

## COMPARAÇÃO DE FORMULAÇÕES MATEMÁTICAS PARA O PROBLEMA DE POUSO DE AERONAVES

Lorrany Cristina da Silva

André Carlos Ponce de Leon Ferreira de Carvalho

Maristela Oliveira dos Santos

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo

Av. Trab. São Carlsense, 400 - Centro, São Carlos - SP

lorranyc@usp.br

andre@icmc.usp.br

mari@icmc.usp.br

### RESUMO

Com a crescente utilização de transporte aéreo, o gerenciamento de tráfego aéreo tem se tornado cada vez mais complexo. Um dos principais gargalos do gerenciamento é o planejamento da utilização eficiente de pistas para pouso e decolagem. Este trabalho tem como objetivo investigar o Problema de Pouso de Aeronaves que busca minimizar o atraso e o adiantamento no pouso de aeronaves em pistas. Quatro formulações matemáticas da literatura foram consideradas para solucionar o problema, três comparáveis diretamente e outra contendo uma particularidade que não permite uma comparação direta com as demais formulações. Além de comparar e identificar qual das formulações apresenta o melhor desempenho computacional para resolver as instâncias do problema, este estudo analisa a qualidade da solução da última formulação ao considerar um novo conjunto de restrições. O pacote de otimização *Gurobi Optimizer* foi utilizado para os testes computacionais.

**PALAVRAS CHAVE.** Problema de Pouso de Aeronaves, Formulação Matemática, Programação Inteira Mista. OC – Otimização Combinatória, PM – Programação Matemática

### ABSTRACT

Air traffic management has become increasingly complex, with the increasing use of air transport. One of the main bottlenecks in management is planning efficient use of runways for landing and take-off. This work investigates the Aircraft Landing Problem that seeks to minimize the delay and advance landing aircraft on runways. Four mathematical formulations from the literature were considered to solve the problem, three directly comparable and one with a particularity that does not allow a direct comparison with the other three formulations. In addition to compare and identify which of the formulations has the best computational performance to solve the problem instances, this study analyzes the quality of the solution of the fourth formulation when considering a new set of restrictions. The Gurobi Optimizer optimization package is used for computational testing.

**KEYWORDS.** Aircraft Landing Problem. Mathematical Formulations. Mixed Integer Programming. CO – Combinatorial Optimization, MP – Mathematical Programming

## 1. Introdução

Estima-se que no período de 2010 a 2030 a taxa de crescimento anual da utilização do transporte aéreo seja de 5,1% [Ashford et al., 2012], com um aumento da quantidade de atrasos e de cancelamentos de voos. Isso aumenta o interesse em um melhor Gerenciamento de Tráfego aéreo (*Air Traffic Management - ATM*), despertando grande interesse, tanto econômico quanto de segurança de vôo. O controle de decolagem e pouso de aeronaves busca o planejamento do uso da pista de forma cada vez mais eficiente e precisa, não admitindo erros. Assim, este trabalho tem como objetivo investigar o Problema de Pouso de Aeronaves (ALP, do inglês *Aircraft Landing Problem*).

O ALP busca a menor modificação possível no tempo ideal de pouso das aeronaves. Logo, ele visa otimizar os tempos de pousos das aeronaves que chegam na pista dos aeroportos. Para isso, considera-se que cada aeronave possui uma janela do tempo, ou seja, um intervalo de tempo para realizar seu pouso. Além disso, a solução para o problema deve considerar o tempo de separação entre o pouso de uma aeronave e o pouso da próxima. No ALP, pode-se considerar a utilização de uma ou mais pistas para pouso (única ou múltiplas pistas). Entretanto, segundo [Salehipour e Ahmadian, 2017], o esforço computacional para encontrar a solução ótima se torna menor quando utiliza-se múltiplas pistas.

No ATM, o ALP é um dos principais gargalos para o planejamento do uso eficiente da(s) pista(s). Os controladores de voo comumente usam a regra primeira aeronave que chega, será a primeira aeronave a pousar (FCFS, do inglês *First-Come First-Served*). Nesta abordagem, as aeronaves pousam conforme a ordem dos horários de chegada na pista respeitando os tempos de separação mínimos. Segundo [Balakrishnan e Chandran, 2006], o FCFS não é o método ideal para aproveitamento da pista, atraindo assim o desenvolvimento de métodos que buscam otimizar o problema de pouso de aeronaves.

O ALP é considerado um problema NP-Hard [Girish, 2016], ou seja, o esforço computacional para encontrar uma solução ótima cresce exponencialmente com o número de aeronaves. A formulação clássica para o ALP é apresentada em [Beasley et al., 2000]. A partir dela, surgiram variações tanto nas restrições, quanto na função objetivo. Em [Beasley et al., 2000], [Salehipour et al., 2013], [Faye, 2015] e [Ikli et al., 2020] os autores buscam minimizar o atraso e adiantamento de pouso total. Em outros artigos, [Beasley et al., 2001] e [Ji et al., 2016], são consideradas despesas adicionais, como custos indiretos causados por pouso antes ou após o instante de tempo ideal.

Neste artigo são comparadas as formulações propostas por [Beasley et al., 2000], [Salehipour et al., 2013], [Faye, 2015] e [Ikli et al., 2020], aqui chamadas de F1, F2, F3 e F4, respectivamente. Os autores consideram a mesma função objetivo, mas abordam de forma diferente os conjuntos de restrições de separação de tempo de pouso. Vale ressaltar que a F4 possui um conjunto de restrições de deslocamento de posição máxima (CPS, do inglês *Constrained-Position Shifting*), portanto, não diretamente comparável com as anteriores. Também será analisado o impacto na qualidade da solução ao abordar restrições CPS no ALP. Por isso, são testadas duas variações, permitindo o número máximo de deslocamento possível da posição inicial (formulação F4a) e retirando as restrições CPS (formulação F4b), para as devidas comparações com as demais.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. Na Seção 2 encontra-se a descrição do problema e das formulações matemáticas, na Seção 3 são apresentados os experimentos computacionais e as comparações dos resultados obtidos. Por fim, na Seção 4, são discutidos as conclusões obtidas e possíveis trabalhos futuros.

