LIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional
João Pessoa - PB, 3 a 5 de novembro de 2021

Partição de Grafos P_4-esparsos em Duas Florestas

Hugo Caetano Borges Carneiro
Loana Tito Nogueira
Raquel de Souza F. Bravo
Universidade Federal Fluminense
Av. Gal. Milton Tavares de Souza, s.n - São Domingos, Niterói
hugocarneiro@id.uff.br; loana@ic.uff.br; raquel@ic.uff.br

RESUMO

Nesse trabalho consideramos o problema da *arboricidade* em grafos. *Arboricidade* e coloração são problemas intimamente relacionados. Em ambos, desejamos particionar os vértices do grafo em subconjuntos esparsos. No primeiro, em subconjuntos acíclicos (i.e., florestas), o segundo em conjuntos independentes. Determinar a arboricidade de um grafo é um problema NP-difícil para grafos gerais. Neste trabalho, desejamos verificar, sob quais condições, um grafo G p_4-esparso possui arboricidade 2. Grafos que admitem um particionamento dos seus vértices em 2 florestas serão chamados *grafos*-$2F$. Apresentamos uma caracterização por subgrafos minimais proibidos para a classe dos grafos P_4-esparsos-$2F$. Para o caso da arboricidade $p > 2$, generalizamos nossa família de subgrafos proibidos e observamos que cada grafo nessa família é uma obstrução mininal para arboricidade p. Como o número de obstruções minimais P_4-esparsas para arboricidade p cresce exponencialmente, não é possível uma caracterização análoga àquela para arboricidade 2.

PALAVRAS CHAVE. Grafos P_4-esparsos, Grafos-$2F$, Arboricidade.

Teoria e Algoritmos em Grafos (TAG), Otimização Combinatória (OC)

ABSTRACT

This work considers the arboricity problem in graphs, which is closely related to coloring. Both problems seek for a partition of the vertex set of a graph into sparse subgraphs. The first one into acyclic subsets (i.e., forests), the second into independent sets. Determining the arboricity of a graph is a NP-hard problem in general. We present necessary and suficient conditions for the vertex set of a given a P_4-sparse graph G be partitioned into 2 forests. Graphs whose set of vertices admit a partitioning into 2 forests are called $2F$-graphs. Our result consists of a characterization of 2F-P_4-sparse graphs by minimal forbidden patterns. For the problem of arboricity p in P_4-sparse graphs, we generalize our family of forbidden subgraphs and show that each graph in this family is an minimal obstruction for arboricity p. However, there is no analogue to our main result since P_4-sparse minimal obstructions for arboricity p grows exponencially with p.

KEYWORDS. P_4-sparse graphs, $2F$-graph, Arboricity.

Theory and Graph Algorithms, Combinatorial Optimization

1. Introdução

Problemas de partição em grafos modelam diferentes tarefas do mundo real: em redes complexas (redes sociais, redes de transporte, redes biológicas), processamento de imagens, dentre outras. A partição de um grafo é uma técnica para distribuir os dados de um grafo em subconjuntos disjuntos. A necessidade de distribuir grandes conjuntos de dados se dá pelo fato de que o processamento dos dados podem ser feitos de maneira mais eficiente. Problemas de partição de grafos têm sido vastamente estudos nas áreas de ciência da computação e matemática aplicada, e é foco do nosso trabalho.

Mais formalmente, este trabalho considera o problema de particionar os vértices de um grafo $G = (V, E)$ em p subconjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_p$, $\cup_{i=1,\ldots,p} A_i = V$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, tal que cada A_i deve satisfazer alguma exigência. Pode-se por exemplo exigir que cada A_i seja um conjunto independente (neste caso, temos o famoso problema de coloração de grafos), outras vezes podemos exigir que cada uma das partes seja uma clique (e temos o problema de clusterização). Também não é raro acontecer de haver exigências entre as partes, por exemplo, exigir que haja todas as arestas entre duas partes, ou nenhuma aresta entre elas.

