ALGUMAS PROBABILIDADES ÚTEIS NO JOGO DE CARTAS KING

Marcos Ricardo Rosa Georges
Pontifícia Universidade Católica de Campinas
Rua Prof. Dr. Euclydes Zerbini, 1516, Campinas-SP
marcos.georges@puc-campinas.edu.br

RESUMO

Este artigo examina, à luz da teoria da probabilidade, algumas situações oriundas do jogo de cartas king. Os jogos de carta sempre foram objetos de estudo no campo da probabilidade, principalmente o pôquer, blackjack e o bridge. O pôquer e o blackjack são mais populares, sobretudo nos cassinos. No bridge, por sua vez, predomina mais o espírito esportivo e a atmosfera acadêmica em seus torneios bem organizados. Estas características tornaram o bridge conhecido como o xadrez do baralho. O jogo king se assemelha ao bridge em diversos aspectos, porém, ao contrário do bridge que possui extensa oferta de publicações destinadas a estudá-lo, não há trabalhos que abordam as probabilidades do King, havendo uma lacuna que este artigo pretende ocupar. Os cálculos de probabilidades aqui apresentados envolvem, basicamente, situações relacionadas a distribuição das cartas no início das partidas e são feitos usando análise combinatória e a teoria básica da probabilidade.

PALAVRAS CHAVE. Jogos de Carta, King, Probabilidade.

Estatística e Modelos Probabilísticos

ABSTRACT

This paper examines, under probability theory perspective, some situations arising from king card game. Card games have always been objects of study in the field of probability, especially poker, blackjack and bridge. Poker and blackjack are more popular, especially in casinos. In bridge, on the other hand, sportsmanship and the academic atmosphere predominate in its well-organized tournaments. These characteristics made bridge known as deck chess. The king game is similar to bridge in several aspects, however, unlike bridge, which has an extensive offer of publications designed to study it, there is nothing about King's probabilities, with a gap that this article intends to fill. The probability calculations presented here basically involve situations related to the distribution of cards at the beginning of the games and are made using combinatorial analysis and the basic theory of probability.

KEYWORDS. Playing Cards, King, Probability.

Statistics and Probability Models

1. Introdução

Os jogos de carta causam fascínio no ser humano. Ao longo dos séculos, são diversos os jogos de cartas que foram criados, e se considerar os jogos que não usam o baralho convencional, este número torna-se muito maior.

O baralho convencional é de origem francesa e é composto por 54 cartas, sendo 52 de 4 diferentes naipes mais 2 coringas. Cada naipe – copas (♥), ouros (♦), espadas (♠) e paus (♣) – possui 13 cartas que vão de 1 (o Ás) até 10, mais as figuras do Rei (K), Rainha (Q) e Valete (J). A ordem das cartas depende do jogo, mas, em geral a ordem crescente é 2345678910JQKÁs.

São diversos os jogos que usam o baralho convencional, os mais conhecidos são: pôquer, blackjack, bridge, tranca, truco, buraco, canastra, caxeta, escopa, paciência, copas e sueca. Os jogos de cartas oferecem entretenimento e diversão aos seus jogadores e, para aqueles que gostam de calcular, um cardápio fértil de situações em que é possível extrair probabilidades.

Dentre os jogos de carta que usam o baralho convencional, o pôquer é largamente o mais conhecido e jogado no mundo. Amplamente retratado em filmes e seriados e presente em todos os cassinos, o pôquer é um jogo de cartas de elevada popularidade e, consequentemente, o jogo que mais possui publicações acadêmicas que tratam das probabilidades de suas jogadas.

Bem menos popular que o pôquer, o bridge também possui extensa quantidade de trabalhos acadêmicos que tratam de suas probabilidades, fato que se justifica pela natureza do jogo, que possui bem menos aleatoriedade que o pôquer, sem espaço para blefes, onde o conhecimento das probabilidades torna-se relevante na escolha da jogada. Outro aspecto que ajuda a entender porque o bridge possui extensa produção acadêmica acerca de suas probabilidades mesmo sem gozar da popularidade do pôquer está no fato deste jogo ser extremamente intelectualizado, sendo muito popular na comunidade universitária dos países de língua inglesa, sobretudo Inglaterra e EUA. Nesta perspectiva, o bridge é equiparado ao xadrez.

Os jogos de carta procuram deixar a pecha de jogo de azar, sobretudo o pôquer. Assim como xadrez, dama e gamão, o bridge e o pôquer são chamados de jogos da mente ou esportes da mente. Os esportes da mente são competições em que prevalece habilidades intelectuais em detrimento das habilidades físicas, sendo, inclusive reconhecido pelo comitê olímpico internacional como uma modalidade esportiva em 2010.

O king possui muitas semelhanças com o bridge. Ambos são jogos de baixa aleatoriedade, sem espaço para blefes ou apostas, que predomina o espírito esportivo e quase restrito a comunidade universitária. No entanto, são raros os trabalhos dedicados ao estudo das probabilidades do king e este artigo ocupa esta lacuna e seu objetivo é modelar algumas situações problemas do jogo king para, então, calcular algumas probabilidades que podem úteis aos seus entusiastas.

Para cumprir este objetivo, o trabalho está organizado em cinco capítulos, sendo este o primeiro e destinado a introduzir o trabalho, o problema de interesse o objetivo do artigo. O segundo capítulo apresenta a fundamentação teórica que contém a apresentação das regras do jogo King e uma revisão de literatura de outros trabalhos que explora jogos de carta a luz da teoria da probabilidade. O terceiro capítulo apresenta a metodologia usada neste trabalho e o quarto capítulo apresenta os resultados obtidos. O quinto e último capítulo faz uma discussão final e o artigo encerra-se com as referências.

