

Uma abordagem heurística para o Multi-Period School Bus Routing Problem

Igor Eduardo Santos de Melo, Raphael Kramer

Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Engenharia de Produção Av. da Arquitetura, s/n – Cidade Universitária,
Recife - PE, Brasil, CEP: 50740-550

igor.esmelo@ufpe.br, raphael.kramer@ufpe.br

RESUMO

Este artigo propõe uma extensão ao Problema de Roteamento do Ônibus Escolar, que engloba os subproblemas de localização de pontos de paradas de ônibus, alocação de estudantes aos pontos de parada selecionados e roteamento de ônibus envolvendo múltiplos períodos (*e.g.*, dias) e uma única escola. O objetivo consiste em minimizar a distância total percorrida pela frota no conjunto de períodos analisados, atendendo às restrições de capacidade dos veículos e distância máxima que os alunos podem caminhar até as paradas. No contexto do *Multi-Period School Bus Routing Problem* os estudantes que têm demandas de transporte para (ou de) uma escola em um subconjunto de períodos devem ser alocados à mesma parada nos períodos em que possuem demandas. Primeiramente, é apresentado um modelo matemático para o problema e, em seguida, é proposto um algoritmo baseado nas meta-heurísticas *Multi-Start* e *Variable Neighborhood Descent*. O algoritmo proposto foi executado para as 192 instâncias de *benchmark*, mostrando-se capaz de obter um bom desempenho com um baixo custo computacional.

PALAVRAS CHAVE. Multi-Period School Bus Routing Problem, Algoritmo Heurístico, Multi-Period.

MH - Meta-heurísticas, L&T - Logística e Transportes

ABSTRACT

This article proposes an extension to the School Bus Routing Problem, which includes the subproblems of locating bus stops, students allocating to selected bus stops and routing of buses involving multiple periods (*e.g.*, days) and a single school. The objective is minimize the total distance traveled by the fleet in the set of periods, taking into account the capacity constraint of the vehicles and the maximum distance that the students can walk to the stops. In the context of Multi-Period School Bus Routing Problem students who have transportation demands to (or from) a school in a subset of periods must be allocated to the same stop in the periods in which they have demands. First, a mathematical model for the problem is presented and then an algorithm based on the metaheuristics *Multi-Start* and *Variable Neighborhood Descent* is proposed. The proposed algorithm was carried out for the 192 benchmark instances, showing capable of obtaining a good performance with a low computational cost.

KEYWORDS. Multi-Period School Bus Routing Problem, Heuristic Algorithm, Multi-Period.

MH - Metaheuristics, L&T - Logistic and Transportation

1. Introdução

De acordo com a Constituição Brasileira, Brasil [1988], o Brasil deve fornecer uma educação básica para todos, provendo o atendimento aos alunos em todas as etapas por meio de programas de apoio que abranjam alimentação, saúde, transporte, entre outros aspectos importantes para os estudantes. Segundo o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira [INEP], através do Censo de Educação Básica de 2020, haviam cerca de 47,3 milhões de estudantes matriculados no sistema brasileiro de educação básica, do 1º ano do ensino fundamental até o 3º ano do ensino médio. Desse total, aproximadamente 82% são usuários da rede pública de ensino (municipal ou estadual), evidenciando o desafio em gerir os recursos disponíveis para atender a todos os alunos.

A responsabilidade pelo transporte destes estudantes entre as suas residências, ou proximidades, e a instituição de ensino é dos estados e municípios, conforme disposto em Brasil [1996], acrescida por Brasil [2003]. A federação brasileira fornece os recursos necessários através de programas nacionais, como o Programa Caminho da Escola e o Programa Nacional de Apoio ao Transporte do Escolar (PNATE). Porém, o capital limitado, a quantidade de decisões envolvidas e as diversas variáveis consideradas dificultam a boa utilização dos recursos no transporte escolar. Por esses e outros motivos, tentar resolver esta problemática de forma intuitiva pode frequentemente resultar em soluções ruins [Komijan et al., 2021].

Formalmente, o Problema de Roteamento de Ônibus Escolares (SBRP, do inglês *School Bus Routing Problem*) tem por objetivo atender a demanda dos estudantes por transporte de maneira segura, confiável e com o menor custo possível [Ellegood et al., 2020]. Proposto inicialmente no trabalho de Newton e Thomas [1969], a problemática surge como uma aplicação do *Vehicle Routing Problem* (VRP) no contexto escolar. Com o passar dos anos, mais pesquisas sobre o tema foram realizadas, incorporando outras decisões e tornando-o uma extensão do VRP. Sendo, dessa forma, um problema tão difícil quanto um VRP e, portanto, caracterizado como um problema NP-Difícil.

As decisões envolvidas nas diversas variantes do SBRP incluem a seleção de paradas de ônibus, a geração das rotas, o agendamento dos ônibus, o ajuste no horário do toque escolar e a escolha da política estratégica do transporte [Park e Kim, 2010; Ellegood et al., 2020]. Além disso, diversas características e objetivos foram sendo analisados e incorporados, enriquecendo a literatura do problema. As características abrangem desde o número de escolas envolvidas (uma ou múltiplas escolas) até o tipo de carregamento (homogêneo ou misto) e frota (homogênea ou heterogênea), enquanto os objetivos têm como interesse desde minimizar a distância/tempo total percorrido pelos ônibus até a maximização da taxa de ocupação da capacidade disponível [Park e Kim, 2010; Ellegood et al., 2020].

