

SOBRE ÁRVORES *BROOM* DE TIPO 2

Daniel Felisberto Traciná Filho

Instituto Militar de Engenharia
Endereço da Instituição
danieltracina@gmail.com

Claudia Marcela Justel

Instituto Militar de Engenharia
Endereço da Instituição
cmjustel@ime.eb.com.br

RESUMO

Uma árvore pode ser classificada em tipo 1 e 2 por meio do autovetor associado ao segundo menor autovalor de sua matriz Laplaciana. Este trabalho introduz alguns resultados, que com certas condições, determinam o tipo de uma árvore broom. Uma árvore broom $T_{n,k}$ é uma árvore resultante da coalescência entre o centro da estrela $K_{1,k}$ e um vértice pendente do caminho P_{n-k} . O primeiro resultado afirma que $T_{n,k}$ é do tipo 2 para n ímpar e $k = 3$, já o segundo verifica que $T_{n,k-1}$ é do tipo 2 quando $T_{n,k}$ e $T_{n,k+1}$ são tipo 2 com certas características adequadas.

PALAVRAS CHAVE. Grafos, matriz Laplaciana, autovetores, árvores.

Tópicos (Teoria e Algoritmos em Grafos)

ABSTRACT

A tree can be classified into type 1 and 2 through the eigenvector associated with the second smallest eigenvalue of its Laplacian matrix. This work introduces some results, which under certain conditions, determine the type of a broom tree. A broom tree $T_{n,k}$ is a tree resulting from the coalescence between the center of the star $K_{1,k}$ and a pendant vertex of the path P_{n-k} . The first result states that $T_{n,k}$ is of type 2 for n odd and $k = 3$, while the second one verifies that $T_{n,k-1}$ is type 2 when $T_{n,k}$ and $T_{n,k+1}$ are type 2 with certain adequate characteristics.

KEYWORDS. Graphs, Laplacian matrix, eigenvectors, trees.

Paper topics (Graph Theory and Algorithms)

1. Introdução

A classificação de árvores em dois casos usando autovetor correspondente ao segundo menor autovalor da matriz Laplaciana da mesma foi introduzida por (Fiedler [1975]). Posteriormente, foram definidos 2 tipos de árvores a partir dessa classificação (Grone e Merris [1987]). Em (Patra [2007]) foram publicados resultados analisando propriedades e o tipo de uma família de árvores, as árvores broom. Uma árvore broom, denotada por $T_{n,k}$, é uma árvore de ordem n , com $n \geq 2$, que possui um caminho de comprimento $n - k$ e k vértices pendentes, com $k \geq 1$, adjacentes a uma folha do caminho. Nesse artigo foi provado que a árvore broom $T_{n,2}$ é de tipo 2 para todo $n > 4$. Além disso, foi provado que para n fixo, a árvore broom $T_{n,k}$, $k > k' = n - \frac{12-\pi^2}{8} - \frac{\pi}{8}\sqrt{\pi^2 + 16n + 8}$ é de tipo 2. Também, foram determinados limites para a posição dos vértices característicos das árvores $T_{n,k-1}$ e $T_{n,k+1}$ para n fixo, no caso da árvore $T_{n,k}$ ser de tipo 2. No final do artigo, o autor conjectura que as árvores $T_{n,k}$ são de tipo 2, para todo $n > k + 2$ e $2 \leq k \leq n - 3$.

Neste trabalho provamos que as árvores broom $T_{n,3}$ são de tipo 2, para todo $n \geq 13$, onde n é ímpar. Analisamos o tipo das árvores broom com k fixo, $T_{n-1,k}$ e $T_{n+1,k+1}$ no caso de existir valores n, k tal que $T_{n,k}$ for de tipo 1. Além disso, determinamos condições que devem verificar duas árvores broom de tipo 2, $T_{n,k+1}$ e $T_{n+1,k}$, para que a árvore $T_{n,k-1}$ também seja de tipo 2 (neste caso a ordem n é fixa).