2. Sobre Jogar Cartas e Fazer Contas

A história dos jogos de carta é imprecisa e há divergências quanto a sua origem. Benham (2012) afirma que o jogo de carta surgiu na China no século IX durante a dinastia Tang (618 a 907). O autor vai além e afirma que o primeiro livro sobre cartas também foi escrito na dinastia Tang, se chamava Yezi Gexi e que foi escrito por uma mulher (que eram maioria entre os jogadores) por volta do ano de 860. A partir do século XI, há registros que os jogos de cartas já havia se disseminaram pelo continente asiático.

Soares (2016) também afirma haver contradições acerca do período e local do surgimento do baralho e dos jogos de carta. A autora afirma que há registros de sua chegada à Europa entre os séculos XIV e XV e que os jogos de cartas têm origem árabe, aonde o jogo era formado por quatro grupos de cartas numeradas de 1 a 10 e mais três cartas ilustradas, constituindo um total de 52 cartas. No entanto, outra hipótese levantada remete o aparecimento do baralho à China, juntamente com a invenção do papel no século X, e uma das pistas seria a identificação de cartas datadas desse período com naipes semelhantes aos ouros e paus. Para Soares (2016), citando Berry (1995), as copas e espadas seriam uma contribuição árabe e as figuras utilizadas (rei, rainha e valete) seriam invenções europeias que ainda hoje são mantidas no Ocidente.

Benham (2012) também afirma que os jogos de cartas chegaram na Europa século XIV vindo, provavelmente, do Egito e que as cartas já continham naipes similares aos do tarô e que esses naipes persistem até hoje nos baralhos europeus. Outra informação interessante que Benham traz acerca do baralho é que o primeiro registro histórico documentado sobre jogos de cartas remete a uma ordem militar escrita em 1334 em Vitória-Gasteiz, território onde hoje é a Espanha, onde o jogo de cartas era expressamente proibido.

Ao desembarcar na Europa, e sobretudo devido ao desenvolvimento da xilogravura e posteriormente da impressão em papel, o baralho popularizou-se pela Europa sendo encontrado em diversos países, especialmente França, Inglaterra, Espanha, Itália e Alemanha. As diferenças entre os baralhos de cada país eram pequenas e se limitavam ao número de cartas e nome dos naipes. Por exemplo, havia o baralho francês com 52 e 56 cartas (que tinha o cavaleiro além do rei, rainha e valete), o baralho italiano e espanhol tinham somente 40 cartas (truco e escopa são jogos de origem italiana e por isso são jogados com baralho de 40 cartas) e o baralho alemão tinha 36 cartas. Os naipes, embora sempre fossem quatro, tinham nomes e símbolos diferentes. A Figura 1 apresenta os nomes e os símbolos de cada naipe.

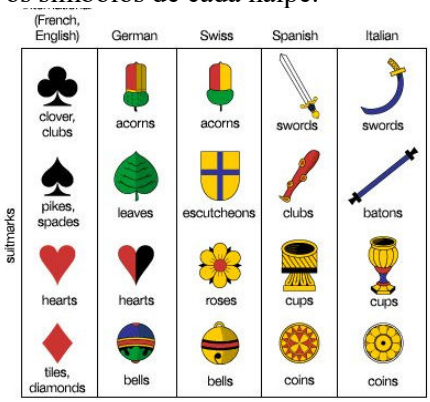


Figura 1 – Naipes e símbolos dos baralhos medievais. Fonte: Parlett (2017)

Atualmente, o baralho francês prevaleceu, sendo o baralho de 52 cartas com quatro naipes do baralho francês tido como o baralho padrão. Na verdade, o baralho padrão é de 54 cartas, formado pelo baralho francês de 52 cartas com duas cartas a mais, conhecidas como coringas. Soares (2016) citando Mauger (1875) afirma que o coringa surgiu nos Estados Unidos por volta do ano de 1860, quando jogadores estadunidenses modificaram as regras de um jogo e introduzira um trunfo extra. Este trunfo foi originalmente chamado de "*The Best Bower*" e depois "*The Little Joker*" ou "*The Jolly Joker*". O autor também afirma que há uma teoria de que o coringa tenha sido inspirado na carta 22ª do tarô o "*il matto*" (o "louco" em italiano), que representava a liberdade. De toda forma, a escolha do bobo da corte para representar o coringa foi natural, pois completaria a corte no jogo. No entanto, há registros de coringas sendo representado por crianças, animais e outros artistas de palco além do palhaço.

Não se sabe exatamente qual foi o primeiro jogo de cartas que existiu, mas a lista de jogos que se pode jogar com o baralho padrão é grande. Só na modalidade jogo de vazas (*trick-*

taking game), o Wikipédia lista mais 141 jogos que se pode jogar o baralho padrão, incluindo o bridge e o king. No entanto, os jogos de vazas é somente uma das formas de jogar e existem vários outros jogos que não são de vazas, como o pôquer, que é um jogo de coleção de cartas.

Dentre todos os jogos de carta, o pôquer é, provavelmente, o mais popular do mundo. Sua origem é estadunidense e no século XIX já havia farta publicação de livros explicando suas regras e apresentando supostas táticas e estratégias vencedoras. E muitos destes livros já continham menção a necessidade de cálculos de probabilidade para se obter êxito em suas jogadas, como o livro "*The Game of Draw Poker*" de John William Keller de 1889 e "*The Gentleman Handbook on Poker*" de W.J. Florence e Florence de 1892.

Atualmente, as probabilidades do pôquer são muito bem conhecidas e estudas e podem ser facilmente encontrada na internet. A Figura 2 ilustra as probabilidades dos principais jogos saírem na mão do jogador, lembrando que o pôquer é um jogo cujo objetivo é colecionar cartas a fim de formar jogos cujo valor são inversamente proporcional a probabilidade de fazê-los, e que o jogador recebe 5 cartas de um baralho padrão de 52 cartas.