Neste trabalho, consideramos o problema de particionar os vértices de um grafo em conjuntos acíclicos (i.e., florestas). A *arboricidade* de um grafo G é o menor p tal que os vértices de G podem ser particionados em p subconjuntos cada uma dos quais induz uma floresta. A arboricidade do grafo contrasta com o número cromático de G, que é o menor número q tal que os vértices de G podem ser particionados em q subconjuntos independentes (em ambos, as partes são grafos acíclicos). Tal como número cromático, determinar a arboricidade de um grafo é um problema NP-difícil em geral [Garey e Johnson, 1990]. Em [Maza et al., 2019], foi dada atenção à classe dos cografos (grafos que não contém caminhos induzidos de tamanho maior que 3), onde ambos os problemas (arboricidade e coloração) podem ser resolvidos em tempo polinomial. Eles investigaram condições suficientes e necessárias para um cografo ser particionado em 2 florestas e apresentaram informações úteis para grafos com arboricidade p.

Nosso trabalho generaliza o resultado de [Maza et al., 2019] considerando a classes dos grafos P_4-esparso, classe essa que contém a classe dos cografos. Da mesma forma que de La Maza, apresentamos uma caracterização por subgrafos proibidos para que que um grafo P_4-esparso admita uma partição do seu conjunto de vértices em 2 florestas e também apresentamos alguns resultados para grafos P_4-esparsos com arboricidade p.

Um outro problema que também trata de partições em que uma das partes é uma floresta é o problema *feedback vertex set* que consiste em determinar um conjunto S de cardinalidade mínima tal que $G \backslash S$ é um grafo acíclico. Este problema e suas variantes, tais como o *minimum feedback vertex set* (em que o conjunto S deve ser mínimo) e o *independent feedback vertex set* (em que o conjunto S deve ser um conjunto independente) possuem diversas aplicações em sistemas operacionais e no tratamento de deadlocks [Silberschatz et al., 1991]. Este é mais um fato que motiva o estudo do problema aqui abordado.

1.1. Definições e Notações

Este trabalho considera grafos simples e finitos.

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Um vértice *u* é *adjacente* a outro vértice *v* em $G = (V, E)$ se $(u, v) \in E(G)$. Para $V' \subseteq V$, denotamos por $G[V']$ o subgrafo maximal de G com conjunto de vértices V'. Denotamos por $\overline{G}$ o *complemento* de G.

Um conjunto de vértices I de um grafo $G = (V, E)$ é chamado *conjunto independente* se $G[I]$ é um grafo sem arestas (i.e., um *grafo vazio*). Um grafo $G = (V, E)$ é dito *completo* se

quaisquer dois vértices distintos de G são adjacentes. Um conjunto de vértices C de um grafo G é uma *clique* se $G[C]$ é um grafo completo. Denotamos por I_n e K_n, respectivamente, um conjunto independente e um grafo completo com n vértices. Utilizaremos as definições usais de caminho e ciclo da teoria dos grafos. Denotaremos por P_n e C_n, respectivamente, um caminho e um ciclo de comprimento n. Uma *floresta* é um grafo sem ciclos. Enquanto que uma *árvore* é um grafo conexo e sem ciclos.

Um subgrafo S de G é dito *minimal* em relação a uma determinada propriedade P se S satisfaz P, e nenhum subgrafo propriamente contido em S satisfaz P.

Uma *coloração própria* de um grafo $G = (V, E)$ é uma partição de $V(G)$ onde cada classe da partição é um conjunto independente. Uma *k-coloração* é uma partição de $V(G)$ em k conjuntos independentes. O *número cromático* de G, denotado por $\chi(G)$, é o menor k para o qual existe uma k-coloração de G. Neste caso, dizemos que G é *k-cromático* ou *k-colorível*.

Um grafo $G = (V, E)$ é dito *bipartido* se seus vértices podem ser particionados em dois conjuntos independentes $V = (X, Y)$. É sabido que um grafo G é bipartido se e somente se não contém ciclos ímpares. G é *bipartido completo* se para cada $x \in X$ e $y \in Y$, $(x, y) \in E$. Particularmente, dizemos que G é uma *estrela* S se é um grafo bipartido completo $S = (A, B)$, tal que $|A| = 1$.