O restante deste artigo está organizado da maneira seguinte. Na Seção 2 apresentamos algumas definições e resultados da teoria de grafos e álgebra linear. A Seção 3 introduz alguns resultados importantes da literatura sobre sobre vértices característicos e o tipo de uma árvore. A seguir, na Seção 4 são apresentados os resultados teóricos, a contribuição deste trabalho, na Seção 5 as considerações finais e por último as referências.

2. Preliminares

Seja $G = (V, E)$, grafo simples e não direcionado, tal que V é o conjunto de vértices, $|V| = n$ e E o conjunto de arestas. A **matriz Laplaciana** do grafo é definida por $L(G) = D(G) - A(G)$, onde $A(G)$ é a matriz de adjacência, e $D(G)$ a matriz diagonal dos graus dos vértices. Para $n \geq 2$, $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n$ são as raízes do polinômio característico de $L(G)$, $P_G(x) = \det(L(G) - xI)$, em ordem não decrescente, denominadas autovalores da matriz $L(G)$. A **conectividade algébrica** do grafo G é o segundo menor autovalor da matriz $L(G)$. Notamos $a(G) = \lambda_2(G)$. E qualquer autovetor associado com $a(G)$ é denominado **vetor de Fiedler**.

A seguir, apresentamos alguns resultados sobre matrizes M de dimensão $n \times n$. Uma **matriz positiva**, $M > 0$, verifica que todos os seus elementos são reais positivos, $M_{i,j} > 0, \forall i, j$ Horn e Johnson [1992] pág. 359.

O **espectro** da matriz M , $\sigma(M)$, é o conjunto de todos os valores da matriz M . O **raio espectral** de M é o número real não negativo $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$ Horn e Johnson [1992] pág. 35.

Teorema de Perron: Seja M matriz positiva, então:

- $\rho(M) > 0$;
- $\rho(M)$ é autovalor de M ;
- Existe vetor $x > 0$ tal que $Ax = \rho(M)x$;
- $\rho(M)$ é autovalor com multiplicidade 1 de M ;
- $|\lambda| < \rho(M)$ para todo $\lambda \neq \rho(M)$, $\lambda \in \sigma(M)$ Horn e Johnson [1992] pág. 500.

O **valor de Perron** de uma matriz positiva M de dimensão $n \times n$ é o maior autovalor desta matriz, e será denotado por $\rho(M)$.

Outros resultados sobre álgebra linear e teoria de grafos podem ser achados nas referências Horn e Johnson [1992], Diestel [1997].

3. Árvores de tipo 1 e 2

Fiedler [1975] provou que se G é conexo, então $a(G) > 0$. Seja $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ um vetor de Fiedler associado a $a(G)$. Como o vetor com todos os componentes iguais a um, denotado $\mathbf{e}$, é autovetor de $L(G)$ associado ao autovalor $\lambda_1 = 0$, então qualquer autovetor de $L(G)$ deve ser ortogonal ao vetor $\mathbf{e}$. Logo temos que em particular para o vetor de Fiedler w , $\mathbf{e}^T w = \sum_{i=1}^n w_i = 0$. Define-se a função $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(v_i) = w_i, 1 \leq i \leq n$. Os componentes de um vetor de Fiedler w são chamados de **valores característicos** de G .

O teorema a seguir identificam dois casos de árvores, a partir dos componentes de qualquer vetor de Fiedler dessa árvore.

Teorema 1: (Theorem 3.14 Fiedler [1975]) Seja T uma árvore e $f(v_i) = w_i, 1 \leq i \leq n$, seus valores característicos. Então, dois casos podem ocorrer:

Caso a) Todos os valores de w_i são diferentes de zero. Então T contém exatamente uma aresta (p, q) tal que $w_p > 0$ e $w_q < 0$. Os valores característicos dos vértices ao longo de qualquer caminho em T que inicie em p e que não contenha q serão crescentes; os valores característicos dos vértices ao longo de qualquer caminho que inicie em q e não contenha p serão decrescentes. Os vértices p e q são chamados vértices característicos.

