativamente pequeno de artigos aborde o 2D-SPP com este ponto de vista, usando restrições e cenários reais em simulações.

Um dos aspectos importantes da pesquisa envolvendo o SPP a partir de 1980 está relacionado com a redução de desperdícios no processo de produção industrial, estando fortemente atrelado à redução dos custos operacionais e a redução do impacto ambiental causado pelas atividades de transformação envolvendo diferentes tipos de matérias-primas, observadas principalmente na indústria metalmecânica.

Para simular o processo de produção industrial, restrições representativas das condições reais do processo são necessárias e devem ser consideradas durante o desenvolvimento de algoritmos, melhorando o processo de corte na indústria metalmecânica e minimizando desperdícios no processo de produção industrial.

Assim, o objetivo principal desta pesquisa é avaliar a influência das restrições práticas do corte 2D-SPP no posicionamento final dos retângulos em chapas metálicas. Para isso, objetivos específicos foram determinados, os quais são: analisar os aspectos práticos que influenciam o corte 2D-SPP; analisar as restrições práticas encontradas no corte de itens retangulares em chapas metálicas; e analisar o impacto das restrições práticas no arranjo dos retângulos, comparando com um valor de referência desenvolvido.

2. Revisão de Literatura

Com o intuito de justificar a relevância deste estudo em âmbito acadêmico, buscou-se por trabalhos relacionados à pesquisa por meio das principais bases de dados relacionadas ao tema, Scopus e *Web of Science*. Apenas artigos em inglês publicados em periódicos até 2020 foram selecionados para cobrir o campo de pesquisa. Para eliminar artigos sem relação com o 2D-SPP, dois estágios de seleção foram realizadas. O primeiro estágio contou com uma revisão dos resumos e títulos dos artigos e o segundo estágio contou com uma revisão completa dos artigos selecionados no primeiro estágio. Dentre a totalidade dos 223 artigos retornados pela busca, seis artigos foram extraídos como trabalhos que possuem grande relação com o tema desta pesquisa e serão discutidos em sequência.

O 2D-SPP é abordado considerando uma variante mais geral e prática do problema em [Miranda et al. 2010], visando diminuir o desperdício de matéria-prima e minimizar o tempo do

processo de produção. Geralmente, nas abordagens do 2D-SPP, dado que uma das dimensões da faixa é considerada infinita, o objetivo principal é a minimização do tamanho da faixa necessária para alocar um determinado número de itens. Entretanto, em alguns campos industriais, a matéria-prima é barata ou pode ser facilmente reciclada, originando um novo critério de maior importância relacionado à velocidade com a qual os itens podem ser obtidos, minimizando assim o tempo de produção e maximizando o uso do equipamento de corte. Ainda, o número de cortes necessários para realizar um determinado arranjo é crucial para a vida útil das máquinas, impactando a velocidade de corte. Neste contexto, o estudo aborda o 2D-SPP considerando dois objetivos principais, a minimização do tamanho da faixa e a minimização do número de cortes no processo de produção. Para isso, uma codificação baseada na representação completa dos padrões de arranjo foi apresentada, entretanto, a mesma era inviável para instâncias maiores. Assim, uma codificação hyperheurística foi criada, combinando heurísticas para solucionar o problema multiobjetivo.

[Illich et al. 2007] estuda as aplicações do 2D-SPP onde a velocidade com que os itens podem ser cortados da faixa a fim de maximizar o uso eficiente do equipamento de corte é prioridade. Para isso, os autores buscam a minimização do número de cortes independentes necessários para um arranjo e a minimização do desperdício de matéria-prima. Um algoritmo evolutivo multiobjetivo que gera soluções para o 2D-SPP baseado em dois critérios, minimizar a altura da faixa e minimizar o número de cortes independentes necessários, é proposto.

[Coelho et al. 2012] apresenta um algoritmo evolutivo multiobjetivo especializado, o qual é acoplado, separadamente, a quatro heurísticas de posicionamento para resolver o 2D-SPP. O estudo tem como objetivo a minimização da quantidade de matéria-prima desperdiçada e o número de cortes independentes exigidos para cada arranjo. A fase de construção do algoritmo GRASP (*Greedy Randomized Adaptive Search Procedure*) é utilizada para gerar uma parcela da população inicial do algoritmo multiobjetivo. Em adição, quatro heurísticas de posicionamento diferentes, *Next-Fit*, uma variação de *Next-Fit*, *Best-Fit* e *First-Fit*, foram acopladas ao algoritmo multiobjetivo. Os resultados mostram que a metodologia apresentada é capaz de gerar um bom conjunto de soluções candidatas para cada problema de teste.