## 2. Problema de Pouso de Aeronaves

O problema de pouso de aeronaves considera o número de aeronaves  $A$ , no qual cada aeronave  $a \in A$  possui um intervalo de tempo para pouso, chamado de janela do tempo. Sendo  $E_a$

o primeiro tempo de pouso da aeronave  $a$ , este corresponde ao horário de pouso caso a aeronave voe na sua velocidade máxima. O tempo ideal de pouso  $T_a$  da aeronave  $a$  é o tempo esperado quando ela voa na velocidade ideal, conhecida como velocidade de cruzeiro. O último tempo de pouso  $L_a$  da aeronave  $a$  é o tempo máximo permitido para manter a aeronave voando antes de pousar. O desvio do pouso de  $T_a$  gera custos extras,  $g_a$  e  $h_a$  que são penalidades ( $\geq 0$ ) para quando a aeronave pousa antes ou depois do  $T_a$ , respectivamente.

Além disso, são considerados tempos de separação entre as aeronaves para a realização de um pouso seguro.  $S_{aa'}$  é o tempo mínimo de separação entre as aeronaves  $a$  e  $a'$  com  $a \neq a'$  e  $s_{aa'}$  é o tempo mínimo de separação entre as aeronaves  $a$  e  $a'$  em diferentes pistas com  $a \neq a'$ . Considerando  $R$  o número de pistas disponíveis, com cada pista  $r \in R$ .

Apresenta-se abaixo as quatro formulações encontradas na literatura, F1, F2, F3 e F4. As três primeiras formulações são comparáveis diretamente, por considerarem o mesmo objetivo. Elas usam a mesma função objetivo de minimizar atrasos e o adiantamentos no pouso das aeronaves e os conjuntos de restrições são equivalentes. A F4 não possui o mesmo conjunto de soluções das três formulações anteriores, por considerar o conjunto de restrições CPS e serão utilizadas neste estudo duas variações dela (F4a e F4b) para as devidas comparações. As formulações apresentam restrições de janela do tempo e de separação. Elas diferem-se, principalmente, em como formulam o conjunto de restrições de separação.

A Tabela 1 apresenta as variáveis de decisão utilizadas nas formulações. Essas variáveis são do tipo binárias e contínuas, sendo que cada formulação usa um dado subconjunto.

Tabela 1: Variáveis de decisão.

Tipo	Variáveis
Binária	$\delta_{aa'}$ : recebe o valor 1 se a aeronave $a$ pousa antes da aeronave $a'$ com $a \neq a'$ , e 0 caso contrário.
	$y_{ar}$ : recebe o valor 1 se a aeronave $a$ pousa na pista $r \in R$ , e 0 caso contrário.
	$z_{aa'}$ : recebe o valor 1 caso as aeronaves $a$ e $a'$ pousem na mesma pista, e 0 caso contrário.
	$\delta_{aa'}^1$ : recebe o valor 1 se a aeronave $a$ pousa antes da aeronave $a'$ na mesma pista com $a \neq a'$ , e 0 caso contrário.
	$\delta_{aa'}^2$ : recebe o valor 1 se a aeronave $a$ pousa antes da aeronave $a'$ em pistas diferentes com $a \neq a'$ , e 0 caso contrário.
	$\delta_{aa'r}$ : recebe o valor 1 se a aeronave $a$ pousa antes da aeronave $a'$ na pista $r$ com $a \neq a'$ e $r \in R$ , e 0 caso contrário.
Contínua	$x_a$ : o tempo de pouso da aeronave $a$ .
	$\alpha_a$ : a quantidade de tempo que a aeronave $a$ pousa antes do $T_a$ .
	$\beta_a$ : a quantidade de tempo que a aeronave $a$ pousa depois do $T_a$ .

A seguir, para ressaltar as diferenças entre as formulações, será apresentada uma formulação em comum. Esta formulação terá a função objetivo (1), comum a todas, e as restrições que todas ou a maioria utilizam (2) a (14).

Minimizar

$$\sum_{a \in A} (g_a \alpha_a + h_a \beta_a) \quad (1)$$

Sujeito a:

$$E_a \leq x_a \leq L_a, \quad \forall a \in A \quad (2)$$

$$\sum_{r \in R} y_{ar} = 1, \quad \forall a \in A \quad (3)$$

$$\delta_{aa'} + \delta_{a'a} = 1, \quad \forall a \in A, \forall a' \in A, a' > a \quad (4)$$

$$z_{aa'} \geq y_{ar} + y_{a'r} - 1, \quad \forall a \in A, \forall a' \in A, a' > a, \forall r \in R \quad (5)$$

$$x_a = T_a - \alpha_a + \beta_a, \quad \forall a \in A \quad (6)$$

$$\alpha_a \geq T_a - x_a, \quad \forall a \in A \quad (7)$$

$$\beta_a \geq x_a - T_a, \quad \forall a \in A \quad (8)$$

$$\delta_{aa'} \in \{0, 1\}, \quad \forall a \in A, \forall a' \in A, a' \neq a \quad (9)$$

$$z_{aa'} \in \{0, 1\}, \quad \forall a \in A, \forall a' \in A, a' \neq a \quad (10)$$