Caso b) O conjunto $N_0 = \{i \in N | w_i = 0\}$ é não vazio. Então o grafo T_0 induzido por N_0 em T é conexo e há exatamente um vértice $j \in N_0$ possuindo ao menos um vizinho que não pertence a N_0 . Os valores característicos ao longo de qualquer caminho em T partindo de j podem crescer, decrescer ou não variar. O vértice j é chamado de vértice característico.

Seja $T = (V, E)$ é uma árvore e w um vetor de Fiedler de T . Um vértice $v \in V$ é um **vértice característico** de T se $v = j$ na parte b) do Teorema anterior, ou v é uma extremidade da aresta (p, q) dado na parte a) do mesmo Teorema.

Em Grone e Merris [1987] foi utilizada a classificação dos vértices característicos de uma árvore, para denominar dois tipos de árvores específicos. Seja T uma árvore. Denotamos por $F(T)$ o conjunto de vértices característicos de T . Se $|F(T)| = 1$, então T é uma **árvore de Tipo 1**. Por outro lado, se $|F(T)| = 2$ então T é uma **árvore de Tipo 2**.

Dada uma árvore T e um vértice v de T , um **ramo de T em v** é qualquer um dos componentes conexos de $T - v$.

Proposição 1: (Proposition 1 Kirkland et al. [1996]) Seja T uma árvore, e L_v a submatriz principal da matriz laplaciana $L(T)$, obtida eliminando a linha e a coluna correspondente ao vértice v . A entrada $(L(T)_v^{-1})_{p,q}$ é igual ao número de arestas de T que estão em ambos os caminhos, do vértice p até o v , e do vértice q até o vértice v .

Como em uma árvore existe um único caminho entre qualquer par de vértices, o elemento $(L(T)_v^{-1})_{p,q} \geq 0$ é estritamente positivo se e somente se os vértices p e q pertencem ao mesmo ramo de T em v . Portanto, existe uma permutação das linhas e colunas da matriz $L(T)_v^{-1}$ que é uma matriz diagonal por blocos, com número de blocos igual ao grau do vértice v , e cada bloco é uma matriz positiva que corresponde a um único ramo de T em v . Cada bloco diagonal será denotado **matriz bottleneck do ramo de T em v** . Como a matriz $(L(T)_v)^{-1}$ é positiva seu raio espectral ou valor de Perron, denotado por $\rho((L(T)_v)^{-1})$, é igual ao valor do maior autovalor de alguma das matrizes bottleneck dos ramos de T no vértice v , o ramo em v cuja respectiva matriz bottleneck é aquela cujo valor de Perron coincide com o valor de Perron da própria matriz bottleneck do grafo em v é denominado **ramo de Perron** de T em v .

Os seguintes resultados caracterizam os tipos de uma árvore pela definição da matriz bottleneck, ao invés do número de vértices característicos que a árvore possui.

Teorema 2: (Theorem 1 [Kirkland et al., 1996]) Seja T uma árvore ponderada com vértices $1, \dots, n$ com matriz Laplaciana L . Suponha que i e j são vértices adjacentes de T . Então T é do tipo 2 com vértices característicos i e j se e somente se a seguinte condição é garantida:

$\exists 0 < \gamma < 1$ tal que $\rho(M_1 - \gamma(1 \setminus \theta)J) = \rho(M_2 - (1 - \gamma)(1 \setminus \theta)J)$, onde θ é o peso da aresta (i, j) , M_1 é a matriz bottleneck para o ramo em j que contém i e M_2 é a matriz bottleneck para o ramo em i que contém j .