[Sugi et al. 2020] propôs um novo algoritmo baseado em uma técnica de geração de coluna considerando a restrição de corte guilhotina de 3 estágios. No estudo, um material em formato de rolo frequentemente usados em operações práticas de corte é considerado. Além da restrição do corte guilhotina, os autores utilizaram a restrição no número de lâminas de corte disponível. Ainda, segundo os autores, na literatura existente, não há solução do para o 2D-SPP assumindo um material enrolado, o qual é frequentemente usado para usinagem de aço, onde ambas as restrições são consideradas.

[Hawa et al. 2018] aborda a restrição de pontuação relacionada as máquinas de corte de papelão. A restrição de pontuação tem origem na construção de caixas de papelão, onde os retângulos devem ser alocados na faixa para serem marcados em uma operação subsequente. Os retângulos devem ser embalados na faixa respeitando uma distância mínima de pontuação determinada pelas máquinas de pontuação. Para isto, os autores desenvolveram um algoritmo de tempo polinomial exato para encontrar um possível alinhamento de retângulos na faixa, integrando o algoritmo com uma heurística de empacotamento e comparando o algoritmo com duas outras heurísticas gulosas, discutindo as circunstâncias em que cada método é superior.

Outra restrição do processo de corte é a restrição de sequenciamento, encontrada na produção de papelão ondulado. Devido às restrições do amortecedor, as máquinas de corte devem ser sequenciadas de forma que, a qualquer momento, apenas dois tipos de retângulos estejam em produção. Para lidar com a restrição de sequenciamento, [Rinaldi e Franz 2007] desenvolveram dois algoritmos baseados na caracterização gráfica de soluções viáveis. O primeiro algoritmo é um procedimento de duas fases baseado em um modelo de programação linear inteira mista, enquanto o segundo algoritmo segue uma abordagem combinatória.

Apesar de existirem artigos que abordam o 2D-SPP de um ponto de vista prático, utilizando restrições e cenários reais em simulações, o número de estudos que abordam o problema apresentado ainda é muito pequeno quando comparado com o restante dos artigos envolvendo o 2D-SPP. Desta forma, a grande maioria dos resultados obtidos com estes estudos não possuem uma aplicação prática, gerando uma lacuna nesta área. Neste contexto, estudos abordando restrições práticas encontradas nas diversas indústrias que aplicam o 2D-SPP são necessários.

3. Metodologia

O objetivo da pesquisa foi verificar a influência das restrições práticas do 2D-SPP no posicionamento final dos retângulos cortados em chapas metálicas. A pesquisa conta com 12 etapas. A Etapa 1 correspondeu a estruturação do problema, realizado por meio de investigações preliminares de pesquisa bibliográfica em livros e artigos científicos para oferecer suporte na estruturação das delimitações e objetivos do estudo. Posteriormente, na Etapa 2, conhecimentos sobre os trabalhos científicos envolvendo o 2D-SPP foram criados, relacionados aos métodos de solução adotados para resolver o problema com base em artigos científicos relevantes, além das restrições básicas do 2D-SPP e as restrições baseadas em aplicações práticas, sendo identificadas por meio de uma revisão sistemática de literatura.

Na Etapa 3 as características do processo de corte foram determinadas. Devido a abrangência de casos onde o 2D-SPP pode ser encontrado, existem inúmeros processos de corte que possuem diferentes características e particularidades. O estudo de caso selecionado para esta pesquisa envolve o processo de corte a plasma, especificamente aplicado em chapas metálicas. Desta forma, por meio de pesquisas bibliográficas, consultas em manuais práticos e visitas em indústrias da área, foi possível determinar as características técnicas do corte a plasma que afetam o arranjo dos retângulos na faixa.

A Etapa 4 consistiu em selecionar as restrições práticas relativas ao processo de corte abordado, assim, similar a Etapa 3, um levantamento das restrições que impactam e influenciam o arranjo dos retângulos é realizado. A seleção das restrições práticas tem como base estudos prévios, consultas com fabricantes e engenheiros da área, além de visitas em indústrias e empresas que trabalham com o corte a plasma de chapas metálicas. A seguir, a Etapa 5 está relacionada com a determinação de como as restrições práticas selecionadas e as restrições provenientes do processo de corte a plasma afetam o arranjo dos retângulos. Desta forma, compreendendo a influência destas restrições, foi possível estruturar o modelo matemático.

O processo de modelagem matemática tem início com a Etapa 6, onde o modelo matemático foi adaptado com base nas restrições práticas presentes no processo de corte a plasma de chapas metálicas e a forma com que estas restrições influenciam o arranjo dos retângulos. Ainda, as restrições consideradas no desenvolvimento do modelo matemático são a distância mínima entre os retângulos e a distância mínima entre os retângulos e as bordas da chapa.