$$y_{ar} \in \{0, 1\}, \quad \forall a \in A, \forall r \in R \quad (11)$$

$$x_a \geq 0, \quad \forall a \in A \quad (12)$$

$$0 \leq \alpha_a \leq T_a - E_a, \quad \forall a \in A \quad (13)$$

$$0 \leq \beta_a \leq L_a - T_a, \quad \forall a \in A \quad (14)$$

A função objetivo (1) busca minimizar o atraso e o adiantamento do horário de pouso das aeronaves. As restrições em (2) indicam a janela do tempo de cada aeronave  $a$  a ser respeitada. Em (3), as restrições asseguram que uma aeronave pouse em apenas uma pista. As restrições em (4) garantem a viabilidade do pouso das aeronaves, ou seja, a aeronave  $a$  pousa antes de  $a'$  ou depois. As restrições em (5) relacionam as variáveis de decisão  $z_{aa'}$  e  $y_{ar}$ , independente de as aeronaves estarem ou não na mesma pista. As restrições em (6), (7) e (8) relacionam as variáveis de decisão  $x_a$  com  $T_a$ ,  $\alpha_a$  e  $\beta_a$  para a linearização da função objetivo. E, por fim, o domínio das variáveis referem-se às restrições em (9) a (14).

## 2.1. Formulação matemática de [Beasley et al., 2000] (F1)

Os autores [Beasley et al., 2000] apresentaram uma formulação para resolver o ALP considerando múltiplas pistas. A F1 é dada pela função objetivo (1), com todas as restrições da formulação comum (2) a (14) mais as restrições em (15) a (18).

$$z_{aa'} = z_{a'a}, \quad \forall a \in A, \forall a' \in A, a' > a \quad (15)$$

$$\delta_{aa'} = 1, \quad \forall (a, a') \in W \cup V \quad (16)$$

$$x_{a'} \geq x_a + S_{aa'}z_{a'a} + s_{aa'}(1 - z_{aa'}), \quad \forall (a, a') \in V \quad (17)$$

$$x_{a'} \geq x_a + S_{aa'}z_{a'a} + s_{aa'}(1 - z_{aa'}) - (L_a + \max(S_{aa'}, s_{aa'}) - E_{a'})\delta_{aa'}, \quad \forall (a, a') \in U \quad (18)$$

As restrições em (15) garantem a simetria, ou seja, se a aeronave  $a$  pousa na mesma pista que  $a'$  então, consequentemente, a aeronave  $a'$  pousa na mesma pista que  $a$ . As restrições de separação estão em (16) a (18), [Beasley et al., 2000] utiliza de três conjuntos distintos de pares de voos. Para o conjunto  $U$ , não se sabe se a aeronave  $a$  pousa antes da aeronave  $a'$ . Este conjunto é definido como  $U = [(a, a') | \forall a \in A, \forall a' \in A, a' \neq a; E_{a'} \leq E_a \leq L_{a'} \vee E_{a'} \leq L_a \leq L_{a'} \vee E_a \leq E_{a'} \leq L_a \vee E_a \leq L_{a'} \leq L_a]$ . No conjunto  $V$ , a aeronave  $a$  pousa antes da aeronave  $a'$ , mas as restrições de separação não são satisfeitas automaticamente, com  $V = [(a, a') | \forall a \in A, \forall a' \in A, a' \neq a; L_a < E_{a'} \wedge L_a + S_{aa'} > E_{a'}]$ . Por fim, o conjunto  $W$  que garante que a aeronave  $a$  pousa antes da aeronave  $a'$  com as restrições de separação totalmente satisfeitas, sendo  $W = [(a, a') | \forall a \in A, \forall a' \in A, a' \neq a; L_a < E_{a'} \wedge L_a + S_{aa'} \leq E_{a'}]$ . Assim, as restrições em (16) asseguram que a aeronave  $a$  pousa antes de  $a'$ . Finalmente, em (17) e (18) são apresentadas as restrições de separação para os conjuntos  $V$  e  $U$ , respectivamente.

## 2.2. Formulação matemática de [Salehipour et al., 2013] (F2)

Em [Salehipour et al., 2013], os autores também propuseram uma formulação para o ALP com múltiplas pistas, que simplifica a F1. A F2 é dada pela função objetivo (1) sujeita às restrições em comum (2) a (12), com as restrições em (19) a (21). Vale ressaltar que nas restrições em (4) e (5), [Salehipour et al., 2013] utilizam  $a \neq a'$ .

$$x_{a'} - x_a \geq S_{aa'} z_{a'a} + s_{aa'}(1 - z_{aa'}) - M\delta_{aa'}, \quad \forall a \in A, \forall a' \in A, a \neq a' \quad (19)$$

$$\alpha_a \geq 0, \quad \forall a \in A \quad (20)$$

$$\beta_a \geq 0, \quad \forall a \in A \quad (21)$$

As restrições (19) referem-se as restrições de separação e as restrições (20) e (21) referem-se ao domínio das variáveis de decisão.