Sejam os grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$. A *união disjunta* entre G_1 e G_2, denotada por $G_1 \cup G_2$, é o grafo $G = G_1 \cup G_2$, tal que $V(G) = V_1 \cup V_2$, $E(G) = E_1 \cup E_2$. A *junção* entre G_1 e G_2, denotada por $G_1 + G_2$, é o grafo $G = G_1 + G_2$, tal que $V(G) = V_1 \cup V_2$ e $E(G) = E_1 \cup E_2 \cup \{(x, y) : x \in V_1, y \in V_2\})$.

Um *cografo* [Lerchs, 1971] é um grafo livre de P_4, i.e., livre de caminhos induzidos de tamanho 4. Um grafo P_4-*esparso* é aquele para os quais cada conjunto de cinco vértices pertencentes ao grafo induz no máximo um P_4. A família dos grafos P_4-esparsos generaliza a classe dos cografos e foi abordada pela primeira vez por [Hoàng, 1985] e, posteriormente definidos por [Jamison e Olariu, 1992]. Para um grafo G, as seguintes condições são equivalentes: (i) G é um grafo P_4-esparso; (ii) para cada subgrafo induzido H de G com pelo menos dois vértices, ou H é desconexo ou $\overline{H}$ é desconexo ou H é isomorfo a uma aranha.

Uma *aranha* é um grafo $G = (V, E)$ tal que $V(G)$ admite uma partição em subconjuntos S, K e R onde: $|S| = |K| \geq 2$, S é um conjunto independente e K é um clique; existe uma bijeção $f : S \longmapsto K$, tal que:

- $N(v_s) = \{f(v_s)\}$, para todo $v_s \in S$ ou
- $N(v_s) = K \backslash \{f(v_s)\}$, para todo $v_s \in S$

Cada vértice de R é adjacente a todos os vértices de K e a nenhum de S. Seja $G = ((S \cup K \cup R), E)$ uma aranha. Caso $N(v_s) = \{f(v_s)\}$, G é chamada *aranha magra*. Caso $N(v_s) = K \backslash \{f(v_s)\}$ então G é chamada *aranha gorda*. Em particular, caso $R = \emptyset$ a aranha é dita *sem cabeça*.

Observe que o complemento de uma aranha magra é uma aranha gorda e vice-versa, ou seja, G é uma aranha magra se e somente se $\overline{G}$ é uma aranha gorda.

Dado um grafo G, dizemos que G é um *grafo*-$2F$, ou simplesmente $2F$ se $V(G)$ pode ser particionado em duas florestas F_1 e F_2. Neste caso, (F_1, F_2) é uma $2F$-partição de G.

2. Caracterização dos grafos P_4-esparsos com arboricidade 2

Como resultado principal, apresentamos uma caracterização dos grafos P_4-esparsos-$2F$ por subgrafos proibidos minimais, apresentando uma família $A_2^{P_4-esparsos}$ (Figura 1) de subgrafos tal que um dado grafo P_4-esparso G é $2F$ se somente se G não contém nenhum grafo dessa

família como subgrafo induzido. Nosso resultado é uma extensão do trabalho apresentado em [Maza et al., 2019] em que eles apresentaram também uma caracterização por subgrafos proibidos para os cografos-$2F$: Um cografo G é $2F$ se e somente não contém nenhum dos subgrafos (i)-(vii) da Figura 1 como subgrafo induzido. É de se esperar que a família de subgrafos proibidos, encontrada por eles, esteja contida na família dos subgrafos proibidos para os P_4-esparsos-$2F$, já que a classe dos cografos está contida na classe dos P_4-esparsos.