A modelagem matemática para o 2D-SPP proposta por [Kenmochi et al. 2009] é utilizada como base para esta pesquisa. A possibilidade de rotação dos retângulos, bem como as restrições de distância mínima entre os retângulos e a distância mínima entre os retângulos e as bordas da chapa são adicionadas ao modelo. Neste contexto, o objetivo principal da modelagem é minimizar a altura total da chapa H_p^{pi}, mediante o posicionamento de um conjunto $I = \{1, 2, \dots, n\}$ de retângulos de forma *offline*, onde as características dos retângulos são previamente conhecidas, sendo possível definir a ordem e como os retângulos serão posicionados na chapa.

A variação do problema estudado ocorre em duas dimensões, desta forma, os retângulos são alocados dentro da chapa e sua posição é determinada pelas coordenadas x_i e y_i, onde $i \in I$. Cada retângulo é caracterizado por duas dimensões, altura h_i e largura w_i. Ao realizar o empacotamento dos retângulos, as coordenadas x_i e y_i são encontradas. Considera-se também que o posicionamento dos retângulos nas coordenadas x_i e y_i segue uma abordagem *bottom-left*, de

forma que o empacotamento do retângulo na coordenada determinada tem início pela parte inferior esquerda do mesmo.

$$minimize\ H_p^{pi} \tag{1}$$

$$subject\ to\ \ x_i + w_i\alpha_i + h_i\alpha_{n+i} \leq W^{pi} - \delta \qquad \forall\, i \in I, \tag{2}$$

$$y_i + h_i\alpha_i + w_i\alpha_{n+i} \leq H_p^{pi} - \delta \qquad \forall\, i \in I, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &x_i + h_i\alpha_{n+i} + w_i\alpha_i + \beta \leq x_j \ \ or \\ &x_j + h_j\alpha_{n+j} + w_j\alpha_j + \beta \leq x_i\ or \\ &y_i + h_i\alpha_i + w_i\alpha_{n+i} + \beta \leq y_j\ or \\ &y_j + h_j\alpha_j + w_j\alpha_{n+j} + \beta \leq y_i \end{aligned} \qquad \forall\, i,j \in I, i \neq j, \tag{4}$$

$$\alpha_i + \alpha_{n+i} = 1 \qquad \forall\, i \in I, \tag{5}$$

$$x_i \geq \delta\ and\ y_i \geq \delta \qquad \forall\, i \in I, \tag{6}$$

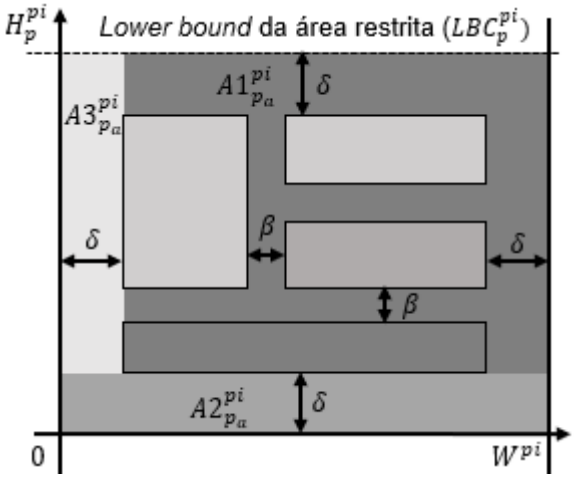
$$x_i, y_i \geq 0 \qquad \forall\, i \in I. \tag{7}$$

Considerando as equações que limitam o posicionamento dos retângulos dentro da chapa, restrição (2) e restrição (3), a distância mínima entre as extremidades δ é adicionada subtraindo da altura H_p^{pi} e da largura total W^{pi} da chapa. De forma semelhante, a restrição (6) determina que x_i e y_i sejam maiores que δ, garantindo que os retângulos sejam alocados dentro da chapa, respeitando uma distância mínima da extremidade.

Ainda, a distância mínima entre os retângulos β é adicionada a restrição (4). Desta forma, a restrição (4) restringe o posicionamento dos retângulos para que não ocorre sobreposição entre eles e garante que, em relação a posição x_i e a posição y_i, uma distância mínima entre os retângulos seja respeitada. Assim, durante o empacotamento dos retângulos, a posição dos retângulos, x_i e y_i, adicionada à dimensão do retângulo correspondente, w_i ou h_i, e acrescida da distância mínima β, são consideradas para a determinação da posição final do retângulo.

Para avaliar o desempenho do modelo matemático, um novo *lower bound* envolvendo as restrições do corte a plasma foi desenvolvido com base em dados geométricos relacionados a dimensão da faixa, área dos retângulos e as restrições práticas encontradas no corte a plasma de chapas metálicas, denominado *lower bound* da área restrita (LBC_p^{pi}). A formulação proposta utiliza o mesmo valor para β e δ. A Figura 1 mostra como o LBC_p^{pi} é calculado e também um exemplo de empacotamento considerando as restrições propostas.