## 2.3. Formulação matemática de [Faye, 2015] (F3)

Em [Faye, 2015] é apresentada uma formulação para o ALP com múltiplas pistas, ligeiramente diferente da F1. A F3 é dada pela função objetivo (1) sujeito as restrições em comum (2), (3), (5), (10), (11) e (12) com as restrições em (22) a (27). [Faye, 2015] calculou a quantidade de tempo de adiantamento e atraso ( $\alpha_a$  e  $\beta_a$ ) diretamente na função objetivo, já substituindo os valores sendo  $(T_a - x_a)$  e  $(x_a - T_a)$ , respectivamente. Além disso, a variável de decisão  $\delta_{aa'}$  foi substituída pelas variáveis  $\delta_{aa'}^1$  e  $\delta_{aa'}^2$  que consideram, respectivamente, o uso da mesma pista e de pistas diferentes.

$$x_{a'} \geq x_a + S_{aa'} + (1 - \delta_{aa'}^1)(-S_{aa'} - L_a + E_{a'}), \quad \forall a \in A, \forall a' \in A, a \neq a' \quad (22)$$

$$x_{a'} \geq x_a + s_{aa'} + (1 - \delta_{aa'}^2)(-s_{aa'} - L_a + E_{a'}), \quad \forall a \in A, \forall a' \in A, a \neq a' \quad (23)$$

$$\delta_{aa'}^1 + \delta_{a'a}^1 = z_{aa'}, \quad \forall a \in A, \forall a' \in A, a < a' \quad (24)$$

$$\delta_{aa'}^2 + \delta_{a'a}^2 = 1 - z_{aa'}, \quad \forall a \in A, \forall a' \in A, a < a' \quad (25)$$

$$\delta_{aa'}^1 \in \{0, 1\}, \quad \forall a \in A, \forall a' \in A, a \neq a' \quad (26)$$

$$\delta_{aa'}^2 \in \{0, 1\}, \quad \forall a \in A, \forall a' \in A, a \neq a' \quad (27)$$

As restrições em (22) e (23) referem-se às restrições de separação para a mesma pista e para pistas diferentes, respectivamente. As restrições em (24) estão relacionadas com as restrições em (22). Se a aeronave  $a$  está na mesma pista que a aeronave  $a'$ ,  $z_{aa'} = 1$  ativa a restrição e se  $z_{aa'} = 0$  desativa. O mesmo vale para as restrições em (25), relacionadas com as restrições em (23) para pistas diferentes. Por fim, as restrições de (26) e (27) representam os domínios das variáveis de decisão.

## 2.4. Formulação matemática de [Ikli et al., 2020](F4)

Em [Ikli et al., 2020] é proposta uma formulação para o ALP considerando múltiplas pistas e restrições CPS. Estas restrições estipulam que uma dada aeronave seja desviada um número  $m$  de posições antes ou depois da sua posição inicial de pouso. Segundo [Balakrishnan e Chandran, 2006], a vantagem de adicionar restrições CPS é permitir que as aeronaves não desviem muito da ordem inicial. Além disso, os autores sugerem utilizar  $m$  variando de 1 a 3 para ser justa na definição da ordem de pouso.

A F4 é representada pela função objetivo (1), sujeita às restrições em comum (2), (3), (4), (6), (9), (11), (12), (13) e (14), com as restrições em (28) a (34). É possível observar que, nesta

formulação, a variável de decisão  $z_{aa'}$  não é utilizada e sim, a variável  $\delta_{aa'r}$ , já considerando a pista  $r \in R$ .

$$\sum_{r \in R} (\delta_{aa'r} + \delta_{a'ar}) \leq 1 \quad \forall a \in A, \forall a' \in A, a < a' \quad (28)$$

$$\delta_{aa'r} + \delta_{a'ar} \geq y_{ar} + y_{a'r} - 1 \quad \forall a \in A, \forall a' \in A, a < a', \forall r \in R \quad (29)$$

$$2(\delta_{aa'r} + \delta_{a'ar}) \leq y_{ar} + y_{a'r} \quad \forall a \in A, \forall a' \in A, a < a', \forall r \in R \quad (30)$$

$$x_{a'} \geq x_a - M(1 - \delta_{aa'}) \quad \forall a \in A, \forall a' \in A, a \neq a' \quad (31)$$

$$x_{a'} \geq x_a + S_{aa'} - M(1 - \delta_{aa'r}) \quad \forall a \in A, \forall a' \in A, a \neq a', \forall r \in R \quad (32)$$

$$a - m \leq N + \sum_{a \in A, a' \neq a} \delta_{aa'} \leq a + m \quad \forall a \in A \quad (33)$$

$$\delta_{aa'r} \in \{0, 1\} \quad \forall a \in A, \forall a' \in A, a \neq a', \forall r \in R \quad (34)$$

As restrições em (28) fortalecem as ordens de precedência das aeronaves na pista e as restrições em (29) e (30) relacionam as variáveis  $\delta_{aa'r}$  e  $y_{ar}$ . As restrições de separação em (31) estão relacionadas a ordem de tempo de pouso das aeronaves. As restrições de separação em (32) garantem que o tempo de separação das aeronaves seja respeitado no pouso em uma mesma pista. As restrições em (33) são as relacionadas ao CPS e as restrições de domínios das variáveis em (34).

A F4 não é diretamente comparável com as outras três formulações, mesmo utilizando a mesma função objetivo, por possuir restrições CPS. Estas restrições limitam o número de mudanças na posição inicial de pouso de cada aeronave, ou seja, um menor desvio do sequenciamento inicial, diminuindo o espaço de soluções possíveis. Assim, para as devidas comparações com as formulações F1, F2 e F3, modificamos a F4. A F4a possui o relaxamento das restrições CPS, usando  $m = A - 1$ . Dessa forma, cada aeronave pode deslocar todas as possibilidades da sua posição inicial. Já na F4b retira-se as restrições CPS. Isso permite uma comparação mais justa destas formulações (F4a e F4b) com as demais, que não utilizam restrições CPS e que consideram as restrições de separação de uma forma diferente.