Além disso, no caso em que a condição é garantida, a conectividade algébrica $a(T)$ satisfaz $1 \setminus a(T) = 1 \setminus \rho(M_1 - \gamma(\frac{1}{\theta})J) = 1 \setminus \rho(M_2 - (1 - \gamma)(\frac{1}{\theta})J)$; também qualquer vetor de Fiedler permutado é tal que possui a forma $[\frac{-v_1}{v_2}]$, onde v_1 é o vetor de Perron para $M_1 - \gamma(\frac{1}{\theta})J$; v_2 é o vetor de Perron para $M_2 - (1 - \gamma)(\frac{1}{\theta})J$, e $1^t v_1 = 1^t v_2$.

Corolário 1: (Corollary 2.1 [Kirkland et al., 1996]). Supor que T é uma árvore. Então, T é de tipo 1 se e somente se existe um único vértice para o qual existem dois ou mais ramos de Perron. T é de tipo 2 se e somente se para cada vértice existe um único ramo de Perron.

Proposição 2 (Proposition 2 [Kirkland et al., 1996]). Seja T uma árvore com n vértices. Supor que j não é um vértice característico de T . Então o único ramo de Perron de T em j é o ramo que contém o vértice característico (ou vértices característicos) de T .

Denotamos por P_j o grafo caminho com j vértices. $K_{1,q}$ o grafo estrela com $q+1$ vértices.

Sejam $n > k \geq 1$ dados, a árvore **broom** $T_{n,k}$ é uma árvore resultante da coalescência de um dos vértices folha de caminho P_{n-k} com o vértice do centro da estrela $K_{1,k}$. Considerar a árvore **broom** $T_{n,k}$ cujos vértices são numerados como mostra a Figura 1.

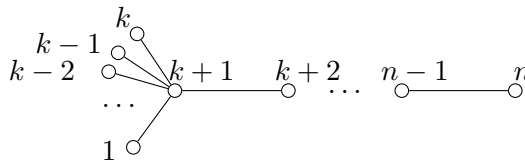


Figura 1: $T_{n,k}$

Para a árvore $T_{n,k}$, considerando que os pesos das arestas são todos iguais a 1, a matriz

Laplaciana é:

$$L(T_{n,k}) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & -1 & & & & \\ & 1 & & -1 & & & & \\ & & \ddots & \vdots & & & & \\ -1 & -1 & \cdots & k+1 & -1 & & & \\ \hline & & & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & & & & -1 & 1 \end{array} \right)_{n \times n}.$$

O polinômio característico de $L(T_{n,k})$ é

$$P_{T_{n,k}}(x) = \det(L(T_{n,k}) - xI) = \det \left(\begin{array}{cccc|cccc} (1-x) & & & -1 & & & & \\ & (1-x) & & -1 & & & & \\ & & \ddots & \vdots & & & & \\ -1 & -1 & \cdots & (k+1-x) & -1 & & & \\ \hline & & & -1 & 2-x & -1 & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & -1 & (2-x) & -1 \\ & & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & -1 & (2-x) & -1 \\ & & & & & & & & -1 & (1-x) \end{array} \right)_{n \times n}.$$

Considerando $v = j > k+2$, $T_{n,k} - \{j\} = T_{j,k} \cup P_{n-j}$, as matrizes bottleneck dos ramos $T_{j,k}$ e P_{n-j} são

$$M(T_{j,k}) = \left(\begin{array}{cccccc} k+1 & k & \cdots & k & k & \cdots & 1 \\ k & k+1 & \cdots & k & k & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ k & k & \cdots & k+1 & k & \cdots & 1 \\ k & k & k & \cdots & k & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{array} \right)_{j-1 \times j-1},$$

Portanto,

$$M(P_{n-j}) = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-j \end{array} \right)_{n-j \times n-j}.$$

$$(L(T_{n,k})_j)^{-1} = \left(\frac{M(T_{j,k})}{M(P_{n-j})} \right)_{n-1 \times n-1}$$

e

$$\rho(L(T_{n,k})_j)^{-1} = \max\{\rho(M(T_{j,k})), \rho(M(P_{n-j}))\}.$$

Para simplificar a notação, utilizaremos $\rho(T_{j,k})$ e $\rho(P_{n-j})$ para indicar o maior autovalor das matrizes bottleneck $M(T_{j,k})$ e $M(P_{n-j})$, respectivamente ($\rho(M(T_{j,k}))$ e $\rho(M(P_{n-j}))$).