Figura 1 – Cálculo do LBC_p^{pi}.



O LBC_p^{pi} é composto por três áreas diferentes, $A1_{p_a}^{pi}$, $A2_{p_a}^{pi}$ e $A3_{p_a}^{pi}$. Para determinar o LBC_p^{pi}as três áreas são divididas por W^{pi}, conforme a Equação 8. Ainda, como β e δ são considerados iguais, considera-se $\beta = \delta$ na Equação 8.

$$LBC_p^{pi} = \frac{\left(\frac{A1_{Pa}^{pi}}{W^{pi} - \delta}\right) x\ \delta + W^{pi}\ x\ \delta + \sum_i^n (h_i + \beta)\ x\ (w_i + \beta)}{W^{pi}} \qquad \forall\ i \in I. \tag{8}$$

Na Etapa 7, o modelo matemático foi testado em instâncias já validadas pela literatura e em instâncias geradas, determinando a adequação do modelo para as subsequentes análises. Aprimoramentos necessários para adequar o modelo matemático foram realizados na Etapa 8. Desta forma, com o modelo adequado, foi iniciado a etapa de aplicação.

A Etapa 9 contou com a seleção das instâncias nas quais o modelo matemático foi aplicado. Para a seleção, foram utilizadas as principais instâncias que são comumente usadas como referência para o teste de algoritmos na literatura do 2D-SPP. Desta forma, as instâncias consideradas neste trabalho foram apresentadas em: [Beasley 1985a]; [Beasley 1985b]; [Berkey e Wang 1987]; [Christofides e Whitlock 1977] e [Hopper e Turton 2001]. Ainda, para obter um número adequado de instâncias pertencentes aos cenários propostos, utilizou-se as instâncias propostas em [Neuenfeldt et al. 2017] e [Neuenfeldt et al. 2019].

A etapa 10 contou com a aplicação do modelo matemático. Assim, os resultados provenientes da aplicação do modelo matemático nas instâncias discutidas foram analisados e comparados durante a Etapa 11, a fim de verificar a influência das restrições práticas do 2D-SPP no posicionamento final dos retângulos cortados em chapas metálicas. Por fim, na Etapa 12 são apresentadas as conclusões da pesquisa

4. Resultados

Considerando a complexidade geométrica do problema, cenários foram desenvolvidos para comparar as soluções obtidas para diferentes instâncias e determinar o impacto das restrições de corte a plasma. Os principais parâmetros usados para determinar a complexidade geométrica de cada instância foram o aspectratio (ar^{pi}) e a heterogeneidade (ht^{pi}).

O aspectratio (ar^{pi}) é usado para identificar e determinar variações nas dimensões dos retângulos [Neuenfeldt et al. 2017], enquanto a heterogeneidade (ht^{pi}) está relacionado à

diversificação dos retângulos em cada instância. Em adição, ht^{pi} é obtida pela proporção de diferentes retângulos em uma instância, com base nas dimensões absolutas (w_i e h_i).

Tanto ar^{pi} quanto ht^{pi} estão relacionados às dimensões dos retângulos, caracterizando a variação geométrica da instância. O número de retângulos e a largura da chapa são características básicas para formar a solução de uma instância, determinando sua complexidade. Os cenários foram desenvolvidos usando uma combinação de ar^{pi} e ht^{pi}, com base nos valores encontrados para as 60 instâncias analisadas. A Tabela 1 mostra a caracterização dos cenários.

Tabela 1- Caracterização dos cenários

Cenário	ht^{pi}	ar^{pi}
1	$0 \leq ht^{pi} \leq 0{,}33$	$0 \leq ar^{pi} \leq 0{,}50$
2	$0 \leq ht^{pi} \leq 0{,}33$	$0{,}50 < ar^{pi} \leq 1{,}00$
3	$0 \leq ht^{pi} \leq 0{,}33$	$1{,}00 < ar^{pi} \leq 2{,}00$
4	$0 \leq ht^{pi} \leq 0{,}33$	$2{,}00 < ar^{pi}$
5	$0{,}33 < ht^{pi} \leq 0{,}66$	$0 \leq ar^{pi} \leq 0{,}50$
6	$0{,}33 < ht^{pi} \leq 0{,}66$	$0{,}50 < ar^{pi} \leq 1{,}00$
7	$0{,}33 < ht^{pi} \leq 0{,}66$	$1{,}00 < ar^{pi} \leq 2{,}00$
8	$0{,}33 < ht^{pi} \leq 0{,}66$	$2{,}00 < ar^{pi}$
9	$0{,}66 < ht^{pi} \leq 1{,}00$	$0 \leq ar^{pi} \leq 0{,}50$
10	$0{,}66 < ht^{pi} \leq 1{,}00$	$0{,}50 < ar^{pi} \leq 1{,}00$
11	$0{,}66 < ht^{pi} \leq 1{,}00$	$1{,}00 < ar^{pi} \leq 2{,}00$
12	$0{,}66 < ht^{pi} \leq 1{,}00$	$2{,}00 < ar^{pi}$