Com o enriquecimento da literatura, como apresentado por Ellegood et al. [2020], o SBRP foi ganhando maior importância, levando a proposição de modelos cada vez mais próximos das realidades vivenciadas pelos responsáveis pela gestão do transporte escolar. Entretanto, mesmo perante o amadurecimento nos modelos propostos, ainda há lacunas não abordadas nesta problemática. Um dos problemas relacionados aos estudos do SBRP está na simplificação da demanda diária, considerando que os estudantes se deslocam todos os dias para a instituição de ensino. Esse pressuposto é aceitável no contexto da educação básica, porém na educação de ensino superior (no qual os estudantes tem grades curriculares diferentes entre si) pode gerar rotas com desperdícios de recursos, pois potenciais economias decorrentes da variação diária são desconsideradas.

Neste contexto, o foco deste trabalho é propor um modelo matemático para o SBRP considerando múltiplos períodos, denominado *Multi-Period School Bus Routing Problem* (MP-SBRP), e propor algoritmos heurísticos para solucioná-lo. As problemáticas associadas serão a seleção de pa-

radas de ônibus, a alocação dos estudantes as paradas selecionadas e geração das rotas. Os períodos serão dispostos em dias e o objetivo será minimizar a distância total percorrida perante as seguintes características: uma escola, ambiente urbano, carregamento e frota homogêneos.

2. Descrição e formulação do problema

O MP-SBRP é definido de maneira semelhante aos problemas de VRP. Portanto, seja $G = (V, A)$ um grafo orientado composto por um conjunto V de vértices e um conjunto A de arcos. O conjunto de vértices é definido como $V = V_p \cup V_s \cup 0$, sendo $V_p = \{1, \dots, n\}$ a representação dos n possíveis locais de paradas de ônibus escolares, $V_s = \{1, \dots, m\}$ a representação das m residências dos estudantes e 0 o vértice que representa a instituição de ensino ao qual estes se deslocarão (escolas, faculdades, entre outros).

O conjunto de arcos é definido como $A = A_p \cup A_s$, sendo $A_p = \{(i, j) : i, j \in V_p \cup 0, i \neq j\}$ os arcos que estão associados a distância necessária para se deslocar entre os potenciais pontos de parada de ônibus e/ou a instituição de ensino e serão segmentos de rotas considerados para construção das soluções, e $A_s = \{(s, j) : s \in V_s, j \in V_p \cup 0, d_{sj} < D\}$ os arcos que conectam a residência dos estudantes (s) aos potenciais pontos de ônibus ou instituição de ensino (j), de tal forma que a distância associada não ultrapasse um limite D , determinado a priori. Os vértices V_p que são alcançados por um estudante s são representados pelo conjunto P_s .

O MP-SBRP consiste em alocar os estudantes $s \in V_s$ a uma parada de ônibus $i \in P_s$ nos períodos $d \in T$ em que se há demanda pelo transporte escolar e em determinar um conjunto de rotas que minimize a distância total percorrida pela frota de ônibus e que satisfaça as demais restrições: (i) as paradas com estudantes alocados no período d devem ser visitadas uma única vez, (ii) cada estudante $s \in V_s$ deve ser alocado a uma mesma parada nos dias em que tiver demanda, e (iii) a quantidade de estudantes alocados por rota não deve exceder a capacidade homogênea C dos veículos.

Dado o exposto e tomando como base as variáveis e os parâmetros apresentados na Tabela 1, o MP-SBRP pode então ser modelado como um problema de programação linear inteira mista conforme (1)-(15).

Tabela 1: Símbolos utilizados no modelo matemático

Variável	Descrição
x_{ijkd}	1 se o ônibus k percorre o arco $(i, j) \in A_p$ no dia d , 0 caso contrário
y_{ikd}	1 se a parada i é visitada pelo ônibus k no dia d , 0 caso contrário
z_{iskd}	1 se o estudante s é alocado a parada i e ao ônibus k no dia d , 0 caso contrário
w_{is}	1 se o estudante s é alocado a parada i , 0 caso contrário
Parâmetro	Descrição
a_{sd}	1 se o estudante s possui demanda no dia d , 0 caso contrário
d_{is}	1 se o estudante s alcança a parada i , 0 caso contrário
C	Capacidade dos ônibus
D	Distância máxima no qual o estudante pode caminhar
K	Conjunto de veículos disponíveis
T	Conjunto de dias considerados
P_s	Conjunto de paradas alcançadas pelo estudante s

$$\text{Min} \sum_{i \in V_p \cup \{0\}} \sum_{j \in V_p \cup \{0\}} d_{ij} \sum_{k \in K} \sum_{d \in T} x_{ijkd} \quad (1)$$

$$\text{sujeito a } \sum_{j \in V_p \cup \{0\}} x_{ijkd} = \sum_{j \in V_p \cup \{0\}} x_{jikd} \quad \forall i \in V_p, k \in K, d \in T, \quad (2)$$

$$\sum_{j \in V_p \cup \{0\}} x_{ijkd} = y_{ikd} \quad \forall i \in V_p, k \in K, d \in T, \quad (3)$$