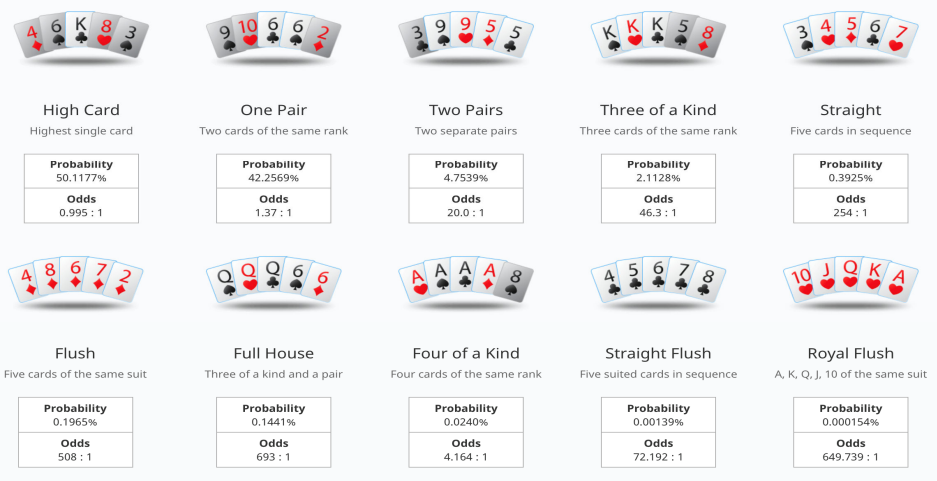


Figura 2 – probabilidades de saída de mão no pôquer. Fonte: GGPoker (2021)

Bem menos popular que o pôquer, mas igualmente jogado e estudado é o bridge. O brigde é considerado o mais esportivo dos jogos de cartas. Diferentemente do pôquer e blackjack que comumente estão associados a cassinos, apostas, blefes e trapaças, o bridge se mostra a antítese do pôquer. Nenhum outro jogo de cartas se iguala ao bridge em termos de organização de suas ligas e realização de torneios. Nesta perspectiva, o bridge se parece muito com o xadrez, atraindo a atenção de apreciadores de jogos de raciocínio lógico, que prefere jogos menos suscetíveis a blefes e mais dependentes de táticas e estratégias baseadas no conhecimento de suas probabilidades, fato que, talvez, explique sua popularidade na comunidade acadêmica, sobretudo na Inglaterra e EUA.

Assim, o bridge também exibe fartura de publicações científicas que exploram probabilidade de suas jogadas. Como artigo de Waugh e Waugh publicado em 1953 no *Jounal of Americam Statistics Society* em 1953, que já abordava as jogadas do bridge em termos da teoria da probabilidade usando probabilidade conjunta, condicional e análise combinatória para os cálculos. Outro artigo que já apresentava cálculos apurados do brigde é o trabalho de Divinsky (1964) publicado no *Mathematics Magazine*. Infelizmente, o king não possui publicações que tratam das probabilidades de suas jogadas, mas a estratégia para determina-las será baseado nos cálculos de probabilidade que foram encontrados para o pôquer e o bridge.

De um modo geral, os recursos utilizados para se encontrar as probabilidades do pôquer e do bridge consiste em utilizar os métodos de enumeração e contagem, especialmente a combinação. Além da combinação, os axiomas básicos da teoria da probabilidade também são necessários para o cálculo das probabilidades. Algumas situações do bridge e do pôquer utilizam

o conceito de probabilidade conjunta e probabilidade condicional, especialmente quando se trata de questões que aparecem no meio do jogo, quando se tem conhecimento de algo que já aconteceu e se deseja saber o resultado condicionado a esta informação. Outro conceito que também aparece com frequência nestes cálculos é o uso das distribuições de probabilidade, especialmente as distribuições binomial, hipergeométrica, multinominal e hipergeométrica multivariada. Uma rápida revisão sobre estes conceitos matemáticos é feito, mas antes é necessário explicar um pouco sobre o jogo king e suas regras.

2.2 O Jogo King

O King é um jogo que utiliza as 52 cartas do baralho padrão e jogado entre 4 jogadores que disputam o jogo entre si. Vence o jogo aquele que fizer o maior número de pontos ao final de 10 partidas. Cada partida tem um objetivo diferente (chamado de contrato). As primeiras seis partidas são chamados de fase negativa, e as quatro últimas partidas são chamados de leilões. Os objetivos das primeiras seis partidas são:

- Não fazer vazas;
- Não levar cartas de copas;
- Não levar Rainha;
- Não levar Reis e Valetes;
- Não levar o King (rei de copas), e
- Não fazer as duas últimas vazas.

Cada vaza feita na primeira partida penaliza o jogador em 20 pontos. Cada carta de copas levada na segunda partida penaliza o jogador em 20 pontos. Cada rainha levada na terceira partida penaliza o jogador em 50 pontos. Cada rei ou valete levado na quarta partida penaliza o jogador em 30 pontos. O king penaliza o jogador em 160 pontos. E cada uma das duas últimas vazas da sexta partida penaliza o jogador em 90 pontos. Ao final da fase negativa é feito a soma dos pontos para iniciar a fase dos leilões.