A partir dos valores de ht^{pi} obtidos para as instâncias abordadas, três diferentes intervalos foram utilizados: baixo, médio e alto. Da mesma forma, quatro diferentes intervalos de ar^{pi} foram considerados. Um total de 12 cenários, compostos por 5 instâncias cada, foram obtidos combinando diferentes valores de ar^{pi} e ht^{pi}. As instâncias são caracterizadas como baixo ar^{pi} ($0 \leq ar^{pi} \leq 0{,}50$), médio ar^{pi} ($0{,}50 < ar^{pi} \leq 1{,}00$), alto ar^{pi} ($1{,}00 < ar^{pi} \leq 2{,}00$) e muito alto ar^{pi}($2{,}00 < ar^{pi}$).

Para verificar o impacto das restrições de corte a plasma, 36 instâncias da literatura foram selecionadas, considerando as variações de número de retângulos, largura da chapa, aspectratio e heterogeneidade. Considerando os requisitos de ar^{pi} e ht^{pi}, não foram encontradas na literatura cinco instâncias adequadas para os cenários 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11 e 12. Desta forma, um total de 24 instâncias (*fran*) foram geradas. O número e as dimensões dos retângulos foram definidos aleatoriamente para cada instância do problema, considerando como valor de referência os valores mínimo e máximo de ht^{pi} dos cenários requeridos. Ainda, a largura da chapa foi escolhida com base nos valores mínimo e máximo de ar^{pi}.

Os resultados foram obtidos usando o modelo matemático apresentado na Seção 2. Ainda, o solver comercial utilizado foi o CPLEX Studio IDE 20.1.0 com configurações de parâmetros padrão e um limite de tempo baseado no número de retângulos em cada instância. Para instâncias com $n^{pi} \leq 15$, o limite de tempo determinado foi de 720 segundos, para $15 < n^{pi} \leq 25$, 900 segundos, para $25 < n^{pi} \leq 35$, 1080 segundos, para $35 < n^{pi} \leq 40$, 1320 segundos e para $40 < n^{pi} \leq 50$, 1500 segundos. O computador usado para a realização dos testes possui um processador Intel® Core™ i5-7200U 2, 5 GHz, com 8 GB de RAM e sistema operacional Windows 10 de 64 bits.

O *gap* (gap_p^{pi}) entre H_p^{pi} e o respectivo LBC_p^{pi} foi utilizado para avaliar e comparar soluções. Ainda, a diferença entre H_p^{pi} e LBC_p^{pi} está relacionada aos espaços vazios encontrados no arranjo dos retângulos, com exceção da área ocupada por β e δ. Quanto maior o *gap*, pior é a qualidade da solução, com base no número de espaços vazios encontrados. Por exemplo,

considerando uma chapa com $W^{pi} = 10$, o valor das restrições de corte a plasma é definido em 1 unidade, nenhuma rotação é permitida e as dimensões dos retângulos da instância são $w_i = 7$ e $h_i = 1$, referente ao eixo x, é inviável que os retângulos sejam posicionados lado a lado, originando um espaço vazio com valor de área de 1 unidade para cada retângulo.

Para verificar a qualidade das soluções, os resultados foram classificados em cinco grupos baseados no valor do *gap* obtido: soluções de alta qualidade ($gap_1^{pi} \leq 5\%$), soluções de boa qualidade ($5\% < gap_1^{pi} \leq 10\%$), soluções de qualidade média ($10\% < gap_1^{pi} \leq 20\%$), soluções de qualidade ruim ($20\% < gap_1^{pi} \leq 30\%$) e soluções de qualidade extremamente ruim ($gap_1^{pi} > 30\%$). Quanto menor o *gap*, menos espaços vazios são encontrados, estando a H_p^{pi} obtida para o arranjo gerado mais próxima do LBC_p^{pi}. A Tabela 2 mostra os resultados obtidos para $\beta = \delta = 1$.

Tabela 2 - Resultados para $\beta = \delta = 1$. Os resultados destacados possuem optimalidade provada.