$$u_{id} - u_{jd} + n \sum_{k \in K} x_{ijkd} \leq n - 1 \quad \forall i, j \in V_p, i \neq j, d \in T, \quad (4)$$

$$\sum_{k \in K} y_{ikd} \leq 1 \quad \forall i \in V_p, d \in T, \quad (5)$$

$$z_{iskd} \leq a_{sd} y_{ikd} \quad \forall i \in V_p, k \in K, s \in V_s, d \in T, \quad (6)$$

$$\sum_{i \in V_p} \sum_{s \in V_s} a_{sd} z_{iskd} \leq C \quad \forall k \in K, d \in T, \quad (7)$$

$$\sum_{i \in P_s} \sum_{k \in K} z_{iskd} = a_{sd} \quad \forall s \in V_s, d \in T, \quad (8)$$

$$\sum_{i \in P_s} w_{is} = 1 \quad \forall s \in V_s, \quad (9)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{d \in T} d_{is} z_{iskd} - w_{is} \sum_{d \in T} a_{sd} = 0 \quad \forall s \in V_s, i \in P_s, \quad (10)$$

$$x_{ijkd} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in V_p, i \neq j, k \in K, d \in T, \quad (11)$$

$$y_{ikd} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V_p, k \in K, d \in T, \quad (12)$$

$$z_{iskd} \in \{0, 1\} \quad \forall s \in V_s, i \in P_s, k \in K, d \in T, \quad (13)$$

$$w_{is} \in \{0, 1\} \quad \forall s \in V_s, i \in P_s, \quad (14)$$

$$u_{id} \geq 0 \quad \forall i \in V_p, d \in T. \quad (15)$$

A função objetivo (1) minimiza a distância total percorrida pelos veículos nos dias considerados. O conjunto de restrições (2) e (3) garantem a conservação de fluxo, (4) e (15) garantem a não formação de subrotas através da formulação de Miller-Tucker-Zemlin (MTZ) e (5) garante que os potenciais pontos de paradas sejam visitados somente por um ônibus k no dia d . As restrições (6) garantem que o ônibus k visite a parada i no dia d caso o estudante s seja alocado a mesma, (7) garantem que a quantidade de estudantes s alocados aos ônibus k não exceda a capacidade C e (8) garantem que apenas um ônibus k visite a parada i em que está alocado o estudante s caso haja demanda no dia d . As equações (9) garantem que o estudante s seja alocado somente aos pontos de paradas i alcançáveis pelo mesmo e (10) garantem que o ônibus k visite a parada i , na qual o estudante s está alocado, somente nos dias em que houver a demanda do estudante s . Por fim, as restrições (11), (12), (13) e (14) garantem que as variáveis de decisões são binárias.

Uma representação gráfica para uma solução de uma instância do MP-SBRP envolvendo 15 estudantes, 10 locais candidatos a paradas de ônibus e um período de 3 dias pode ser visualizada na Figura 1. A escola é representada por um losango, os possíveis pontos de paradas estão representados pelos quadrados e os alunos estão representados pelos círculos. Os ônibus são capazes de transportar no máximo 6 estudantes, sendo a rota representada por um vetor direcionado – indicando o sentido do deslocamento – e a alocação dos estudantes as paradas escolhidas representada pelas linhas tracejadas. A Figura 1-(a) apresenta a organização espacial da instância, e as Figuras 1-(b), (c) e (d) apresentam uma possível solução para o problema, mostrando as rotas no período considerado.