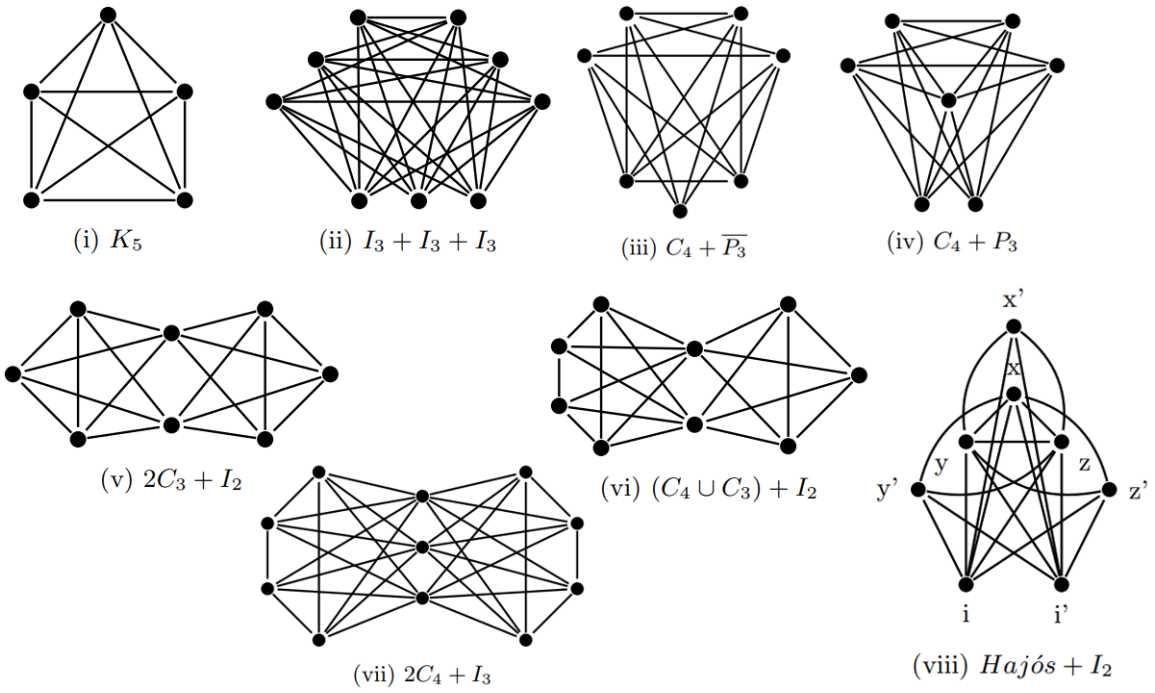


Figura 1: Família $A_2^{P_4-esparso}$ de obstruções minimais

Lema 2.1. *Cada grafo em $A_2^{P_4-esparso}$ (Figura 1) é uma obstrução minimal para arboricidade 2 em um grafo P_4-esparso.*

Demonstração. Vamos mostrar que nenhum dos membros de $A_2^{P_4-esparso}$ pode ser particionado em duas florestas. Entretanto, para qualquer membro, a remoção de um vértice qualquer torna possível a partição em duas florestas. A prova para (i)–(vii) já foi demonstrada por de la Maza *et al.* e um prova alternativa pode ser encontrada em [Carneiro et al., 2021]. Portanto, por motivo de espaço, vamos nos restringir ao caso (viii) $Hajós + I_2$.

Considere o grafo $G \cong Hajós + I_2$. Seja o grafo *Hajós* $= G[x, y, z, x', y', z']$ e seja $I_2 = G[i, i']$. Há duas possibilidades para uma possível $2F$-partição, (F_1, F_2): **(a):** i e $i' \in F_1$: neste caso, F_1 poderá conter no máximo um vértice do grafo de *Hajós*, caso contrário obtemos um ciclo C_3 ou C_4 em F_1. Considere, então $F_1 = G[i, i', v]$, tal que v é um dos vértices do grafo de *Hajós*. Para qualquer que seja esse vértice v, $F_2 = G - F_1 \supseteq C_3$ e não é possível encontrar uma $2F$ partição para $Hajós + I_2$. **(b)** i e i' pertencerem a diferentes florestas: sem perda de generalidade, $i \in F_1$ e $i' \in F_2$. Então precisamos particionar o grafo de *Hajós* em dois conjuntos sem arestas, caso contrário, F_1 ou F_2 (possivelmente ambos) conterá um ciclo. Mas isso é impossível uma vez que G contém um K_3, e portanto não é bipartido.