Cenário	Instância	H_1^{pi}	LBC_1^{pi}	gap_1^{pi}
1	*ngcut8*	47	46	2,17%
	ngcut12	108	100	8,00%
	pt8_1_12	327	312	4,81%
	pt8_1_90	**149**	143	4,20%
	pt8_22_3	153	149	2,68%
2	*ngcut1*	35	34	2,94%
	ngcut2	57	52	9,62%
	ngcut9	73	69	5,80%
	pt6_24_34	389	362	7,46%
	pt8_1_51	273	251	8,76%
3	*cgcut1*	43	42	2,38%
	fran31	50	45	11,11%
	fran32	190	181	4,97%
	fran33	163	151	7,95%
	fran34	49	43	13,95%
4	*fran41*	57	43	32,56%
	pt1_23_52	**43**	34	26,47%
	pt1_23_94	67	62	8,06%
	pt1_24_15	49	42	16,67%
	pt5_23_32	73	58	25,86%
5	*C12*	33	32	3,13%
	C13	33	31	6,45%
	fran51	236	227	3,96%
	ngcut4	**31**	30	3,33%
	ngcut7	**22**	16	37,50%
6	*C22*	26	24	8,33%
	C31	44	40	10,00%
	fran61	212	199	6,53%
	fran62	354	328	7,93%
	ngcut6	53	52	1,92%
7	*fran71*	164	156	5,13%
	fran72	182	165	10,30%
	fran73	56	49	14,29%
	fran74	141	133	6,02%
	fran75	445	407	9,34%
8	*fran81*	164	157	4,46%
	fran82	477	442	7,92%
	fran83	232	212	9,43%

	fran84	**21**	19	10,53%
	fran85	87	82	6,10%
9	*C11*	33	32	3,13%
	fran91	89	85	4,71%
	fran92	**64**	61	4,92%
	fran93	59	51	15,69%
	path1	120	114	5,26%
10	*bwmv155*	66	64	3,13%
	bwmv160	87	83	4,82%
	C21	26	24	8,33%
	C32	43	40	7,50%
	gcut13	5124	4789	7,00%
11	*fran111*	64	61	4,92%
	fran112	63	60	5,00%
	gcut1	**728**	668	8,98%
	gcut5	**1164**	1103	5,53%
	gcut9	2133	2034	4,87%
12	*fran121*	1059	1006	5,27%
	gcut2	1228	1123	9,35%
	gcut6	2667	2490	7,11%
	gcut10	5720	5383	6,26%
	gcut11	7122	6572	8,37%

Algumas instâncias com um baixo número de retângulos apresentaram resultados com optimalidade provada, obtendo um tempo médio de execução de 109 segundos. Para as demais instâncias, onde o limite de tempo foi excedido, a optimalidade não foi provada.

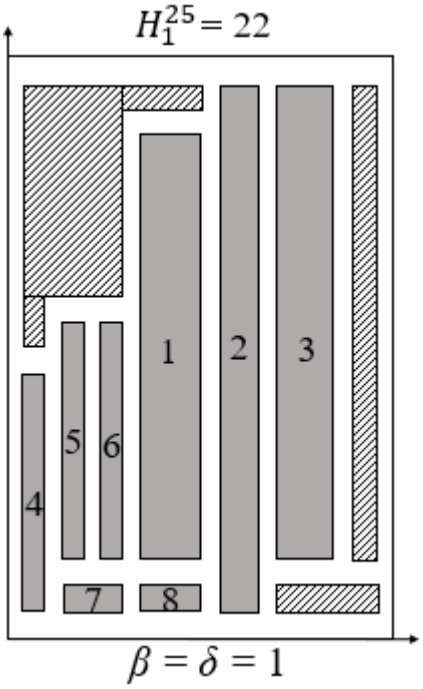
As instâncias do cenário 1 apresentaram as soluções de melhor qualidade, com um *gap* médio de 4,37%. Para os demais cenários, o *gap* obtido foi de 5% a 10%, exceto para o cenário 4 (21,92%), onde a combinação de um ar^{pi} muito alto e uma ht^{pi} baixa, retornou soluções de qualidade ruim. Considerando o impacto do ar^{pi} nas soluções, os cenários com ar^{pi} baixo (cenário 1, cenário 5 e cenário 9) e médio (cenário 2, cenário 6 e cenário 10) apresentaram soluções de boa qualidade, com um *gap* médio de 7,33% e 6,67%, respectivamente. Para cenários com um ar^{pi} muito alto (cenário 4, cenário 8 e cenário 12), os piores valores de *gap* foram encontrados, com uma média de 12,29%, mostrando que um ar^{pi} muito alto impacta negativamente a qualidade das soluções para todos os valores de ht^{pi}.

O número de retângulos e a largura da chapa também impactam na qualidade das soluções. Normalmente, instâncias com um grande número de retângulos são complexas e requerem um tempo mais elevado para encontrar uma solução. Assim, instâncias com um número elevado de retângulos ($30 < n^{pi} \leq 50$) produziram as piores soluções, com um *gap* médio de 12,60%, o que pode estar relacionado à complexidade do problema e a dificuldade em obter diferentes combinações de arranjos. No entanto, soluções de boa qualidade foram encontradas em instâncias com um número de retângulos de $10 < n^{pi} \leq 20$, com um *gap* médio de 5,91%, podendo estar atribuído ao número relativamente alto de combinações de retângulos possíveis, retornando melhores arranjos em relação aos espaços vazios. Em adição, instâncias com um número baixo de retângulos ($n^{pi} \leq 10$) retornaram soluções de qualidade média e instâncias com um número relativamente alto de retângulos ($20 < n^{pi} \leq 30$) retornaram soluções de boa qualidade. Não foi detectado um padrão claro baseado no número de retângulos e no *gap* obtido, portanto, o número de retângulos sozinho não deve ser usado para estimar a qualidade das soluções.