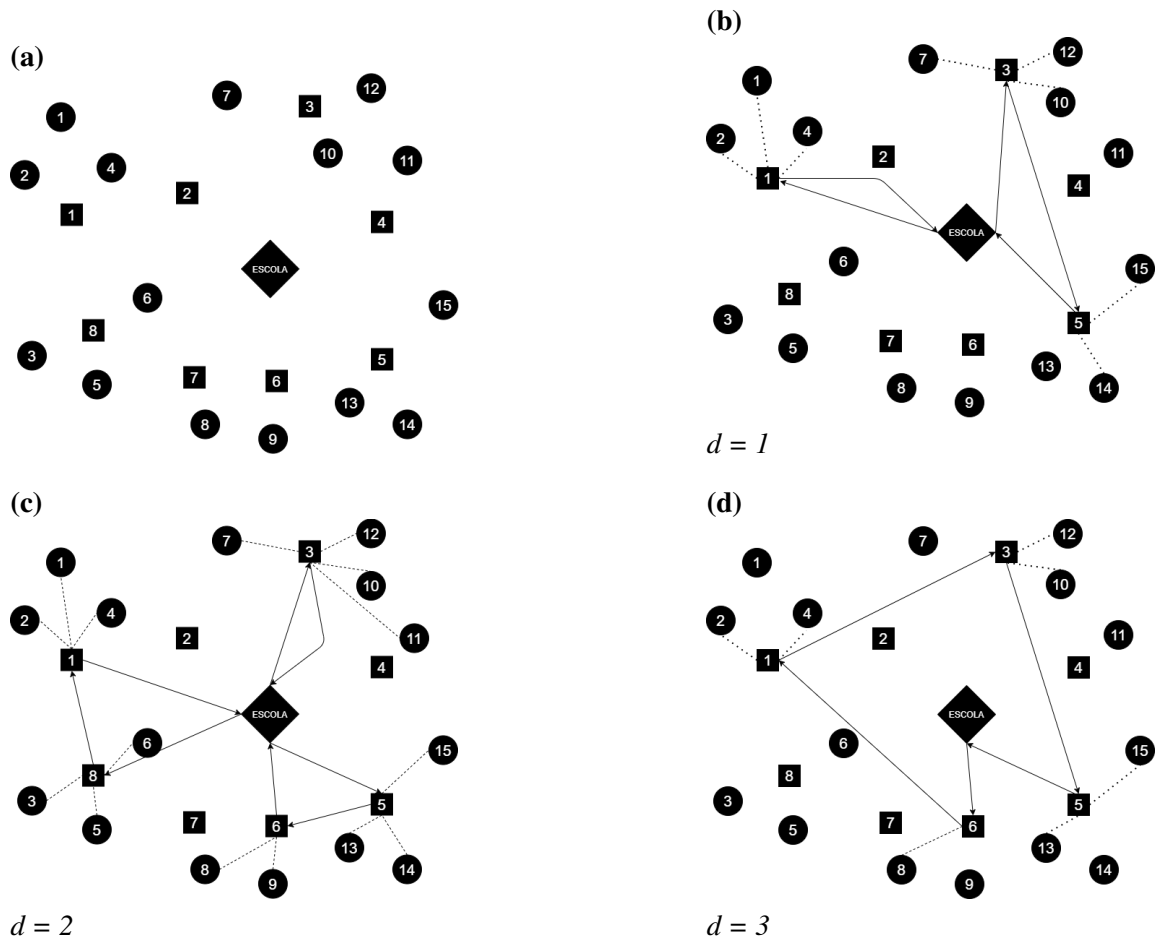


Figura 1: Exemplo de uma solução para o MP-SBRP

3. Revisão da literatura

Park e Kim [2010] e Ellegood et al. [2020] apresentam uma revisão detalhada das publicações envolvendo o SBRP. Em Park e Kim [2010] os autores expõem a grande quantidade de abordagens que consideram os sub-problemas do SBRP separadamente (resolvidos sequencialmente), sendo a solução de algum dos sub-problemas relacionados um dado já conhecido, como é o caso da localização dos pontos de paradas. Isto se deve ao fato de que abordar os sub-problemas de maneira integrada envolve um grau de complexidade maior, porém proporcionam a geração de soluções de melhor qualidade.

Neste contexto, é possível citar o trabalho de Schittekat et al. [2013] que integrou os sub-problemas de seleção de paradas e geração de rotas através de uma abordagem heurística denominada *Location-Routing-Allocation* (LRA). Nesta estratégia as paradas são inicialmente selecionadas entre o conjunto de potenciais paradas que podem ser visitadas, gerando-se rotas com as escolhidas e verificando a possibilidade de alocação dos estudantes considerados ao final do procedimento. O LRA foi implementado em uma *matheuristic* baseada na meta-heurística *Greedy Randomized Adaptive Search Procedure* (GRASP) para a heurística construtiva e uma *Variable Neighborhood Descent* (VND) para a busca local (GRASP+VND), solucionando o problema de alocação de ma-

neira exata através do algoritmo de Ford-Fulkerson. Os autores também apresentaram um modelo de programação inteira mista (MIP, do inglês *Mixed Integer Programming*) para solucionar instâncias pequenas de maneira exata.

Posteriormente, o trabalho de Kinable et al. [2014] explorou a mesma problemática abordada por Schittekat et al. [2013] por meio de um algoritmo *branch-and-price* baseado no conceito de cobertura de conjuntos. Com o algoritmo proposto foi possível conseguir uma melhora no esforço computacional necessário para solucionar as instâncias, obtendo-se alguns resultados finais e *lower bounds* melhores do que os relatados previamente por Schittekat et al. [2013]. Mais recentemente, Calvete et al. [2020] apresentou uma nova estratégia para trabalhar com estes sub-problemas, denominada de *Location-Partial-Allocation-Routing* (LPAR), onde a alocação é dividida em duas etapas (alocação parcial e alocação final). Dessa forma, um conjunto de paradas é selecionado e realiza-se uma alocação parcial dos estudantes as mesmas, em seguida é realizada a roteirização e por fim a alocação dos demais estudantes ainda não considerados.

O trabalho de Calvete et al. [2020] apresentou um modelo matemático com o objetivo de minimização dos custos de atravessamento e utilizou a estratégia LPAR em uma *matheuristic*, onde o sub-problema de seleção de paradas de ônibus é solucionado de maneira exata, realizando-se posteriormente a roteirização e aplicando uma busca local na tentativa de encontrar soluções de melhor qualidade. A *matheuristic* foi executada nas instâncias apresentadas por Schittekat et al. [2013], conseguindo melhorar o resultado final de algumas instâncias e apresentando um tempo de execução pequeno em comparação a Schittekat et al. [2013] e Kinable et al. [2014].

Por fim, o trabalho de Silva Neto et al. [2020] estuda a mesma problemática exposta anteriormente, utilizando-se da meta-heurística *Hybrid Iterated Local Search* (HILS) que realiza uma série de busca locais por meio da *Variable Neighborhood Descent with Random neighborhood ordering* (RVND), através de um conjunto de operadores intra-rota e inter-rotas executados em busca de um ótimo local. Quando este valor é atingido, a solução encontrada é salva e uma perturbação é realizada a fim de explorar outro espaço de soluções do problema. Por fim, as soluções salvas são dados de *input* para o modelo matemático que busca escolher as rotas através da resolução de um *Set Partitioning Problem* (SPP), de tal forma que o custo total da solução seja minimizado. O algoritmo foi executado em 95 instâncias utilizadas por Schittekat et al. [2013], melhorando os resultados já publicados anteriormente.