4. Resultados teóricos e experimentos

Em Patra [2007] foi provado que se a árvore *broom* $T_{n,k}$ com n fixo verificar a desigualdade $k > n - \frac{12-\pi^2}{8} - \frac{\pi}{8}\sqrt{\pi^2 + 16n + 8}$, então o vértice de maior grau (numerado $k+1$) e o vértice seguinte no caminho (numerado $k+2$) são vértices característicos de $T_{n,k}$ (Theorem 3.2 Patra [2007]). Portanto, nessas condições $T_{n,k}$ é de tipo 2.

Neste artigo, considera-se n fixo, $T = T_{n,k}$, e, em função da posição dos vértices característicos de T foram determinadas restrições para a posição dos vértices característicos de $T_{n,k-1}$ e $T_{n,k+1}$. Agora, se fixarmos k e variarmos n , a ordem de T , podemos concluir um resultado similar.

Supor que existe $T_{n,k}$ de tipo 1, com $3 \leq k \leq n-4$. Nesse caso, suponha que u seja o único vértice característico de $T_{n,k}$ de tipo 1. Logo, pelo Corolário 1 deve ser $\rho(M(T_{u-1,k})) = \rho(M(P_{n-u}))$

Vamos mostrar que $T_{n-1,k}$ e $T_{n+1,k}$ são do tipo 2, se $T_{n,k}$ for tipo 1. Primeiro consideremos $T_{n-1,k}$, e suas componetes conexas em u , $T_{n-1,k} - \{u\} = T_{u-1,k} \cup P_{n-u-1}$. Como P_{n-u-1} é isomorfo a um subgrafo em P_{n-u} , pelo Teorema de Perron-Frobenius segue que $\rho(M(P_{n-u-1})) < \rho(M(P_{n-u})) = \rho(M(T_{u-1,k}))$, e por conseguinte $T_{u-1,k}$ é o ramo de Perron de $T_{n-1,k}$. Agora, analisarmos as componentes conexas de $T_{n-1,k}$ em $u-1$, $T_{n-1,k} - \{u-1\} = T_{u-2,k} \cup P_{n-u}$. As entradas da matriz bottleneck de $T_{u-2,k}$ em $u-1$ são menores ou iguais as respectivas entradas da matriz bottleneck de $T_{u-1,k}$ em u , logo pelo Teorema de Perron-Frobenius segue que $\rho(M(T_{u-2,k})) < \rho(M(T_{u-1,k})) = \rho(M(P_{n-u}))$, isto é, o ramo P_{n-u} é o ramo de Perron de $T_{n-1,k}$ em $u-1$. Assim, pela Proposição 2 segue que $u-1$ e u são os vértices característicos de $T_{n-1,k}$ e portanto $T_{n-1,k}$ é de tipo 2.

Utilizando um raciocínio análogo para $T_{n+1,k}$, podemos concluir que u e $u+1$ são seus vértices característicos e portanto $T_{n+1,k}$ é de tipo 2.

Patra também provou que a árvore *broom* $T_{n,2}$ é de tipo 2 para todo $n > 4$. O teorema a seguir apresenta um resultado semelhante para árvores *broom* $T_{n,3}$ com n ímpar.

Proposição 3: Seja $T_{n,3}$, onde $n = 2q + 1$ com $q \geq 6$, então $(q+1, q+2)$ é a aresta característica de $T_{n,3}$.