Considerando as dimensões geométricas da chapa, a qualidade da solução obtida é afetada pela dimensão e o número de retângulos em uma instância, bem como W^{pi}, tendo essa combinação de fatores o maior impacto na qualidade das soluções. Instâncias onde alguns retângulos são

relativamente grandes em comparação a W^{pi} retornaram as piores soluções, como visto em *ngcut7* ($gap_1^{25} = 37{,}50\%$) e *fran41* ($gap_1^{16} = 32{,}56\%$). Quanto maiores os retângulos são comparados a W^{pi}, mais difícil é o posicionamento dos retângulos no arranjo, o que pode originar espaços vazios. No entanto, dependendo do tamanho dos retângulos restantes, os espaços vazios formados podem ser preenchidos ou não, determinando a qualidade da solução. A Figura 2 mostra o arranjo obtido para *ngcut7*.

Figura 2 - Arranjo para *ngcut7* com $\beta = \delta = 1$. A área em branco representa o espaço ocupado por β e δ, e a área hachurada representa os espaços vazios formados.



A restrição de ortogonalidade pode reduzir o impacto da combinação entre W^{pi} e o tamanho dos retângulos, permitindo que os retângulos sejam rotacionados. Sem a restrição de ortogonalidade e considerando a distância mínima aplicada, uma solução viável para *ngcut7* não seria possível. Os retângulos 1, 2 e 3 são relativamente grandes quando comparados à W^{pi}, possuindo um número limitado de posições viáveis, o que auxilia na formação de espaços vazios. Ainda, é inviável rotacionar o retângulo 2, fazendo com que H_p^{pi} seja pelo menos igual a 22 unidades. Com a impossibilidade de rotação do retângulo 2, o retângulo 1 e o retângulo 3 também não podem ser rotacionados, ocupando 40% da chapa. Um total de 72 unidades de área do arranjo são espaços vazios que poderiam ser preenchidos com diferentes retângulos. Ainda, rotacionar e alternar as posições dos retângulos restantes não reduz a área desperdiçada encontrada.

As melhores soluções foram obtidas por *ngcut6* ($gap_1^{30} = 1{,}92\%$), *ngcut8* ($gap_1^{1} = 2{,}17\%$), *cgcut1* ($gap_1^{11} = 2{,}38\%$), *pt8_22_3* ($gap_1^{5} = 2{,}68\%$), *ngcut1* ($gap_1^{6} = 2{,}94\%$), *C11* ($gap_1^{41} = 3{,}13\%$), *C12* ($gap_1^{21} = 3{,}13\%$), *bwmv155* ($gap_1^{46} = 3{,}13\%$) e *ngcut4* ($gap_1^{24} = 3{,}33\%$), todas apresentando soluções de alta qualidade. As piores soluções encontradas foram obtidas por *ngcut7* ($gap_1^{25} = 37{,}50\%$), *fran41* ($gap_1^{16} = 32{,}56\%$), *pt1_23_52* ($gap_1^{17} = 26{,}47\%$) e *pt5_23_32* ($gap_1^{20} = 25{,}86\%$), apresentando soluções de qualidade ruim e extremamente ruim, com um elevado número de espaços vazios, ocasionando um maior desperdício de matéria-prima e confirmando o impacto da combinação entre W^{pi} e as dimensões dos retângulos na qualidade da solução.

Em resumo, o cenário 1, com ht^{pi} baixa e ar^{pi} baixo, retornou as melhores soluções, enquanto uma combinação de ar^{pi} muito alto e ht^{pi} baixa retornou as piores soluções (cenário 4). Instâncias com baixo e médio ar^{pi} tendem a produzir soluções de boa qualidade. Não foi encontrado um padrão claro em relação ao número de retângulos e a qualidade das soluções, ambas instâncias com um menor número de retângulos e instâncias com um maior número de retângulos retornaram soluções de qualidade boa e ruim. Por fim, a combinação entre o tamanho e número de retângulos em uma instância, aliado a W^{pi}, proporcionou o maior impacto na qualidade das soluções. Quanto maiores são os retângulos em relação a W^{pi}, mais difícil é encontrar boas posições no arranjo, originando espaços vazios, que podem ou não ser preenchidos com os retângulos restantes.