A vaza é o mecanismo principal do king, tal como no bridge. Em cada partida do king, as 52 cartas são distribuídas entre os 4 jogadores, cada um recebendo 13 cartas. Cada partida tem 13 rodadas, ou mão, onde cada jogador descarta uma carta. O jogador que inicia a rodada (ou mão) escolhe a carta que deseja descartar. Os demais jogadores são obrigados a descartar uma carta do mesmo naipe da primeira carta descartada na rodada. Caso o jogador não possua uma carta daquele naipe, ele pode escolher qualquer carta para descartar. Ao final da rodada, a maior carta do naipe da primeira carta descartada faz a vaza. O jogador que fez a vaza anterior inicia o descarte da rodada seguinte, e assim se prossegue até que se descarte todas as 13 cartas da mão, encerrando esta partida. O jogo king contém 10 partidas.

Na primeira partida, o contrato é não fazer vazas. Portanto, quanto mais vazas um jogador fizer, pior será. Já na segunda partida, o objetivo é não levar cartas de copas. Se numa vaza não há carta de copas, então não há penalidade em fazer a vaza. No entanto, uma vaza pode conter até quatro cartas de copas e, neste caso, o jogador que a fizer será penalizado em 80 pontos, 20 pontos por carta de copas contida na vaza feita por ele. Na terceira partida o contrato é não levar as rainhas. Fazer uma vaza que não tenha a rainha não traz penalidade, mas se houver uma rainha entre as cartas da vaza feita pelo jogador, este será penalizado em 50 pontos para cada rainha. De forma análoga, na quarta partida o contrato é não fazer vazas que contenham reis e valetes. Na quinta partida não se pode fazer a vaza que contenha o king (o rei de copas). E na sexta e última partida da fase negativa, não se pode fazer as duas últimas vazas.

Após a fase das negativas, inicia-se a fase positiva, ou leilões. São quatro leilões, um para cada jogador. Nas partidas do leilão o contrato varia, podendo ser um jogo cujo objetivo seja não fazer vazas (tal como no primeiro contrato) ou pode ter como objetivo fazer a vaza com a opção de marcar (ou não) um naipe como trunfo (tal como no Bridge). Quando o contrato de uma partida do leilão for escolhido para não fazer vazas, ele é chamado de nulos ou jogar para baixo.

Quando o contrato escolhido for fazer vazas, ele é chamado de jogar para cima. Quem decide qual será o contrato do leilão é seu dono. Porém, o dono do leilão pode vender o direito de escolha do contrato a outro jogador que pagar vazas suficientes para que o dono abdique da escolha e a ceda a outrem.

No leilão, caso o contrato escolhido seja fazer vazas, cada vaza feita rende 20 pontos positivos para o jogador que a fez. Quando o contrato do leilão for não fazer vazas, cada jogador parte de 325 pontos positivos e cada vaza feita penaliza o jogador em 75 pontos. Ao final das 10 partidas o jogador que somar mais pontos é declarado o vencedor.

Seja no leilão ou nas seis partidas da fase negativa, a estratégia a ser adotada depende da saída de mão, ou seja, da distribuição das 13 cartas que cada jogador recebe no início de cada partida. Sair com cartas altas ou com cartas baixas faz toda a diferença na decisão de qual carta será descartada, assim como sair com muitas cartas, ou nenhuma carta, de um mesmo naipe.

Portanto, o estudo da distribuição das cartas nas saídas de mão foi a situação problema escolhida para iniciar a aplicação da teoria da probabilidade no jogo de cartas king, cujo cálculo se dará, basicamente, através da análise combinatória.

2.3 Combinatória

A combinatória é um ramo da matemática que estuda coleções ou agrupamentos finitos de elementos que satisfazem critérios específicos determinados e se preocupa com a contagem de elementos nessas coleções ou agrupamentos. As formas de agrupamento se distinguem entre si com base em dois aspectos fundamentais: diferenciação pela ordem e tamanho do subconjunto. A diferenciação pela ordem é quando um agrupamento é distinto de outro em relação a ordem com que aparecem seus elementos, ou seja, a ordem dos elementos importa. Quando a ordem importa, os agrupamentos são chamados de permutação e arranjo.

A permutação e o arranjo distingue-se em relação ao tamanho do subconjunto de elementos. Quando o subconjunto é do tamanho do próprio conjunto, o agrupamento é chamado de permutação, quando o subconjunto é menor, o agrupamento é dito arranjo. Já a combinação é quando a ordem não importa. O cálculo da permutação de n elementos é dado por $P_n = n.(n\text{-}1).(n\text{-}2)...1 = n!$. O cálculo do arranjo de n elementos tomados r a r é dado por $A_n^r = n!/(n\text{-}r)!$. O cálculo da combinação de n elementos tomados r a r é $C_n^r = n!/(r!(n\text{-}r)!)$.

A combinação é a técnica de enumeração mais utilizada no cálculo de probabilidades do pôquer e do bridge. A probabilidade de um jogador sair, no caso do pôquer, com *royal flash*, *full house*, uma trica ou par são determinados usando a combinação. O mesmo ocorre no bridge, a probabilidade do jogar sair com determinadas distribuições são determinadas pela combinação.

No caso do king, os jogadores iniciam as partidas sempre com 13 cartas, e a ordem com que as cartas são recebidas não distingue uma mão da outra, assim, a combinação é a técnica de enumeração adequada a ser usada para o cálculo de suas probabilidades.

2.4 Axiomas básicos da probabilidade, probabilidade conjunta e condicional

Para o cálculo das probabilidades do king, também se faz necessário regatar alguns conceitos básicos sobre probabilidade, sobretudo na perspectiva de se definir corretamente os eventos cuja probabilidade se deseja calcular.

A teoria da probabilidade é definida com base em três axiomas, chamados de Axiomas de Kolmogorov, em homenagem a Andrey Kolmogorov que o postulou em 1933. De forma simplificada, os axiomas de Kolmogorov definem que: i) a probabilidade de qualquer evento é um número maior ou igual a zero e menor ou igual a um; ii) a probabilidade do conjunto universo é um; e iii) que a probabilidade da interseção de dois ou mais eventos mutuamente excludentes é igual a soma das probabilidades individuais de cada evento.