Para mostrar a minimalidade de $G = Hajós + I_2$ consideramos: **(i)** A remoção de um vértice v do I_2: sem perda de generalidade, $v = i'$. Neste caso, obtemos uma $2F$-partição (F_1, F_2),

onde $F_1 = G[x, x', i] \cong P_3$ e $F_2 = G[y, y', z, z'] \cong P_4$, ambas acíclicas. **(ii)** A remoção de um vértice v do subgrafo que induz o grafo de $Hajós$: suponha que $v \in \{x, y, z\}$, sem perda de generalidade, assuma que $v = x$. Então é possível obter uma $2F$-partiçao (F_1, F_2), onde $F_1 = G[i, x', i']$ e $F_2 = G[y', y, z, z']$. Novamente, F_1 e F_2 induzem, respectivamente um P_3 e um P_4. Caso $v \in \{x', y', z'\}$, a solução é análoga: $F_1 = G[i, x, i']$ e $F_2 = [y', y, z, z']$. Portanto, a remoção de qualquer vértice $v \in Hajós + I_2$ resulta num grafo-$2F$. Logo, $Hajós + I_2$ é uma obstrução minimal-$2F$. □

Esse trabalho restringiu-se aos grafos P_4-esparsos conexos, já que um grafo qualquer G possui arboricidade 2 se e somente se cada uma de suas componentes conexas também possuírem arboricidade 2.

Teorema 2.1. *Seja G um grafo P_4-esparso conexo, G é um grafo-$2F$ se e somente se G não contém nenhum dos subgrafos da família $A_2^{P_4-esparso}$ (Figura 1).*

Demonstração. Seja G um grafo conexo P_4-esparso. Se G é $2F$ então G é claramente um grafo livre de $A_2^{P_4-esparso}$. No que segue, suponhamos que G é um grafo livre de $A_2^{P_4-esparso}$.

Como G é um grafo P_4-esparso conexo, temos que, ou $G = G_1 + G_2$, cada um dos quais é um P_4-esparso, ou G é uma aranha. Analisamos cada um desses casos:

- G é uma aranha

  Seja $G = (S, K, R)$ uma aranha. Como G não contém K_5, $2 \leq |K| \leq 4$.

  - G é uma aranha com $|S| = |K| = 2$: como G é livre de K_5, então o conjunto R deve ser livre de K_3, e portanto admite uma bipartição (X, Y). O único ciclo que R pode conter é o C_4. Caso R contenha algum C_4, obtemos uma $2F$-partição (F_1, F_2) de G, com $F_1 = G[v \cup X]$, onde $v \in K$ e $F_2 = G \backslash F_1$. Caso R não contenha ciclos, considere $F_1 = G[R \cup S]$ e $F_2 = G[K]$.
  - G é uma aranha com $|S| = |K| = 3$: nesse caso, temos que R é um grafo vazio. Sejam $(a, b, c) \in K$ e $(a', b', c') \in S$. Em qualquer bijeção entre S e K, existe um par de vértices $x \in S$ e $y \in K$, tal que $(x, y) \notin E(G)$. Uma $2F$-partição (F_1, F_2) de G consiste em $F_1 = G[R \cup x \cup y]$, e $F_2 = G \backslash F_1 \cong P_4$, ambos florestas.
  - G é uma aranha com $|S| = |K| = 4$: como $|K| = 4$, R é um conjunto vazio, $G = G[S \cup K]$. Caso G seja uma aranha magra, então ele possui uma bijeção tal que $\{(a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d')\} \in E(G)$. Caso G seja uma aranha gorda, então ele possui uma bijeção com $\{(a, b'), (a, c'), (a, d'), (b, a'), (b, c'), (b, d'), (c, a'), (c, b'), (c, d'), (d, a'), (d, b'), (d, c')\} \in E(G)$. Em ambos os casos, obtemos uma $2F$-partição, onde $F_1 = G[a,' a, c, c']$ e $F_2 = G[b, b', d, d']$.