4. Algoritmo proposto

O algoritmo proposto neste trabalho parte da criação de uma solução viável para o SBRP, desconsiderando-se inicialmente a demanda variável dos estudantes por transporte escolar, transformando a mesma em uma solução viável para o MP-SBRP ao final do processo (considerando a demanda nos períodos distintos e alterando as rotas de acordo com esta informação). Neste sentido, um algoritmo *Multi-Start* é utilizado. Inicialmente, uma solução é gerada para o SBRP através da heurística de inserção mais barata. Em seguida, a solução inicial é refinada por meio da RVND e a solução obtida é replicada para os demais períodos. Por fim, um procedimento de remoção de paradas é aplicado às rotas de cada período, considerando a demanda dos estudantes em cada período.

O pseudo-código apresentado em Algoritmo 1 sintetiza o algoritmo proposto neste trabalho. Inicialmente é necessário fornecer o parâmetro I_{max} , que representa a quantidade de vezes no qual o algoritmo será reinicializado. Em seguida, a linha 2 inicializa uma solução vazia para o MP-SBRP e o seu respectivo valor de função objetivo (s^* e f^*). Com isso é possível inicializar na linha 3 o *loop* do *Multi-Start*, começando na linha 4 a gerar uma solução viável para o SBRP através de uma variação da inserção mais barata. Em seguida, na linha 5, aplica-se a busca local na

solução através do RVND. Na linha 6 a solução encontrada é replicada para os períodos considerados, passando por uma etapa de remoção de paradas para cada período na linha 7. Caso a solução encontrada no processo seja melhor que a melhor solução encontrada até o momento, a solução final é atualizada pelas linhas 9-10. Por fim, o algoritmo retorna a melhor solução encontrada ao longo das I_{max} reinicializações (linha 13).

Algorithm 1 *Multi-Start* com RVND e Remoção (MS-RVND-R)

```

1: Procedimento Multi-Start ( $I_{max}$ )
2:  $s^* \leftarrow \emptyset$ ;  $f^* \leftarrow \infty$ 
3: enquanto  $i \leftarrow 1, \dots, I_{max}$  faça
4:    $s \leftarrow \text{GeraçãoSoluçãoInical}()$ 
5:    $s \leftarrow \text{RVND}(s)$ 
6:    $s' \leftarrow \text{EspelharSolução}(s, |T|)$ 
7:    $s' \leftarrow \text{RemoverParadas}(s')$ 
8:   se  $f(s') < f(s^*)$  então
9:      $s^* \leftarrow s'$ 
10:     $f^* \leftarrow f(s')$ 
11:   fim se
12: fim enquanto
13: retorne  $s^*$ ;

```

4.1. Heurística construtiva - SBRP

O procedimento de construção das rotas é inicializado escolhendo uma parada aleatória, dentro do conjunto de paradas candidatas, e adicionando a mesma em uma subrota com a escola. Em seguida, verifica-se a quantidade de alunos que podem ser alocados a parada, sendo este processo realizado de maneira sequencial (a prioridade de alocação segue a ordem de *id* dos estudantes, dada pela instância). Caso a quantidade de estudantes atendidos pela subrota em questão seja menor que C , outra parada aleatória é adicionada, outro subconjunto de estudantes são alocados, e verifica-se novamente a quantidade de alunos alocados à subrota.

Sendo ainda possível adicionar mais estudantes à subrota, a heurística de inserção mais barata é realizada. Neste processo, calcula-se o custo de inserção s_{ij}^k de cada parada $k \in V_p$ ainda não visitada entre cada par (i, j) de nós (escola e paradas) adjacentes na rota em questão através da Equação (16), e o adiciona a uma lista $\mathcal{L}$ juntamente com os nós associados. Após o cálculo de todos os possíveis custos, a lista $\mathcal{L}$ é ordenada com base no custo de inserção, de maneira não-decrescente. A partir daí, seguindo o ordenamento da lista $\mathcal{L}$, as paradas são inseridas caso permita aumentar a quantidade de alunos alocados. Ao final, quando a capacidade do veículo for atendida ou toda a lista tiver sido verificada, a rota é adicionada a solução inicial do SBRP. Este procedimento é repetido até que todos os estudantes tenham sido alocados ou não seja possível atender mais nenhum estudante.

$$s_{ij}^k = d_{ik} + d_{kj} - d_{ij} \quad (16)$$

Por fim, uma verificação da alocação dos estudantes é realizada de maneira exata na solução inicial do SBRP, através do algoritmo de Ford-Fulkerson. Caso seja possível alocar todos os estudantes às suas respectivas rotas, respeitando a capacidade dos veículos, a solução inicial para o SBRP é armazenada em s' . Não sendo possível, uma função de particionamento de rotas é utilizada para redistribuir os estudantes entre as rotas, viabilizando a solução inicial.