Os axiomas da probabilidade são importantes para se definir com precisão os eventos aos quais se deseja calcular a probabilidade, bem como operar com eventos complementares e conjuntos.

Outro conceito bastante útil para o cálculo de probabilidades de algumas situações do king para é o conceito de probabilidade conjunta e probabilidade condicional. Em ambos os casos, a probabilidade conjunta e a probabilidade condicional são situações que envolvem dois, ou mais, eventos simultâneos.

A probabilidade conjunta é quando se deseja calcular a probabilidade da ocorrência simultânea de dois ou mais eventos. Já probabilidade condicional é quando se deseja calcular a probabilidade de um evento sabendo-se antecipadamente o que ocorreu com o outro evento.

A probabilidade conjunta e condicional é útil quando se deseja saber a probabilidade de algo ocorrer no meio do jogo, pois já é sabido quais cartas foram descartadas até aquele momento. A relação entre a probabilidade conjunta e condicional de dois eventos A e B é dada pela relação $P(A/B) = P(A \cap B)/P(B)$, cuja generalização é conhecido como Teorema de Bayes.

3. Metodologia

Este trabalho se caracteriza, do ponto de vista da pesquisa científica, como uma pesquisa de natureza aplicada, com objetivos exploratórios, de abordagem quantitativa e que foi executada utilizando-se como procedimento a pesquisa bibliográfica e o estudo de caso. O caso estudado foi o jogo de cartas king, no qual identificou-se algumas situações e perguntas de interesse ao jogador para que fosse objeto de estudo e aplicação da teoria da probabilidade e da análise de decisão a partir de uma perspectiva hipotética dedutiva, deduzindo as probabilidades destas situações a partir do cálculo de combinações possíveis ou utilizando-se distribuições de probabilidade conhecidas.

4. Resultados

Nesta seção são apresentados os resultados deste trabalho, fruto da aplicação de técnicas de enumeração e cálculos de probabilidade em algumas situações que podem acontecer durante o jogo king que sejam de interesse do jogador. São diversas situações que foram selecionadas, a maioria se referem as possibilidades de certas cartas estarem na mão de um jogador antes do início daquela partida, que são aqui chamadas de saídas de mão ou distribuição das mãos.

4.1 Distribuição da Mão de Saída

Em todos as 10 partidas do king, o baralho de 52 cartas é embaralhado e distribuído entre seus 4 jogadores, resultando em 13 cartas recebidas aleatoriamente por jogador. Estas 13 cartas recebida pelo jogador e que estão em sua mão é a sua mão de saída.

A distribuição das cartas na mão de saída determina a estratégia a ser adotada por cada jogador, especialmente quem começa a partida e deve descartar primeiro. Algumas distribuições da mão de saída podem favorecer ou desfavorecer o jogador dependendo do contrato, por exemplo, sair com cartas altas é desfavorável no primeiro contrato (não vazas), mas favorável quando o jogo vai pra cima nos leilões. Por outro lado, sair baldado (sem cartas de um naipe) é sempre uma situação interessante, independente do contato.

Assim, as principais mãos de saída que pode influenciar diretamente a estratégia a ser adotada diz respeito a ocorrência de muitas cartas altas (ou cartas baixas) em qualquer contrato, sair com muitas (ou poucas ou nenhuma) cartas de um mesmo naipe em qualquer contrato, sair com uma ou mais rainhas no contrato de não rainha, sair com reis e valetes no contrato de não homens e sair com uma distribuição de naipes do tipo 4-3-3-3 em qualquer contrato.

4.2 Sair com Cartas Altas ou Baixas

Na primeira partida do king o contrato é não fazer vazas. Cada vaza feita são 20 pontos a menos no jogo. Como a vaza é feita pela maior carta do mesmo naipe da primeira carta descartada na vaza, é desejável que as cartas na mão do jogador sejam as mais baixas possíveis. Por outro lado, sair com 13 cartas altas pode ser um pesadelo e a certeza que o jogador levará

muitas vazas. Assim, é oportuno saber: qual a probabilidade de um jogador sair com n cartas altas (ou baixas) na mão de saída nesta partida?

As cartas altas são: 10, Valete, Rainha, Rei e Ás. As cartas baixas são: 2, 3, 4, 5 e 6. A quantidade de cartas altas no baralho de 52 cartas é a mesma das cartas baixas. Portanto, o cálculo da probabilidade será o mesmo. Não há relevância de naipe aqui. Uma carta é alta independente do naipe. Assim, em um baralho de 52 cartas há 20 cartas altas e 20 cartas baixas. Se o baralho é totalmente distribuído entre 4 jogadores, cada jogador receberá 13 cartas. Assim, a probabilidade de um jogador receber ***a*** cartas altas dentre as 13 cartas que receberá é dado pela equação apresentada na Figura 3 que também apresenta uma tabela que mostra o valor desta probabilidade para diferentes valores de ***a***, variando de 0 a 13.

$$P(A=a)=\frac{\binom{20}{a}\binom{32}{13-a}}{\binom{52}{13}}$$

A: Probabilidade de 1 jogador sair com a cartas Altas (AKQJ10)		
a	P(A = a)	P(A ≤ a)
0	0,055%	0,055%
1	0,711%	0,766%
2	3,860%	4,626%
3	11,581%	16,208%
4	21,401%	37,608%
5	25,681%	63,289%
6	20,545%	83,834%
7	11,062%	94,896%
8	3,995%	98,891%
9	0,951%	99,842%
10	0,144%	99,986%
11	0,013%	99,999%
12	0,001%	100,000%
13	0,000%	100,000%

Figura 3 – probabilidades de sair com ***a*** cartas altas (ou baixas)

A probabilidade de sair com nenhuma carta alta (ou baixa) é de apenas 0,055%. O mais provável (25,681%) é o jogador sair com 5 cartas altas (ou baixa) na mão de saída.