- $G = G_1 + G_2$

  Vale observar que por G ser um grafo P_4-esparso, G não admite ciclos C_k, $k \geq 5$. Portanto, C_3 e C_4 são os únicos ciclos possíveis em G.

  Caso ambos G_1 e G_2 não contenham C_3 e C_4, então G é $2F$. Logo, ao menos uma das partes G_1 ou G_2 deve conter ciclo.

  - G_1 é livre de C_3

Vamos assumir, sem perda de generalidade, que o grafo G_1 não contém C_3. Logo, G_1 contém C_4. Como um grafo P_4-esparso não contém K_5, o grafo G_2 também é livre de C_3. Além disso, G_2 não pode conter P_3, pois isso induziria outro subgrafo proibido $(C_4 + P_3) \in A_2^{P_4-esparso}$.

Como consequência de G_2 não conter P_3 (G é um cografo livre de P_3), temos que G_2 é uma união disjunta de cliques (K_1's ou K_2's). Se G_2 contém $K_1 \cup K_2$ então G contém $C_4 + \overline{P_3}$, que é um subgrafo proibido, conforme $A_2^{P_4-esparso}$. Portanto existem duas possibilidades distintas: G_2 é um grafo vazio ou G_2 é isomorfo a K_2.

* G_2 é isomorfo ao K_2: como G_1 é um grafo P_4-esparso livre de C_3, G_1 é bipartido com bipartição (X, Y). Uma partição $2F$ de G pode ser obtida agrupando-se um dos vértices de G_2 com os vértices de X num conjunto F_1 e os demais vértices num conjunto F_2. É fácil ver que (F_1, F_2) é uma partição $2F$ de G.
* G_2 é um grafo vazio: para $|V(G_2)| \leq 2$, uma partição $2F$ é obtida de forma análoga à apresentada acima. Vamos considerar então que $|V(G_2)| \geq 3$. Como G é livre de $(C_4 \cup C_4) + I_3$, então cada componente de G_1, diferente daquela contendo o C_4 induzido, é uma estrela.

  Fato 2.1. *Seja H um grafo P_4-esparso conexo. Se H é livre de C_3 e H contém C_4 então H é cografo.*

  Pelo Fato 2.1, G_1 é um cografo. Além disso, como G_1 é um cografo bipartido, G_1 é um cografo bipartido completo [Ekim et al., 2005] com bipartição (X, Y). Como $I_3 + I_3 + I_3 \in A_2^{P_4-esparso}$ e $|G_2| = |S| \geq 3$, concluímos que X ou Y possui no máximo 2 vértices. Suponha, sem perda de generalidade, que X contém no máximo 2 vértices. Portanto podemos definir uma parte F_1 contendo um único vértice de X mais todos os vértices de Y e uma outra parte F_2 contendo o vértice restante de X juntamente com todos os vértices de G_2. É fácil ver que (F_1, F_2) é uma partição $2F$ de G.

– G_1 contém C_3

Suponhamos, sem perda de generalidade, que G_1 contém C_3. Como $K_5 \in A_2^{P_4-esparso}$, G_2 é um grafo sem arestas. Seja $C_3 = G[v_1, v_2, v_3]$. Então existe um componente conexo B de G_1 que contém esse conjunto de vértices. Consideramos os casos:

* G_2 **possui mais de um vértice**: Neste caso, B é o único componente de G_1 que contém ciclo, uma vez que G é livre de $(C_4 \cup C_3) + I_2$ e $2C_3 + I_2$. O componente conexo B é um grafo P_4-esparso, portanto, temos que $B = B_1 + B_2$ ou B é uma aranha. Vale observar que G_1 não pode conter K_4, do contrário a junção $G_1 + G_2$ resultaria na obstrução minimal K_5.
  1. $B = B_1 + B_2$: como G_1 não pode conter K_4, nem B_1 e nem B_2 pode conter K_3. Portanto, assuma, sem perda de generalidade, que $v_1, v_2 \in B_1$ e $v_3 \in B_2$. Além disso, B_2 tem de ser um conjunto independente. Consideramos as duas seguintes possibilidades: B_2 contém apenas um vértice ou B_2 contém mais de um vértice.
     · Caso B_2 contenha pelo menos dois vértices: temos que $B_2 + G_2$ induz um C_4, e como ambos $C_4 + \overline{P_3}$ e $C_4 + P_3$ são obstruções minimais de $A_2^{P_4-esparso}$, então B_1 deve conter apenas o par de vértices $\{v_1, v_2\}$, do contrário $G_2 + B_2 + B_1$ resultaria em algum dos proibidos previamente

mencionados. Considere F_1 o grafo induzido por v e todos os vértices de G_2, e F_2 o grafo induzido pelos demais vértices de G_1, $F(F_1, F_2$ é uma $2F$-partição.

· Caso B_2 contenha apenas um vértice: então como $B_2 + G_2$ induz um P_3, temos que B_1 deve ser livre de C_4, além de qualquer outro ciclo. Sendo acíclico, é possível agrupar num conjunto F_1 os vértices do grafo $G_2 + B_2$ e noutro conjunto F_2 os vértices de $G_1 \backslash B_2$.

2. $\overline{B}$ é isomorfo a uma aranha

· B é uma aranha com $|S| = |K| = 2$: como G é livre de K_5, então R é um conjunto independente. Portanto, seja $P_4 = G[v_1, v_2, v_3, v_4] \subseteq S \cup K$, com $\{v_1, v_4\} \in S$ e $\{v_2, v_3\} \in K$. Então uma partição $2F$ é possível agrupando num conjunto F_1 os vértices de $G_1 \backslash B$ com os vértices de $S \cup R$ e mais algum vértice, sem perda de generalidade, v_2 de K, e agrupando o vértice restante v_3 de K com os demais vértices de G_2 num conjunto F_2.

· B é uma aranha tal que $|S| = |K| = 3$: como $|S| = |K| = 3$, então temos que $|R| = 0$. Seja o conjunto de vértices $\{x, y, z\} \in K$ e $\{x', y', z'\} \in S$.

(a) B é uma aranha magra: nesse caso, temos uma bijeção tal que B contém as arestas $\{(x, x'), (y, y'), (z, z')\}$. $P_4 = G[x', x, y, y']$. Construímos uma $2F$-partição de G agrupando num conjunto F_1 os vértices do P_4, o vértice $z' \in S$ e $G_1 \backslash B$ e num conjunto F_2 os vértices G_2 e o vértice $z \in K$.

(b) B é uma aranha gorda: nesse caso, temos uma bijeção entre os vértices de S e K tal que B contém as arestas $\{(x, y'), (x, z'), (y, x'), (y, z'), (z, x'), (z, y')\}$. Como $|V(G_2)| \geq 2$, G contém o grafo Hajös + I_2, um dos proibidos de $A_2^{P_4-esparso}$.

∗ G_2 **possui apenas um vértice**

Seja $v \in V(G_2)$, o único vértice de G_2. Consideramos os casos $B = B_1 + B_2$ ou B é isomorfo a uma aranha (análogo ao que já foi demonstrado anteriormente)

· $B = B_1 + B_2$: como G é livre de K_5 e livre de $C_4 + P_3$, e v é um vértice universal, temos que G_1 é livre de K_4 e livre de $I_2 + I_2 + I_2$. Segue do resultado de [Silva et al., 2019] que G_1 pode ser particionado num conjunto independente S e um subgrafo acíclico A. E, portanto, agrupando os vértices de S e v num conjunto F_1 e o restante dos vértices em F_2 obtemos uma $2F$-partição de G. □

Corolário 2.1. *Seja G um grafo P_4-esparso. Reconhecer se G é $2F$ pode ser feito em tempo polinomial.*