4.2. Heurística de busca local - SBRP

A busca local para o SBRP é feita através do RVND, proposto inicialmente por Subramanian [2012], aplicando-se os operadores de vizinhança em ordem aleatória. Para isso, inicialmente são aplicados os operadores intra-rota, até que não seja possível encontrar soluções vizinhas melhores. Em seguida, os operadores inter-rotas são aplicados. Caso um dos operadores inter-rotas encontre uma solução melhor que a solução corrente, aplica-se novamente os operadores intra-rota (apenas nas rotas modificadas). O processo de busca local pelos operadores inter-rotas finaliza quando todos os movimentos forem verificados de maneira exaustiva e não tragam nenhum benefício para a solução atual.

Os operadores utilizados são:

- **Reinsertion (Intra-rota)** - Uma parada é retirada de sua atual posição e inserida em uma nova posição na mesma rota.
- **Swap (Intra-rota)** - Duas paradas da mesma rota trocam, entre si, suas posições na rota.
- **Reinsertion (Inter-rotas)** - Uma parada é retirada de sua atual posição e inserida em uma nova posição em outra rota.
- **Swap (Inter-rotas)** - Duas paradas de rotas diferentes trocam, entre si, suas posições.

4.3. Heurística de remoção de paradas - MP-SBRP

A remoção de paradas é realizada após a solução do SBRP ser obtida e replicada para os períodos analisados. Para cada período $d \in T$, verifica-se a possibilidade de remoção das paradas pertencentes às rotas daquele período, na tentativa de minimizar o custo total das rotas. Para isso, três estratégias de remoção são adotadas, sendo elas:

- **Sequencial:** Nesta estratégia, percorre-se de maneira sequencial as paradas pertencentes a cada rota da solução. Seja i uma parada em análise. Então, verifica-se a possibilidade de realocação dos estudantes da parada i para as demais paradas da mesma rota. Caso seja possível a realocação total dos estudantes da parada i , a parada i é removida.
- **Aleatória:** Semelhante à estratégia anterior, essa estratégia tentará realocar os estudantes para outras paradas da mesma rota, porém a escolha das paradas para verificação é realizada em ordem aleatória.
- **Savings:** De maneira similar às estratégias anteriores, a estratégia de *savings* também irá tentar remover as paradas das rotas por realocação de estudantes, calculando a redução de custo (*saving*) associada a remoção de cada parada e ordenando-as com base neste valor, de maneira decrescente. Assim, verifica-se (e remove-se, se for possível) prioritariamente as paradas que possibilitem maiores reduções de custos.

Vale frisar que, dado que cada estudante deve ser alocado à mesma parada em todos períodos (dias) que tiver demanda, sempre que uma parada i for removida de uma rota do período d , todos os estudantes antes alocados à parada i deverão ser realocados em todos os demais períodos.

5. Experimentos computacionais

Com o propósito de avaliar o algoritmo proposto, experimentos computacionais foram realizados em um computador com processador Intel®Core™i5 de 1.60GHz e com memória RAM de 8 GB, utilizando-se um sistema operacional Windows 10. O algoritmo foi implementado em C++, e adotou-se o parâmetro $I_{max} = 12$ e variando uniformemente as estratégias de remoção das paradas. Para comparação dos resultados, o modelo matemático foi implementado em Julia através do JuMP (*Julia for Mathematical Programming*) e executado com o solver Gurobi (*academic license*) com tempo limite (T.L.) de execução de 600 segundos.

Foram utilizadas 48 instâncias apresentadas inicialmente por Schittekat et al. [2013] e adaptadas para o contexto do *multi-period*, adicionando-se a informação da demanda dos alunos por transporte escolar para um período de 5 dias. Para tanto, dois tipos de demandas foram consideradas:

- Demanda diária – o estudante precisa do transporte todos os períodos considerados; e
- Demanda variável – o estudante não precisa de transporte todos os períodos considerados.

Então, para cada instância de Schittekat et al. [2013] foram adotadas 4 formas distintas de distribuição de demandas (aos estudantes), resultando em 192 instâncias, sendo elas:

1. 100% dos estudantes têm demandas do tipo variável;
2. 25% dos estudantes têm demanda diária e 75% têm demanda do tipo variável;
3. 50% dos estudantes têm demanda diária e 50% têm demanda do tipo variável;
4. 75% dos estudantes têm demanda diária e 25% têm demanda do tipo variável;

Nos casos em que os estudantes possuem demanda variável, os dias das demandas são escolhidos aleatoriamente, considerando distribuição uniforme de probabilidade.

5.1. Resultados preliminares

A Tabela 2 apresenta com detalhes as características das instâncias executadas e os resultados obtidos, dispostos em 13 colunas: ID da instância, número de paradas (n), número de estudantes (m), capacidade dos ônibus (C), distância máxima que um estudante pode caminhar até uma parada (D), média das soluções obtidas com a meta-heurística MS-RVND-R (MH), média dos tempos de execução da meta-heurística em segundos (t_{MH}), média das soluções retornadas pelo modelo matemático (MIP), *lower bound* médio (LB_{MIP}), tempo médio de execução do modelo matemático em segundos (t_{MIP}), quantidade de instâncias nas quais a heurística encontrou soluções com custos menores que as encontradas pelo modelo matemático (*Menor*), quantidade de instâncias nas quais a heurística encontrou soluções com custo iguais às retornadas pelo modelo matemático (*Igual*), quantidade de instâncias nas quais a heurística encontrou soluções com custos maiores que as encontradas pelo modelo matemático (*Maior*) e a variação média entre a solução encontrada pela meta-heurística e a retornada pelo modelo matemático (GAP). Além disso, devido ao tempo limitado de execução do modelo matemático, algumas instâncias retornaram apenas o valor de *lower bound*, sendo o GAP calculado através deste valor representado pelo (i).