5. Conclusão

Um modelo matemático para o 2D-SPP foi adaptado, considerando restrições práticas encontradas no corte a plasma de chapas metálicas, onde o objetivo principal é minimizar a altura da chapa, encontrando um arranjo sem sobreposição de retângulos. Para o corte a plasma de chapas metálicas, duas restrições práticas foram abordadas, a distância mínima entre os retângulos e a distância mínima entre os retângulos e as bordas da chapa. O impacto das restrições no arranjo do empacotamento em relação ao desperdício de matéria-prima foi analisado.

Para avaliar o impacto das restrições de corte a plasma de chapas metálicas, 36 instâncias da literatura foram selecionadas e 24 instâncias foram geradas, sendo organizadas em 12 cenários, com base em variações de ht^{pi} e ar^{pi}. Para $\beta = \delta = 1$, as soluções de melhor qualidade foram encontradas no cenário com baixa ht^{pi} e baixo ar^{pi} (cenário 1) e as soluções de pior qualidade foram encontradas no cenário com ar^{pi} muito alto e baixa ht^{pi} (cenário 4). O principal fator que impacta na qualidade da solução encontrada foi a combinação do tamanho e número dos retângulos, bem como a largura da chapa, devido à dificuldade de realocar os retângulos no arranjo, originando espaços vazios.

Considerando o contexto de desperdício de matéria-prima, instâncias com uma largura menor ($W^{pi} \leq 10$) podem ser utilizadas em operações práticas, pois a qualidade das soluções encontradas foi aceitável. No entanto, a relação do tamanho dos retângulos com a largura da chapa deve ser analisada, pois instâncias com retângulos grandes e chapas menores originaram as piores soluções.

Para estudos futuros, é necessário o desenvolvimento de medidas de referência mais precisas do que o limite inferior restrito proposto, principalmente para abordar casos em que os espaços vazios do arranjo e a área ocupada pelas restrições de corte a plasma são elevados quando comparados às dimensões da chapa.

Referências

Beasley, J. E. (1985a). Algorithms for unconstrained two-dimensional guillotine cutting. *The Journal of the Operational Research Society*, 36:297–306.

Beasley, J. E. (1985b). An exact two-dimensional non-guillotine cutting tree search procedure. *Operations Research*, 33:49–64.

Berkey, J. O. e Wang, P. Y. (1987). Two-dimensional finite bin-packing algorithms. *The Journal of the Operational Research Society*, 38:423–429.

Christofides, N. e Whitlock, C. (1977). An algorithm for two-dimensional cutting problems. O*perations Research*, 25:30–44.

Coelho, D.G., Wanner, E., Souza, S., Carrano, E. e Purshouse, R.C. (2012). Artigo em conferência. In *2012 IEEE Congress on Evolutionary Computation (IEEE-WCCI 2012)*, Brisbane, Australia.

Hawa, A. L.; Lewis, R.; Thompson, J. M. (2018). Artigo em conferência. In *COCOA: International Conference on Combinatorial Optimization and Applications (COCOA 2018)*, p. 449-462, Atlanta, GA.

Hopper, E.; Turton, B. C. H. (2001). An empirical investigation of meta-heuristic and heuristic algorithms for a 2D packing problem. *European Journal of Operation Research*, 128: 34–57.

Illich, S.; While, L.; Barone, L. (2007). Artigo em conferência. In *2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation*, Sing*ap*ore.

Kenmochi, M., Imamichi, I., Nonobe, K., Yagiura, M. e Nagamochi, H. (2009). Exact algorithms for the two-dimensional strip packing problem with and without rotations. *European Journal of Operation Research*, 198:77-83.

Miranda, G., Armas, J., Segura, C. e León, C. (2010). Artigo em conferência. *IEEE Congress on Evolutionary Computation*, Barcelona, Spain.

Neuenfeldt, A.J., Silva, E., Gomes, M.A. e Oliveira, J.F. (2017). Artigo em conferência. In *Congress of APDIO, the Portuguese Operational Research Society (APDIO 2017)*, Valença, Portugal.

Neuenfeldt, A., Silva, E., Gomes, A. M., Soares, C. e Oliveira, J.F. (2019). Data mining based framework to assess solution quality for the rectangular 2D strip-packing problem. *Expert Systems with Applications*, 118:365-380.

Rinaldi, F. e Franz, A. (2007). A two-dimensional strip cutting problem with sequencing constraint. *European Journal of Operation Research*, 183:1371-1384.

Sugi, M., Shiomi, Y., Okubo, T., Nagai, H., Inoue, K. e Ota, J. (2020). Solution of the rectangular strip packing problem considering a 3-stage guillotine cutting constraint with finite slitter blades. *International Journal of Automation Technology*, 14:47-458.

Wäscher, G., Haußner, H. e Schumann, H. (2007). An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operation Research***,** 183:1109-1130.