### 3. Resultados Computacionais

Nesta seção são apresentados os resultados computacionais obtidos com as formulações de [Beasley et al., 2000] (F1), [Salehipour et al., 2013] (F2), [Faye, 2015] (F3) e [Ikli et al., 2020] (F4), além de suas duas variações F4a e F4b. As formulações foram codificadas na linguagem C++ utilizando o *framework* para B&C presente no pacote de otimização *Gurobi Optimizer* versão 9.0. Os testes computacionais foram realizados em um computador com processador Intel Core i7-7500U de 2,70 GHz, 16 GB de memória RAM e sistema operacional Linux Ubuntu 16.04 LTS. Como critério de parada foram atribuídos para cada instância 3.600 segundos como tempo limite total para a execução do B&C.

Os testes consideraram 13 instâncias<sup>1</sup> de [Beasley, 1990] com o número de aeronaves ( $A$ ) variando de 10 a 500. Além disso, cada instância possui o primeiro tempo de pouso ( $E_a$ ), o tempo ideal ( $T_a$ ), o último tempo de pouso ( $L_a$ ), as penalidades de custo ( $g_a$  e  $h_a$ ) para cada aeronave  $a$  e o tempo mínimo de separação ( $S_{aa'}$ ) entre as aeronaves  $a$  e  $a'$ . O tempo de separação  $s_{aa'}$  entre as aeronaves em pistas diferentes foi considerado como zero, conforme encontrado na literatura. O número de pistas  $R$  foi atribuído até o valor da função objetivo ser igual a zero, ou seja, não tendo atraso nem adiantamento nos voos. O valor para  $M$  sendo o menor valor possível igual a  $L_a + S_{aa'} - E_{a'}$  e  $m = 3$  na F4, permitindo que cada aeronave só desvie três posições da sua posição inicial.

<sup>1</sup><http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/orlib/airlandinfo.html>

### 3.1. Resultados computacionais das formulações de [Beasley et al., 2000] (F1), [Salehipour et al., 2013] (F2) e [Faye, 2015] (F3)

Inicialmente, as comparações foram feitas com as formulações F1, F2 e F3. Estas se tornam mais adequadas por utilizarem a mesma função objetivo e também as mesmas restrições para obter o sequenciamento da ordem de pouso das aeronaves. A Tabela 2 apresenta o nome das 13 instâncias, a quantidade de aeronaves (*A*) e o número de pistas (*R*), que varia de 1 até o número necessário para que não ocorram atrasos e adiantamentos nos voos para as três primeiras formulações. Além disso, também encontra-se na Tabela 2 o valor da solução de cada formulação, o tempo gasto em segundos e o GAP reportado pelo *Gurobi Optimizer* em porcentagem.

Tabela 2: Resultados computacionais das formulações de [Beasley et al., 2000] (F1), [Salehipour et al., 2013] (F2) e [Faye, 2015] (F3).

Instâncias	A	R	Formulação F1			Formulação F2			Formulação F3		
			Valor da Solução	Tempo(s)	GAP(%)	Valor da Solução	Tempo (s)	GAP(%)	Valor da Solução	Tempo (s)	GAP(%)
Airland1	10	1	700,00	0,02	0,00	700,00	0,02	0,00	700,00	0,02	0,00
		2	90,00	0,01	0,00	90,00	0,02	0,00	90,00	0,02	0,00
		3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00
Airland2	15	1	1.480,00	0,08	0,00	1.480,00	0,09	0,00	1.480,00	0,10	0,00
		2	210,00	0,02	0,00	210,00	0,03	0,00	210,00	0,03	0,00
		3	0,00	0,01	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,03	0,00
Airland3	20	1	820,00	0,03	0,00	820,00	0,03	0,00	820,00	0,04	0,00
		2	60,00	0,02	0,00	60,00	0,03	0,00	60,00	0,07	0,00
		3	0,00	0,01	0,00	0,00	0,02	0,00	0,00	0,03	0,00
Airland4	20	1	2.520,00	0,58	0,00	2.520,00	0,60	0,00	2.520,00	0,72	0,00
		2	640,00	1,94	0,00	640,00	2,06	0,00	640,00	0,93	0,00
		3	130,00	0,06	0,00	130,00	0,11	0,00	130,00	0,11	0,00
		4	0,00	0,01	0,00	0,00	0,02	0,00	0,00	0,07	0,00
Airland5	20	1	3.100,00	3,34	0,00	3.100,00	3,02	0,00	3.100,00	6,39	0,00
		2	650,00	0,48	0,00	650,00	1,23	0,00	650,00	1,87	0,00
		3	170,00	0,08	0,00	170,00	0,12	0,00	170,00	0,22	0,00
		4	0,00	0,01	0,00	0,00	0,02	0,00	0,00	0,05	0,00
Airland6	30	1	24.442,00	0,00	0,00	24.442,00	0,00	0,00	24.442,00	0,00	0,00
		2	554,00	0,07	0,00	554,00	0,09	0,00	554,00	0,09	0,00
		3	0,00	0,01	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,01	0,00
Airland7	44	1	1.550,00	0,09	0,00	1.550,00	0,09	0,00	1.550,00	0,13	0,00
		2	0,00	0,01	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,02	0,00
Airland8	50	1	1.950,00	0,34	0,00	1.950,00	0,29	0,00	1.950,00	0,36	0,00
		2	135,00	0,18	0,00	135,00	0,30	0,00	135,00	0,54	0,00
		3	0,00	0,09	0,00	0,00	0,12	0,00	0,00	0,20	0,00
Airland9	100	1	5.651,30	3.600,00	26,90	5.611,70	3.600,00	25,80	5.611,99	3.600,00	23,30
		2	444,10	0,69	0,00	444,10	20,78	0,00	444,10	7,12	0,00
		3	75,75	0,26	0,00	75,75	0,37	0,00	75,75	0,50	0,00
		4	0,00	0,15	0,00	0,00	0,21	0,00	0,00	0,24	0,00
Airland10	150	1	12.627,74	3.600,00	51,00	12.925,83	3.600,00	53,10	12.726,27	3.600,00	51,90
		2	1.143,70	250,62	0,00	1.143,70	3.600,00	26,70	1.143,70	68,88	0,00
		3	205,21	1,38	0,00	205,21	9,50	0,00	205,21	37,41	0,00
		4	34,22	0,46	0,00	34,22	0,67	0,00	34,22	0,91	0,00
		5	0,00	0,39	0,00	0,00	0,46	0,00	0,00	0,71	0,00
Airland11	200	1	12.626,60	3.600,00	34,80	12.794,59	3.600,00	33,60	12.671,87	3.600,00	33,50
		2	1.330,91	3.600,00	6,50	1.335,95	3.600,00	31,80	1.330,91	541,39	0,00
		3	253,07	3,33	0,00	253,07	18,19	0,00	253,07	3,64	0,00
		4	54,53	0,80	0,00	54,53	1,15	0,00	54,53	1,47	0,00
		5	0,00	0,47	0,00	0,00	0,78	0,00	0,00	1,00	0,00
Airland12	250	1	17.065,30	3.600,00	43,50	16.737,56	3.600,00	41,10	16.563,68	3.600,00	41,90
		2	1.695,62	3.600,00	11,10	1.695,62	3.600,00	31,10	1.695,62	3.600,00	6,20
		3	221,97	17,71	0,00	221,97	4,48	0,00	221,97	5,39	0,00
		4	2,44	1,03	0,00	2,44	1,52	0,00	2,44	2,52	0,00
		5	0,00	0,77	0,00	0,00	1,16	0,00	0,00	3,86	0,00
Airland13	500	1	39.902,67	3.600,00	51,40	39.778,89	3.600,00	51,00	39.969,76	3.600,00	51,30
		2	3.923,41	3.600,00	22,00	3.957,66	3.600,00	50,40	3.926,21	3.600,00	14,30
		3	673,85	3.600,00	37,40	673,85	3.600,00	48,20	673,85	1.746,41	0,00
		4	89,95	5,12	0,00	89,95	5,30	0,00	89,95	6,65	0,00
		5	0,00	3,02	0,00	0,00	4,24	0,00	0,00	8,12	0,00
Média:			667,22	5,81		736,27	8,02		564,25	4,54	