4.3 Sair Baldado ou Longo em um Naipe

Uma situação bastante desejável em qualquer contrato é sair baldado em um naipe. Sair baldado em um naipe significa que dentre as 13 cartas recebidas pelo jogador no início de uma partida, não há cartas de um naipe. A vantagem de sair baldado é poder descartar qualquer carta quando uma vaza se inicia com o naipe baldado. O naipe baldado é uma excelente oportunidade de se livrar de cartas altas ou de cartas indesejáveis dependendo do contrato.

Por outro lado, outra situação que pode ocorrer é sair com muitas cartas de um mesmo naipe. Neste caso, é dito que o jogador está longo ou comprido no naipe. Em algumas situações é vantajoso estar longo num naipe, como nos leilões, pois os naipes longos são escolhidos como trunfo. Naipes longos também podem ser vantajosos no contrato de não vazas, sobretudo se for longo com cartas baixas. Por outro lado, sair longo num naipe pode ser um pesadelo no contrato de não copas.

Define-se naipe longo quando um jogador sai com 5 ou mais cartas de um mesmo naipe na mão de saída. Sabe-se que o baralho tem 52 cartas, sendo 13 de um mesmo naipe, e que são entregues 13 cartas no início de cada partida. A probabilidade de um jogador sair com ***n*** cartas de um mesmo naipe é dado pela expressão da Figura 4, que também apresenta os valores da distribuição e distribuição acumulada para o número de cartas variando de 0 a 13.

A Figura 4 mostra que a probabilidade de sair baldado em um naipe é de 1,279%, e que a probabilidade de sair com única carta de um naipe é de 8%, e o mais provável é o jogador sair com 3 cartas de um mesmo naipe (28,63%).

$$P(N=n)=\frac{\binom{13}{n}\binom{39}{13-n}}{\binom{52}{13}}$$

N: Probabilidade de 1 jogador sair com n cartas de um mesmo naipe		
n	P(N = n)	P(N≤ n)
0	1,279094803758%	1,2790948038%
1	8,006185993890%	9,2852807976%
2	20,587335412861%	29,8726162105%
3	28,632960746623%	58,5055769571%
4	23,860800622186%	82,3663775793%
5	12,469192583207%	94,8355701625%
6	4,156397527736%	98,9919676903%
7	0,881660081641%	99,8736277719%
8	0,116690304923%	99,9903180768%
9	0,009261135311%	99,9995792121%
10	0,000411606014%	99,9999908181%
11	0,000009101853%	99,9999999200%
12	0,000000079841%	99,9999999998%
13	0,000000000157%	100,0000000000%

Figura 4 – probabilidades de sair com ***n*** cartas de um mesmo naipe

Os cálculos acima só considera a possibilidade do jogador sair baldado num único naipe, mas existe a possibilidade de sair baldado em dois naipes e baldado em três naipes. Sair baldado em 3 naipes é o mesmo evento que sair com 13 cartas do mesmo naipe na mão, que já consta na tabela da figura 4. A probabilidade de sair baldado em 2 naipes é dada pela expressão mostrada pela Figura 5.

$$P(Baldado\ \ 2naipes\ )=\frac{\binom{13}{0}\binom{13}{0}\binom{26}{13}}{\binom{52}{13}}=0{,}0016\,\%$$

Figura 5 – probabilidades de sair baldado em 2 naipes

4.4 Sair com Rainha

No contrato de não levar a rainha é desejável que o jogador não saia com a rainha em mãos. Na verdade, qualquer carta mais alta que a Rainha também não é desejável.

Sabendo que há 4 rainhas no baralho de 52 cartas e que os jogadores recebem 13 cartas no início de cada partida, logo, a probabilidade de sair com nenhuma, uma, duas, três ou com as quatro rainhas do baralho é dado pela expressão da Figura 6, que também contém a tabela com os valores da probabilidade e probabilidade acumulada.

$$P(Q=q)=\frac{\binom{4}{q}\binom{48}{13-q}}{\binom{52}{13}}$$

Q: Probabilidade de 1 jogador sair com q rainhas		
q	P(Q = q)	P(Q ≤ q)
0	30,4%	30,4%
1	43,9%	74,3%
2	21,3%	95,6%
3	4,1%	99,7%
4	0,3%	100,0%

Figura 6 – probabilidades de sair com rainha

4.5 Sair com Reis e Valetes

No contrato de não levar reis ou valetes (também conhecido como não homens) é desejável que o jogador não tenha estas cartas em mãos. A Figura 7 a seguir exibe as probabilidades de sair com ***h*** homens.

$$P(H=h)=\frac{\binom{8}{h}\binom{44}{13-h}}{\binom{52}{13}}$$

H: Probabilidade de 1 jogador sair com h homens		
h	P(H = h)	P(H ≤ h)
0	8,2%	8,2%
1	26,6%	34,7%
2	33,8%	68,6%
3	21,9%	90,4%
4	7,8%	98,3%
5	1,563%	99,8%
6	0,16897%	100,0%
8	0,00017%	100,0%

Figura 7 – probabilidades de sair com homens (rei ou valete)

Sabendo que há 4 reis e 4 valetes no baralho de 52 cartas, e que são distribuídas 13 cartas no início de cada partida, a probabilidade de sair com ***h*** homens é dada pela expressão contida na Figura 7, que também exibe uma tabela com os valores da probabilidade e probabilidade acumulada para ***h*** variando de 0 a 8A Figura 7 revela que sair sem homens na mão de saída é um evento com 8,2% de probabilidade de ocorrer. O mais provável é o jogador sair com 2 homens (33,8%).