Prova: Para $n = 2q + 1$, para algum inteiro $q \geq 6$, basta observar que $T = T_{n,3} - \{q+1\} = T_{q,3} \cup P_q$. Neste caso, como é fácil de ver existe uma matriz de permutação P tal que $A = PM(P_q)P^t$ tal que $M(T_{q,3}) < A$, logo pelo Teorema de Perron-Frobenius segue que $\rho(M(P_q)) > \rho(M(T_{q,3}))$.

Por outro lado, $T = T_{n,3} - \{q+2\} = T_{q+1,3} \cup P_{q-1}$. Desta forma, observe que o ramo $T_{q+1,3}$ possui um subgrafo isomorfo ao ramo P_{q-1} , e, por conseguinte também pelo Teorema de Perron-Frobenius o ramo $T_{q+1,3}$ é o de Perron.

Portanto, pela Proposição 2 segue que se $n = 2q + 1$ com $q \geq 6$, $T_{n,3}$ é do tipo 2 com aresta característica $(q + 1, q + 2)$. $\square$

Na procura por verificar a conjectura de Patra, realizamos alguns experimentos para analisar o comportamento dos vértices característicos de árvores broom $T_{n,k}$ com n fixo e o valor de k variando entre 2 e $n - 3$. Em todos os experimentos realizados para n entre 5 e 200 e todos os valores de k possíveis, as árvores $T_{n,k}$ são de tipo 2. Um desses experimentos, consiste em calcular a distância entre o vértice $k + 1$ (de maior grau) em $T_{n,k}$ e o vértice característico mais próximo, para todo valor $2 \leq k \leq n - 3$. Denotamos esta função $dist(T_{n,k})$.

A Figura 2 apresenta os valores da menor distância do vértice $k + 1$ árvore broom $T_{n,k}$ a um vértice característico para $n = 150$ e valores $2 \leq k \leq 146$. Note que existem diferentes valores consecutivos de k para os quais a distância é a mesma. A partir dessa observação, fazemos a seguinte pergunta: existe alguma restrição para o número máximo de árvores broom $T_{n,k}$, com n fixo e variando o valor de k , tais que a distância antes mencionada é a mesma? A proposição a seguir determina um limite para esse número com algumas condições para n e k .

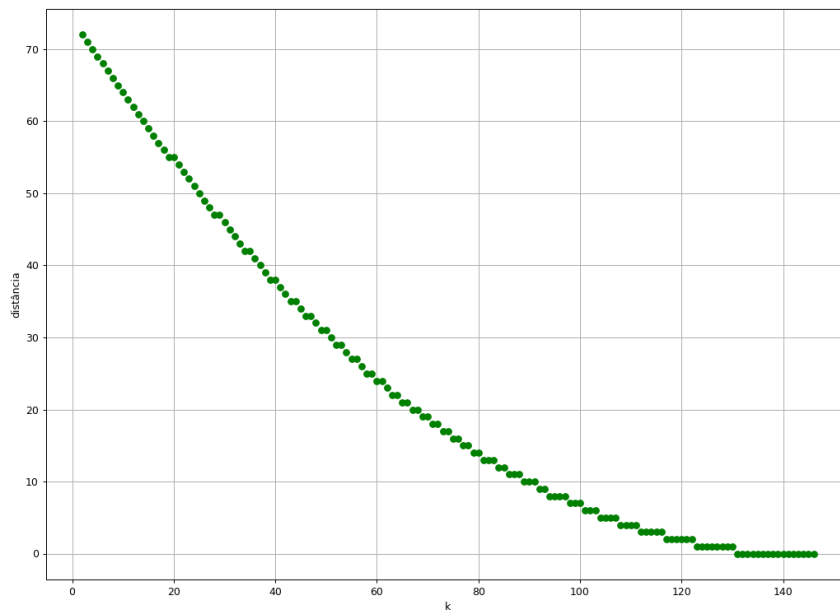


Figura 2:

Proposição 4: Sejam $T_{n,k+1}$ e $T_{n,k}$ com $2 \leq k \leq n - 4$ árvores de tipo 2 com arestas características $(u+1, u+2)$ e $(u, u+1)$ respectivamente onde $u \geq k+2$. Se $\rho(T_{u,k-1}) < \rho(T_{u+1,k+1})$, então $(u, u + 1)$ é aresta característica de $T_{n,k-1}$.