Para os resultados obtidos, as três formulações conseguiram encontrar a solução ótima (GAP igual a 0%) para as oito primeiras instâncias (Airland1 a Airland8), que totalizam 25 instâncias

com a variação de pistas  $R$ . Visto que elas correspondem a no máximo 50 aeronaves, as formulações matemáticas possuem menos variáveis e restrições. Assim, o tempo computacional é relativamente pequeno ( $\leq 6,39$  segundos) comparado ao gasto pelas demais instâncias com um número maior de aeronaves. Nas instâncias Airland9 a Airland13, o número de aeronaves é maior, variando de 100 a 500, o que dificulta a resolução por métodos exatos. Vale ressaltar que a dificuldade computacional aumenta de acordo com o aumento do número de aeronaves. Adicionalmente, observou-se a diminuição do esforço computacional quando se aumenta a quantidade de pistas disponíveis para pouso.

### 3.2. Resultados computacionais de [Ikli et al., 2020] (F4) e suas variações (F4a e F4b)

Nesta seção, comparamos o impacto ao considerar as restrições no ALP (F4), analisar as soluções relaxando as restrições CPS (F4a), usando  $m = A - 1$ , e retirando-as (F4b) para uma comparação direta com as demais. A Tabela 3 apresenta o valor da melhor solução obtido na comparação entre F1, F2 e F3, e o valor da solução, tempo de execução e GAP encontrados pela formulação F4. A diferença percentual foi calculada pela diferença do valor entre a solução obtida por F4 e a melhor solução entre as três outras formulações, dividido pelo valor da solução obtida por F4 multiplicado por 100. A Tabela 3 também apresenta os resultados obtidos de F4a e F4b.

Tabela 3: Resultados computacionais com a formulação de [Ikli et al., 2020] (F4) e suas variações (F4a e F4b).