4.6 Sair com distribuição de naipes 4-3-3-3

Outra mão de saída que interfere na estratégia a ser adotada é a distribuição dos naipes destas cartas. A distribuição mais comum é a 4-3-3-3, quando há 4 cartas de um naipe e três cartas de cada um dos três naipes restantes.

O cálculo da probabilidade de sair com distribuição 4-3-3-3 na mão é mais complexo que os cálculos efetuados anteriormente. Pois agora, obrigatoriamente os quatro naipes são considerados simultaneamente. Nos cálculos anteriores, embora fossem aplicados ao baralho de 4 naipes, não era preciso definir os eventos em termos do naipe para se encontrar a probabilidade.

Os eventos eram definidos de forma dicotômica, como cartas altas e cartas não altas, cartas do naipe e cartas que não do naipe, cartas rainhas e não rainhas, cartas homens e não homens. Ou seja, a contagem das cartas em duas categorias permite o cálculo rápido usando a distribuição hipergeométrica.

No caso da distribuição dos naipes na mão de saída é preciso usar a informação de que são quatro das categorias de agrupamento e, para este caso, a distribuição adequada é a distribuição hipergeométrica multivariada.

A distribuição hipergeométrica multivariada não é comum e não consta no repertório das distribuições de probabilidade disponível nos softwares de planilha eletrônica, como o Microsoft Excel, e nem no portal WolframAlpha. No entanto, o cálculo de um jogador sair com as cartas com distribuição de naipes 4-3-3-3 é facilmente formulado através da análise combinatória e probabilidade conjunta.

Inicialmente define-se o evento SairMão4333 quando o jogador sai com quatro cartas de um naipe e três cartas de cada um dos naipes restantes. Portanto, o evento SairMão4333 contempla os eventos sair com quatro copas e três cartas de cada um dos três naipes restantes, sair com quatro espadas e três cartas de cada um dos naipes restantes, sair com quatro ouros e três cartas de cada naipe restante e sair com quatro paus e três cartas de cada naipe restante. Como estes eventos são independentes entre si, a probabilidade de SairMão4333 é soma destes quatro eventos, que podem ser facilmente calculados separadamente. A Figura 8 exibe a expressão e o resultado para a probabilidade de um jogador sair com mão com naipes distribuídos 4-3-3-3.

$$P(SairMão4333) = P(4/3/3/3) + P(3/4/3/3) + P(3/3/4/3) + P(3/3/3/4)$$

$$P(SairMão4333) = \frac{\binom{13}{4}\binom{13}{3}\binom{13}{3}\binom{13}{3}}{\binom{52}{13}} + \frac{\binom{13}{3}\binom{13}{4}\binom{13}{3}\binom{13}{3}}{\binom{52}{13}} + \frac{\binom{13}{3}\binom{13}{3}\binom{13}{4}\binom{13}{3}}{\binom{52}{13}} + \frac{\binom{13}{3}\binom{13}{3}\binom{13}{3}\binom{13}{4}}{\binom{52}{13}}$$

$$P(SairMão4333) = 10{,}5361\%$$

Figura 8 – probabilidades de sair com naipes distribuídos 4-3-3-3

Surpreso por não encontrar a distribuição de probabilidade hipergeométrica multivariada no Microsof Excel, foi feito uma pesquisa na internet em busca de uma calculadora para a distribuição de probabilidade hipergeométrica multivariada e foi encontrado um site feito para se calcular probabilidade para o jogo de cartas Magic.

O *Magic* é um jogo de cartas colecionáveis que usa baralho próprio, no qual os jogadores montam seus *decks* a partir de diversas cartas disponíveis conforme estratégia definida para vencer seus adversários. Suas cartas representam artefatos, criaturas, terrenos,

encantamentos, mágicas e feitiços e as formas de combinar essas cartas para formar um *deck* para se jogar ultrapassam, e muito, as possibilidades de combinação de um baralho de cartas convencionais. Assim, Michael B. Moore, um matemático entusiasta do jogo de Magic, criou o site Dekulator (Moore, 2019) com uma calculadora online para distribuição hipergeométrica multivariada para atender o *Magic* e que atendeu aos propósitos deste trabalho.

Usando a calculadora online citada acima configurada para um baralho de king, foi calculada a probabilidade de sair 4-3-3-3 para um naipe em específico é de 2,6. Multiplicando este resultado por 4, obtém-se que a probabilidade de 1 jogador em sair 4-3-3-3 em qualquer naipe é 10,4%. Posteriormente, usando o comando combinação do Excel, esta probabilidade foi calculada com maior precisão conforme mostrou a figura 8.

4.7 Probabilidade do sair com Kovalsk e Grã-Kovalsk

Outra situação interessante na mão de saída, sobretudo quando o jogo for para cima nos leilões, é a chamada Kovalskiana. Esta jogada é realizada quando o jogador descarta o rei em uma vaza e, na vaza seguinte descarta o ás do mesmo naipe do rei descartado anteriormente, de modo a criar uma falsa sensação de que a vaza anterior poderia ter sido feito por outro jogador.

Nesta perspectiva, o evento que permite a realização da Kovalskiana é sair com às e rei do mesmo naipe na mão de saída. De forma análoga, denomina-se Grã-Kolvaskiana a jogada que se inicia com a rainha na primeira vaza, sucedida pelo rei e ás nas vazas seguintes, todos do mesmo naipe. Assim, a probabilidade do jogador sair com ás e reis do mesmo naipe e sair com ás, rei e rainha do mesmo naipe na mão de saída é dada pela Figura 9.