Prova: Como $T_{n,k+1}$ e $T_{n,k}$ são árvores de tipo 2, pelo Teorema 2 existem $\alpha, \beta \in (0, 1)$ tais que:

$$\begin{aligned}\rho(M(T_{u+1,k+1}) - \beta J) &= \rho(M(P_{n-u-1}) - (1 - \beta)J) \text{ e} \\ \rho(M(T_{u,k}) - \alpha J) &= \rho(M(P_{n-u}) - (1 - \alpha)J)\end{aligned}$$

Note que pelo Teorema de Perron-Frobenius, se $\alpha \geq \beta$ então $\rho(M(T_{u,k}) - \alpha J) < \rho(M(T_{u+1,k+1}) - \beta J)$, e, por conseguinte $\rho(M(P_{n-u}) - (1 - \alpha)J) < \rho(M(P_{n-u-1}) - (1 - \beta)J)$, o que é um absurdo! Logo, $\alpha < \beta$.

Agora definamos uma função $f(x) = \rho(M(T_{u,k-1}) - xJ) - \rho(M(P_{n-u}) - (1 - x)J)$. Como $\rho(M(T_{u,k-1}) - xJ)$ e $\rho(M(P_{n-u}) - (1 - x)J)$ são contínuas (vide a demonstração do Corolário 1.1 de Kirkland), então $f(x)$ é contínua. Mostraremos que existe um valor $\gamma \in (0, 1)$ tal que $f(\gamma) = 0$, e, por conseguinte $(u, u + 1)$ é a aresta característica de $T_{n,k-1}$. Para tanto, calcularemos $f(\alpha)$.

$$\begin{aligned}f(\alpha) &= \rho(M(T_{u,k-1}) - \alpha J) - \rho(M(P_{n-u}) - (1 - \alpha)J) > \\ &\quad \rho(M(T_{u,k}) - \alpha J) - \rho(M(P_{n-u}) - (1 - \alpha)J) = \\ &\quad \rho(M(P_{n-u}) - (1 - \alpha)J) - \rho(M(P_{n-u}) - (1 - \alpha)J) = 0 \implies f(\alpha) > 0.\end{aligned}$$

Também calculemos $f(\beta)$.

$$\begin{aligned}f(\beta) &= \rho(M(T_{u,k-1}) - \beta J) - \rho(M(P_{n-u}) - (1 - \beta)J) < \\ &\quad \rho(M(T_{u,k-1}) - \beta J) - \rho(M(P_{n-u-1}) - (1 - \beta)J) < \\ &\quad \rho(M(T_{u+1,k+1}) - \beta J) - \rho(M(P_{n-u-1}) - (1 - \beta)J) = 0 \implies f(\beta) < 0.\end{aligned}$$

As duas desigualdades anteriores são válidas pois P_{n-u-1} é subgrafo próprio de P_{n-u} e por hipótese $\rho(M(T_{u,k-1})) < \rho(M(T_{u+1,k+1}))$. Tendo em vista que $f(x)$ é contínua, $f(\alpha) > 0$ e $f(\beta) < 0$ pelo Teorema do Valor Intermediário existe $\gamma \in (\alpha, \beta)$ tal que $f(\gamma) = 0$. Isto é, $\rho(M(T_{u,k-1}) - \gamma J) = \rho(M(P_{n-u}) - (1 - \gamma)J)$ com $\gamma \in (0, 1)$. Assim, pelo Teorema 2 $(u, u + 1)$ é a aresta característica de $T_{n,k-1}$. $\square$