Os resultados dispostos na Tabela 2 mostram que a heurística proposta foi capaz de encontrar soluções semelhantes ao modelo matemático em 90 instâncias (aproximadamente 47% do total de instâncias executadas). O algoritmo conseguiu, também, obter um GAP médio menor ou igual a 15% em aproximadamente 69% do conjunto de instâncias executadas, com um esforço computacional inferior ao desempenhado pelo modelo matemático. Por outro lado, o GAP médio acima de 15%

foi obtido em 25% do conjunto de instâncias executadas (desconsiderando as calculadas através do *lower bound*), demonstrando que a meta-heurística proposta apresenta pontos de melhorias a serem trabalhos.

Tabela 2: Resultados computacionais preliminares

ID	n	m	C	D	MH	t_{MH}	MIP	LB_{MIP}	t_{MIP}	Menor	Igual	Maior	GAP
1-4	5	25	25	5	705,03	0,20	705,03	705,03	0,47	0	4	0	0,00%
5-8	5	25	50	5	808,11	0,14	808,11	808,11	0,44	0	4	0	0,00%
9-12	5	25	25	10	906,02	0,16	906,02	906,02	2,28	0	4	0	0,00%
13-16	5	25	50	10	979,02	0,12	979,02	979,02	0,32	0	4	0	0,00%
17-20	5	25	25	20	536,23	0,12	536,23	536,23	1,22	0	4	0	0,00%
21-24	5	25	50	20	515,92	0,12	515,92	515,92	3,32	0	4	0	0,00%
25-28	5	25	25	40	38,15	0,12	38,15	38,15	1,79	0	4	0	0,00%
29-32	5	25	50	40	124,48	0,12	124,48	124,48	5,99	0	4	0	0,00%
33-36	5	50	25	5	1433,40	0,52	1250,78	1250,78	0,69	0	0	4	15,27%
37-40	5	50	50	5	986,00	0,12	986,00	986,00	5,10	0	4	0	0,00%
41-44	5	50	25	10	967,76	0,56	878,22	878,22	5,12	0	0	4	10,20%
45-48	5	50	50	10	1079,28	0,13	1079,28	1079,28	4,46	0	4	0	0,00%
49-52	5	50	25	20	650,64	0,21	647,41	647,41	43,32	0	2	2	0,50%
53-56	5	50	50	20	481,26	0,13	481,26	481,26	29,01	0	4	0	0,00%
57-60	5	50	25	40	64,45	0,20	63,94	57,28	649,71	0	0	4	0,80%
61-64	5	50	50	40	135,64	0,13	133,34	115,38	T.L.	0	0	4	1,98%
65-68	5	100	25	5	1801,73	3,98	1644,52	1644,52	1,61	0	1	3	10,45%
69-72	5	100	50	5	1521,15	1,59	1351,62	1351,62	2,17	0	1	3	13,09%
73-76	5	100	25	10	1471,04	4,91	1132,84	1132,84	227,08	0	0	4	30,70%
77-80	5	100	50	10	1471,05	2,19	1054,00	1054,00	86,44	0	0	4	39,85%
81-84	5	100	25	20	674,77	2,56	607,13	438,55	T.L.	0	0	4	12,16%
85-88	5	100	50	20	831,88	1,73	655,32	655,32	129,62	0	0	4	27,21%
89-92	5	100	25	40	294,74	3,31	253,35	84,23	T.L.	1	0	3	20,86%
93-96	5	100	50	40	181,82	0,98	181,97	157,95	T.L.	1	0	3	0,09%
97-100	10	50	25	5	1286,75	0,48	1185,26	1089,51	T.L.	0	0	4	8,57%
101-104	10	50	50	5	1410,60	0,19	1410,60	1410,60	220,08	0	4	0	0,00%
105-108	10	50	25	10	1221,92	0,56	1189,49	1099,36	T.L.	0	0	4	2,78%
109-112	10	50	50	10	1427,96	0,22	1418,63	1336,04	T.L.	0	0	4	0,68%
113-116	10	50	25	20	511,64	0,40	498,52	379,38	T.L.	0	0	4	2,87%
117-120	10	50	50	20	785,12	0,21	760,21	757,27	325,60	0	1	3	3,38%
121-124	10	50	25	40	158,58	0,28	147,17	83,65	T.L.	0	0	4	7,86%
125-128	10	50	50	40	183,32	0,20	178,18	120,95	T.L.	0	0	4	3,16%
129-132	10	100	25	5	2015,89	6,47	1709,74	1255,61	T.L.	0	0	4	18,91%
133-136	10	100	50	5	1482,64	1,22	1398,34	1192,50	T.L.	0	0	4	6,29%
137-140	10	100	25	10	1931,90	6,98	1658,39	1188,93	T.L.	0	0	4	17,30%
141-144	10	100	50	10	1473,98	1,58	1431,67	1222,08	T.L.	0	0	4	3,00%
145-148	10	100	25	20	874,06	3,38	866,43	459,20	T.L.	2	0	2	10,99%
149-152	10	100	50	20	887,43	1,14	875,30	638,20	T.L.	1	0	3	1,65%
153-156	10	100	25	40	307,47	2,48	379,96	93,78	T.L.	4	0	0	18,47%
157-160	10	100	50	40	167,04	0,76	179,34	112,10	T.L.	2	0	2	7,87%
161-164	10	200	25	5	3676,37	4,93	3203,07	3203,07	7,50	0	1	3	16,83%
165-168	10	200	50	5	2530,30	8,85	2113,46	2113,46	34,70	0	0	4	21,44%
169-172	10	200	25	10	2565,02	5,70	2028,40	1120,20	T.L.	0	0	4	27,95%
173-176	10	200	50	10	2376,05	15,16	2073,76	1398,64	T.L.	0	0	4	15,57%
177-180	10	200	25	20	1736,44	97,40	1502,19	830,74	T.L.	0	0	4	84,47% (i)
181-184	10	200	50	20	1081,42	19,89	1189,26	503,85	T.L.	3	0	1	10,08%
185-188	10	200	25	40	528,06	81,47	386,44	95,58	T.L.	0	0	4	305,48% (i)
189-192	10	200	50	40	279,05	14,48	296,22	115,67	T.L.	3	0	1	32,65% (i)