Instâncias	A	R	Formulação F4				Diferença (%)	Formulação F4a			Formulação F4b		
			Melhor Solução	Valor da Solução	Tempo (s)	GAP(%)		Valor da Solução	Tempo (s)	GAP(%)	Valor da Solução	Tempo (s)	GAP(%)
Airland1	10	1	700,00	<b>16.050,00</b>	0,32	0,00	95,64	<b>700,00</b>	0,06	0,00	<b>700,00</b>	0,03	0,00
		2	90,00	<b>12.330,00</b>	9,62	0,00	99,27	<b>90,00</b>	0,03	0,00	<b>90,00</b>	0,04	0,00
		3	0,00	<b>11.160,00</b>	9,89	0,00	100,00	<b>0,00</b>	0,02	0,00	<b>0,00</b>	0,02	0,00
Airland2	15	1	1.480,00	<b>23.830,00</b>	4,05	0,00	93,79	<b>1.480,00</b>	0,15	0,00	<b>1.480,00</b>	0,14	0,00
		2	210,00	<b>17.860,00</b>	648,41	0,00	98,82	<b>210,00</b>	0,15	0,00	<b>210,00</b>	0,13	0,00
		3	0,00	<b>15.970,00</b>	1.937,03	0,00	100,00	<b>0,00</b>	0,02	0,00	<b>0,00</b>	0,02	0,00
Airland3	20	1	820,00	<b>24.530,00</b>	10,44	0,00	96,66	<b>820,00</b>	0,07	0,00	<b>820,00</b>	0,06	0,00
		2	60,00	<b>20.580,00</b>	639,64	0,00	99,71	<b>60,00</b>	0,11	0,00	<b>60,00</b>	0,10	0,00
		3	0,00	<b>19.790,00</b>	3.600,00	3,50	100,00	<b>0,00</b>	0,04	0,00	<b>0,00</b>	0,04	0,00
Airland4	20	1	2.520,00	<b>37.940,00</b>	138,08	0,00	93,36	<b>2.520,00</b>	0,94	0,00	<b>2.520,00</b>	0,93	0,00
		2	640,00	<b>27.980,00</b>	3.600,00	15,40	97,71	<b>640,00</b>	2,48	0,00	<b>640,00</b>	4,14	0,00
		3	130,00	<b>25.290,00</b>	3.600,00	6,40	99,49	<b>130,00</b>	1,07	0,00	<b>130,00</b>	2,57	0,00
		4	0,00	<b>24.500,00</b>	3.600,00	3,30	100,00	<b>0,00</b>	0,05	0,00	<b>0,00</b>	0,09	0,00
Airland5	20	1	3.100,00	<b>45.180,00</b>	353,44	0,00	93,14	<b>3.100,00</b>	5,02	0,00	<b>3.100,00</b>	4,59	0,00
		2	650,00	<b>35.150,00</b>	3.600,00	15,00	98,15	<b>650,00</b>	4,28	0,00	<b>650,00</b>	3,46	0,00
		3	170,00	<b>32.780,00</b>	3.600,00	9,60	99,48	<b>170,00</b>	0,82	0,00	<b>170,00</b>	3,26	0,00
		4	0,00	<b>31.670,00</b>	3.600,00	5,20	100,00	<b>0,00</b>	0,05	0,00	<b>0,00</b>	0,05	0,00
Airland6	30	1	24.442,00	<b>24.442,00</b>	0,00	0,00	<b>0,00</b>	<b>24.442,00</b>	0,00	0,00	<b>24.442,00</b>	0,00	0,00
		2	554,00	<b>563,00</b>	2,92	0,00	1,60	<b>554,00</b>	1,51	0,00	<b>554,00</b>	1,53	0,00
		3	0,00	<b>0,00</b>	0,04	0,00	<b>0,00</b>	<b>0,00</b>	0,04	0,00	<b>0,00</b>	0,04	0,00
Airland7	44	1	1.550,00	<b>1.550,00</b>	0,11	0,00	<b>0,00</b>	<b>1.550,00</b>	0,10	0,00	<b>1.550,00</b>	0,11	0,00
		2	0,00	<b>0,00</b>	0,06	0,00	<b>0,00</b>	<b>0,00</b>	0,06	0,00	<b>0,00</b>	0,07	0,00
Airland8	50	1	1.950,00	<b>93.965,00</b>	3.600,00	24,90	97,92	<b>1.950,00</b>	0,55	0,00	<b>1.950,00</b>	0,60	0,00
		2	135,00	<b>83.290,00</b>	3.600,00	29,60	99,84	<b>135,00</b>	2,93	0,00	<b>135,00</b>	2,98	0,00
		3	0,00	<b>81.985,00</b>	3.600,00	27,80	100,00	<b>0,00</b>	0,22	0,00	<b>0,00</b>	0,22	0,00
Airland9	100	1	5.611,70	<b>7.511,19</b>	3.600,00	18,80	25,29	5.611,70	3.600,00	28,16	5.611,70	3.600,00	28,15
		2	444,10	<b>2.400,10</b>	3.600,00	22,60	81,50	<b>444,10</b>	394,20	0,00	<b>444,10</b>	393,19	0,00
		3	75,75	<b>1.862,95</b>	3.600,00	7,20	95,93	<b>75,75</b>	28,95	0,00	<b>75,75</b>	29,08	0,00
		4	0,00	<b>1.733,32</b>	2.783,32	0,00	100,00	<b>0,00</b>	1,08	0,00	<b>0,00</b>	1,06	0,00
Airland10	150	1	12.627,74	<b>14.193,65</b>	3.600,00	51,00	11,03	12.797,06	3.600,00	53,57	12.650,45	3.600,00	53,46
		2	1.143,70	<b>4.222,96</b>	3.600,00	62,80	72,92	1.157,20	3.600,00	43,64	1.161,34	3.600,00	43,86
		3	205,21	<b>2.869,94</b>	3.600,00	75,40	92,85	205,21	3.600,00	38,37	205,21	3.600,00	38,10
		4	34,22	<b>2.190,51</b>	3.600,00	63,40	98,44	<b>34,22</b>	70,14	0,00	<b>34,22</b>	69,59	0,00
		5	0,00	<b>1.975,09</b>	3.600,00	51,60	100,00	<b>0,00</b>	4,46	0,00	<b>0,00</b>	4,45	0,00
Airland11	200	1	12.626,60	<b>15.248,96</b>	3.600,00	38,40	17,20	12.509,29	3.600,00	37,67	12.501,91	3.600,00	34,03
		2	1.330,91	<b>3.619,68</b>	3.600,00	49,50	63,23	1.609,93	3.600,00	58,83	1.511,24	3.600,00	57,13
		3	253,07	<b>2.055,72</b>	3.600,00	78,50	87,69	253,07	3.600,00	74,71	253,07	3.600,00	73,76
		4	54,53	<b>1.682,81</b>	3.600,00	43,60	96,76	54,53	3.600,00	100,00	54,53	3.600,00	100,00
		5	0,00	<b>1.618,45</b>	1.934,90	0,00	100,00	<b>0,00</b>	6,99	0,00	<b>0,00</b>	6,95	0,00
Airland12	250	1	16.563,68	<b>19.774,97</b>	3.600,00	44,90	16,24	17.105,21	3.600,00	46,97	16.709,65	3.600,00	45,42
		2	1.695,62	<b>10.238,31</b>	3.600,00	80,60	83,44	1.945,99	3.600,00	59,12	2.203,15	3.600,00	66,87
		3	221,97	<b>3.337,17</b>	3.600,00	92,10	93,35	303,85	3.600,00	100,00	303,85	3.600,00	100,00
		4	2,44	<b>2.565,75</b>	3.600,00	74,70	99,90	<b>2,44</b>	35,04	0,00	<b>2,44</b>	34,98	0,00
		5	0,00	<b>2.338,39</b>	3.600,00	66,60	100,00	<b>0,00</b>	10,57	0,00	<b>0,00</b>	10,45	0,00
Airland13	500	1	39.778,89	<b>49.460,82</b>	3.600,00	55,20	19,57	39.503,11	3.600,00	53,29	39.866,18	3.600,00	53,74
		2	3.923,41	<b>3.600,00</b>	3.600,00	-	-	3.600,00	3.600,00	-	3.600,00	3.600,00	-
		3	673,85	<b>10.783,31</b>	3.600,00	100,00	93,75	1.094,52	3.600,00	100,00	1.094,52	3.600,00	100,00
		4	89,95	<b>8.228,31</b>	3.600,00	54,20	98,91	134,65	3.600,00	100,00	134,65	3.600,00	100,00
		5	0,00	<b>6.708,05</b>	3.600,00	39,10	100,00	<b>0,00</b>	147,89	0,00	<b>0,00</b>	147,11	0,00
<b>Média:</b>					2.523,92	27,31	77,35		1.116,74	18,63		1.116,78	18,64