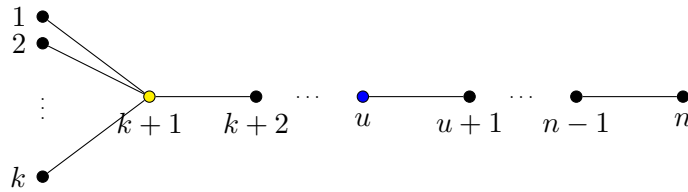


Figura 3: $T_{n,k}$

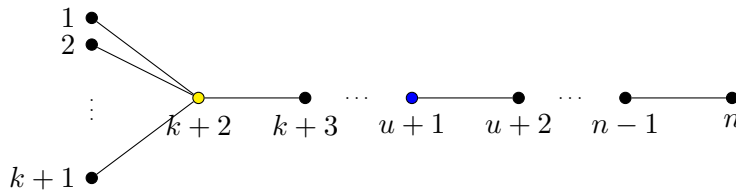


Figura 4: $T_{n,k+1}$

As Figuras 3 e 4 ilustram as árvores $T_{n,k}$ e $T_{n,k+1}$ para as quais $dist(T_{n,k}) = u - (k+1) = dist(T_{n,k+1}) = u + 1 - (k+2)$.

Segue abaixo a tabela onde se encontra alguns exemplos para os quais o resultado é válido.

n	k	u	$\rho(M(T_{u,k-1}))$	$\rho(M(T_{u+1,k+1}))$
100	14	50	1004.155	1031.781
100	21	51	979.724	995.596
100	26	52	945.839	952.653
125	21	63	1553.711	1582.633
125	28	64	1504.951	1521.536
125	32	65	1478.893	1488.416
125	36	66	1436.994	1439.222
150	19	75	2258.567	2303.090
150	28	76	2213.162	2243.084
150	34	77	2162.275	2181.564
150	39	78	2103.369	2113.506
150	43	79	2051.424	2054.2554

Tabela 1: Exemplos contemplados pela Proposição 4

Nota-se também que os valores k na tabela acima são menores do que o limite inferior $n - \frac{12-\pi^2}{8} - \frac{\pi}{8}\sqrt{\pi^2 + 16n + 8}$ calculado por Patra.

5. Considerações Finais

O estudo começou com a análise dos tipos de $T_{n+1,k}$ e $T_{n-1,k}$, na hipótese de existir uma árvore broom $T_{n,k}$ que fosse do tipo 1, e, por conseguinte concluindo que se caso a conjectura de Patra não se verificar, no mínimo para cada broom do tipo 1 existem duas de tipo 2. Além disso, para $T_{n,3}$, com n ímpar verificamos que seu tipo é 2. Como estudo futuro pretendemos provar que para um n qualquer, $T_{n,3}$ é do tipo 2. Por fim, conseguimos provar que $T_{n,k}$ é do tipo 2 e explicitar sua aresta característica, sob algumas condições.

Agradecimentos: O trabalho foi financiado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências

- Diestel, R. (1997). *Graph Theory*. Springer-Verlag.
- Fiedler, M. (1975). A property of eigenvectors of nonnegative symmetric matrices and its application to graph theory. *Czechoslovak Math. J.*, 25:607–618.
- Grone, R. e Merris, R. (1987). Algebraic connectivity of trees. *Czechoslovak Math. J.* 37, 112: 660–670.
- Horn, R. A. e Johnson, C. R. (1992). *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, New York.
- Kirkland, S., Neumann, M., e Shader, B. L. (1996). Characteristic vertices of weighted trees via perron values. *Linear and Multilinear Algebra*, 40(4):311–325.

Patra, K. L. (2007). Maximizing the distance between center, centroid and characteristic set of a tree. *Linear and Multilinear Algebra*, 55(4):381–397. URL <https://doi.org/10.1080/03081080701208512>.