6. Conclusão e trabalhos futuros

Neste trabalho foi apresentada uma variante *multi-períodos* para o Problema de Roteamento de Ônibus Escolar, denominada de MP-SBRP. Nesta extensão os estudantes podem ter

demandas por transporte escolar em apenas um subconjunto de períodos, devendo-se alocar os estudantes à mesma parada em todos os períodos em que haja demanda. Também foi proposto neste trabalho um algoritmo meta-heurístico (MS-RVND-R) para a resolução de instâncias relacionadas ao MP-SBRP,

Os experimentos computacionais realizados em 192 instâncias, adaptadas das instâncias apresentadas por Schittekat et al. [2013], revelaram que o algoritmo proposto possui um bom desempenho, conseguindo encontrar soluções semelhantes às do modelo matemático em aproximadamente 47% das instâncias executadas, e com um GAP menor ou igual a 15% em aproximadamente 69% do conjunto de instâncias executadas. Entretanto, o mesmo algoritmo obteve um GAP maior que 15% em 25% do conjunto de instâncias testadas, demonstrando a necessidade de melhorarias no algoritmo, e.g., aplicando-se outras estratégias para aumentar a sua eficácia.

Portanto, para trabalhos futuros, propõem-se a implementação de novas estratégias para remoção de paradas e realocação de estudantes, assim como a exploração de outras características ao problema, que não foram consideradas neste trabalho, como: múltiplas escolas, janelas de tempo, carregamento misto e frota heterogênea.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação de Amparo a Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (FACEPE) – Código de Financiamento IBPG-1471-3.08/19.

Referências

- Brasil (1988). Constituição da república federativa do brasil, capítulo iii - da educação, da cultura e do desporto, art. 208. http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao.htm. Acessado: 2021-01-10.
- Brasil (1996). Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/19394.htm. Acessado: 2021-01-10.
- Brasil (2003). Lei nº 10.709, de 31 de julho de 2003. http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/2003/L10.709.htm#art1. Acessado: 2021-01-10.
- Calvete, H. I., Galé, C., Iranzo, J. A., e Toth, P. (2020). A partial allocation local search matheuristic for solving the school bus routing problem with bus stop selection. *Mathematics*, 8(8):1214.
- de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), I. N. (2021). Censo da educação básica 2020. https://download.inep.gov.br/publicacoes/institucionais/estatisticas_e_indicadores/resumo_tecnico_censo_escolar_2020.pdf. Acessado: 2021-01-10.
- Ellegood, W. A., Solomon, S., North, J., e Campbell, J. F. (2020). School bus routing problem: Contemporary trends and research directions. *Omega*, 95:102056.
- Kinable, J., Spieksma, F. C., e Vanden Berghe, G. (2014). School bus routing—a column generation approach. *International Transactions in Operational Research*, 21(3):453–478.
- Komijan, A. R., Ghasemi, P., Khalili-Damghani, K., e HashemiYazdi, F. (2021). A new school bus routing problem considering gender separation, special students and mix loading: A genetic algorithm approach. *Journal of Optimization in Industrial Engineering*, 14(2):39–55.

- Newton, R. M. e Thomas, W. H. (1969). Design of school bus routes by computer. *Socio-Economic Planning Sciences*, 3(1):75–85.
- Park, J. e Kim, B.-I. (2010). The school bus routing problem: A review. *European Journal of operational research*, 202(2):311–319.
- Schittekat, P., Kinable, J., Sörensen, K., Sevaux, M., Spieksma, F., e Springael, J. (2013). A metaheuristic for the school bus routing problem with bus stop selection. *European Journal of Operational Research*, 229(2):518–528.
- Silva Neto, I. C., Bulhões, T., Subramanian, A., Teixeira, E., e Kramer, R. (2020). Um algoritmo heurístico para o problema de roteamento de ônibus escolares. In *Anais do LII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, João Pessoa - PB. SOBRAPO.
- Subramanian, A. (2012). *Heuristic, Exact and Hybrid Approaches for Vehicle Routing Problem*. PhD thesis, Universidade Federal Fluminense, Niterói.