3. Arboricidade p para a classe dos grafos P_4-esparsos

Teorema 3.1. *Seja G um grafo P_4-esparso. Se G é $2F$ então G não contém nenhum dos grafos abaixo como subgrafo induzido:*

(i) K_{2p+1};
(ii) $\overline{(p+1)K_{p+1}}$;
(iii) $2K_{2p-1} + \overline{K_2}$;
(iv) $2\overline{pK_p} + \overline{K_{p+1}}$;
(v) $\overline{pK_2} + (K_1 \cup K_p)$;
(vi) $(\overline{pK_p} \cup K_{2p-1}) + \overline{K_2}$;
(vii) $\{\overline{(p+1+i)K_2 \cup (p-1-2i)K_1}\}_{0 \leq i \leq \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor}$;
(viii) $H + I_2$, *H é uma aranha gorda,* $|S| = |K| = 2p-1$, $R = \emptyset$.

Em [Maza et al., 2019] foi mostrado que os grafos $(i) - (vii)$ são obstruções minimais para um cografo-$2F$. Nosso resultado para grafos P_4-esparsos-$2F$ generaliza o resultado deles. Mostramos que o grafo (viii) é também um dos subgrafos proibidos minimais para a classe dos grafos P_4-esparsos-$2F$.

Vale mencionar que em [Maza et al., 2019] foi mostrado que o número de subgrafos proibidos para arboricidade p cresce exponencialmente na família dos cografos em relação a p. Logicamente, o mesmo é verdade para a família dos grafos P_4-esparsos.

Nossa família é uma extensão daquela apresentada por de la Maza *et.* al pela inclusão de uma aranha gorda (generalizada para o caso da arboricidade p).

4. Conclusão

Estudamos o problema de verificar se um dado grafo P_4-esparso G pode ter seu conjunto de vértices particionado em p florestas. Para a classe dos cografos, de La Maza *et.* al apresentaram uma família de subgrafos proibidos minimais para o caso $p = 2$. Estendemos o resultado por eles apresentado para a classe dos grafos P_4-esparsos. Por fim, generalizamos essa famĺia de subgrafos proibidos para qualquer p. Observamos que, diferente do caso $p = 2$, para $p > 2$ não é possível listar todos os subgrafos probidos para a classe dos grafos P_4-esparsos, uma vez que o número de subgrafos proibidos minimais cresce exponencialmente em p. Além disso, mostramos que é possível reconhecer em tempo polinomial se um dado grafo P_4-esparso é um grafo-2F. Como trabalho futuro, propomos o estudo de grafos-$(2F)$ para classes de grafos que não sejam perfeitos.

Referências

Carneiro, H., Nogueira, L., e Bravo, R. (2021). Partição de grafos perfeitos em duas florestas. URL `https://www.academia.edu/s/0a4961618b`.

Ekim, T., de Werra, D., e Demange, M. (2005). Partitioning cographs into cliques and stable sets. *Discrete Optimization*, 2:145–153.

Garey, M. R. e Johnson, D. S. (1990). *Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman & Co., USA. ISBN 0716710455.

Hoàng, C. (1985). Perfect graphs (ph. d. thesis). *School of Computer Science, McGill University Montreal*.

Jamison, B. e Olariu, S. (1992). A tree representation for p4-sparse graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 35(2):115–129.

Lerchs, H. (1971). On cliques and kernels. *Department of Comp. Science, University of Toronto*.

Maza, G. H. S., Hell, P., Hernández Cruz, C., Hosseini, S. A., e Valadkhan, P. (2019). Vertex arboricity of cographs. *arXiv*, p. arXiv–1907.

Silberschatz, A., Peterson, J. L., e Galvin, P. B. (1991). *Operating system concepts*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc.

Silva, F., Souza, U., Bravo, R., e de Oliveira, R. A. (2019). Reconhecimento linear de uma partição stable tree mínima em grafos p4-tidy. In *Anais da III Escola Regional de Informática do Rio de Janeiro*, p. 25–28. SBC.