K: Probabilidade de 1 jogador sair com Às e Rei do mesmo naipe (Kovalsk)		GK: Probabilidade de 1 jogador sair com Às, Rei e Rainha do mesmo naipe (Grã-Kovalsk)	
k	P(K = k)	gk	P(GK = gk)
0	94,5%	0	99,45%
1	4,8%	1	0,5339%
2	0,67%	2	0,0176%
3	0,0241%	3	0,0000576%
4	0,000171%	4	0,0000000063%

Figura 9 – probabilidades de sair com às e rei e às, rei e rainha do mesmo naipe.

No entanto, sair com às e rei do mesmo naipe não garante que a jogada Kovaskiana será concretizada, tão pouco a Grã-Kovalskiana. Existe a possibilidade do às ser cortado por uma carta trunfo, neste caso a jogada é declarada Gambito do Kovalsk.

4.8 Probabilidade do king sair na primeira vaza

Todas as situações descritas acima, para as quais foram calculadas as probabilidades, tratava da distribuição das cartas na mão de saída, uma situação que precede qualquer descarte de carta. No entanto, algumas situações durante a partida são interessantes para se calcular probabilidades. Estas situações são mais complicadas de serem definidas e calculadas e serão objeto para trabalho futuro. No entanto, uma situação muito interessante e que pode acontecer já na primeira vaza da quinta partida é cair o king.

Na quinta partida o contrato é não levar o king. Não importa quantas vazas o jogador tenha feito nesta partida, o objetivo é não fazer a vaza que contenha o rei de copas. Quem o fizer, é penalizado em 160 pontos, a maior pontuação de uma carta no jogo.

Nesta partida, o jogador não pode iniciar uma vaza descantando carta de copas, a não ser que ele somente tenha cartas de copas em sua mão. Assim, o jogo quase sempre começará com o descarte de uma carta dos outros três naipes. Na verdade, existe a ínfima probabilidade de $9{,}9 \times 10^{-14}$ da partida ser iniciada com copas, no caso raríssimo do jogador que iniciará a partida tiver saído com todas as cartas de copas na mão de saída.

Essa probabilidade da primeira vaza da partida do contrato do não king iniciar com o descarte de copas foi calculado como a soma de três eventos independentes e mutuamente excludentes: i) um jogador sair com 13 cartas do mesmo naipe na mão de saída, ii) o naipe das cartas é copas, e iii) este jogador é quem inicia o descarte. A probabilidade do primeiro evento foi calculada na figura 4, a probabilidade do segundo evento é ¼, pois são 4 os naipes existentes, e a probabilidade do terceiro evento também é ¼, pois são quatro jogadores e ordem de quem inicia a partida muda partida a partida em forma de rodízio.

Uma estratégia comum na partida do não king é o jogador começar uma vaza descartando uma carta alta daquele naipe que saiu com menos cartas na mão de saída, buscando ficar baldado deste naipe o mais rápido possível.

No entanto, esta estratégia pode ter o improvável revés de levar o king logo na primeira vaza. É uma probabilidade muito pequena disto acontecer, mas ocorre.

Para o king cair na primeira vaza é preciso que quatro eventos ocorram simultaneamente: i) um jogador sair com a mão baldado num naipe, ii) o naipe baldado não pode ser copas, iii) o jogador com naipe baldado precisa estar com o king, e iv) o jogador que começa a rodada tem que sair com o naipe baldado.

A probabilidade de um jogador sair baldado já foi calculado na figura 4 e é 0,012791; a probabilidade que o naipe baldado não seja copas é de ¾; a probabilidade deste jogador sair com o king (rei de copas) é de ¼; e a probabilidade de outro jogador começar a rodada descantando justamente o naipe baldado é de 1/3.Considerando que esses eventos sejam independentes e mutuamente excludentes a probabilidade do king cair na primeira rodada é de: 0,012791 x 0,75 x 0,25 x 0,333 = 0,0007994, ou 0,08%.

5. Considerações Finais

Este trabalho traz os primeiros resultados na aplicação da teoria da probabilidade no jogo de cartas king. Os resultados ainda são modestos, porém promissores e apontam para bastante trabalho futuro, sobretudo para modelar e calcular situações que acontecem durante a partida e não somente situação de distribuição das cartas na mão da saída. Trabalhos futuros apontam para a necessidade de utilizar probabilidades condicionais e uso de arvores de decisão para modelar as decisões de meio de jogo.

De toda forma, os resultados deste trabalho preenche a lacuna deixado pela inexistência de publicações sobre a probabilidade do king, a exemplo do que como acontece com pôquer e bridge. Mais além, este trabalho traz novas situações problemas de fácil entendimento e que faz uso de uma distribuição de probabilidade pouco usada. Por fim, este artigo apresenta o jogo de cartas king a comunidade da pesquisa operacional, na expectativa de promover sua prática nesta comunidade da qual, certamente, há muitos entusiastas dos diversivos tipos de jogos da mente.

Referências

Soares, Kamyla Lemes (2016). A iconografia das cartas de baralho. *Projética*, Londrina, v.7, n.1, p. 25-36, Jan/Jun. 2016.

Benham, W. Gurney (2012). *Playing Cards - History of the Pack and Explanations of Its Many Secrets*. Read Books Ltd, 396p.

Divinsky, N. (1964). Bayes' Formula and a Priori Probabilities in the Game of Bridge. *Mathematics Magazine*, *37*(4), 235-241.

Moore, Michael B. (2019). Deckulator, disponível em <https://deckulator.appspot.com >

Poker Probability (2021). GGPoker, disponível <https://en.ggpoker.com/get-started/poker-school/poker-hands-odds/>

Parlett, D. (2017). playing cards. *Encyclopedia Britannica*. https://www.britannica.com/topic/playing-card

Waugh, D. F., & Waugh, F. V. (1953). On probabilities in bridge. *Journal of the American Statistical Association*, 48(261), 79-87.