No conjunto de 49 instâncias, a F4 não conseguiu, até o tempo máximo de 3.600 segundos, resolver uma delas, a instância que possui 500 aeronaves e duas pistas (Airland13-2). Encontrou a solução ótima para 17 instâncias (em negrito) e solução viável para as demais 31 instâncias, variando o GAP de 3,30% a 100,00%. O GAP, em média, é de 27,31% e o tempo médio gasto, em segundos, é de 2.523,92.

Como exemplo, consideramos a solução da primeira instância Airland1 com uma pista. A F4 retornou o valor da função objetivo igual a 16.050,00 e as demais formulações igual a 700,00, sendo que todas as formulações encontraram solução ótima para esta instância. O motivo pelo qual a F4 apresentou um valor da função objetivo consideravelmente maior (aproximadamente, 23 vezes) são as restrições de CPS. A sequência de pouso ótima que a F4 retornou foi 3 - 4 - 1 - 2 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10, já as demais formulações a sequência foi 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 1 - 10 - 2. Vale ressaltar que a sequência de F4 não desloca nenhuma aeronave três posições a mais ou a menos que a posição inicial das aeronaves, além do sequenciamento ser bastante diferente do obtido pelas demais formulações.

Pela diferença percentual foi possível analisar como as restrições CPS pioraram os valores da função objetivo. Das 49 instâncias, a diferença igual 0,00%, ou seja, o valor da solução igual sem considerar as restrições CPS, foi encontrada em apenas 4 delas. Em média, esta diferença no valor da solução é de 77,35%. Logo, a F4 restringiu as possibilidades de solução, com comportamento diferente dos apresentados pelas demais formulações. Isso ocorreu por ter considerado um número máximo de deslocamento da posição inicial. Adicionalmente, também exigiu um maior esforço computacional. Porém, ao observar o efeito do uso de CPS, nota-se uma melhora na sequência FCFS e no rendimento da pista.

As duas variações F4a e F4b encontraram soluções comparáveis com as encontradas pelas formulações F1, F2 e F3, mas com pior desempenho. Não acharam solução para uma instância no tempo máximo de execução, a solução ótima foi encontrada para 34 instâncias (em negrito) das 49 analisadas e solução factível para 14 instâncias. Além disso, os resultados encontrados em relação ao tempo computacional, variação e média do GAP foram praticamente os mesmos para as duas variações.

### 3.3. Comparação geral dos resultados computacionais

A Tabela 4 contém o resumo dos resultados dos testes obtidos em 3.600 segundos para todas as formulações analisadas neste artigo.

Tabela 4: Resultados gerais obtidos dos testes computacionais.

Formulação Matemática não Comparável							
	Solução Ótima	Solução Viável	Melhores Soluções	GAP médio	GAP Máximo	GAP Mínimo	Tempo Médio
<b>Formulação F4</b>	17 instâncias	31 instâncias	-	27,31%	100,00%	3,30%	2.523,92 segundos
Formulações Matemáticas Comparáveis							
	Solução Ótima	Solução Viável	Melhores Soluções	GAP médio	GAP Máximo	GAP Mínimo	Tempo Médio
<b>Formulação F1</b>	40 instâncias	9 instâncias	<b>91,84%</b>	5,81%	<b>51,40%</b>	6,50%	667,22 segundos
<b>Formulação F2</b>	39 instâncias	10 instâncias	87,76%	8,02%	53,10%	25,80%	736,27 segundos
<b>Formulação F3</b>	<b>42 instâncias</b>	<b>7 instâncias</b>	89,80%	<b>4,54%</b>	51,90%	<b>6,20%</b>	<b>564,25 segundos</b>
<b>Formulação F4a</b>	34 instâncias	14 instâncias	79,59%	18,63%	100,00%	28,16%	1.116,74 segundos
<b>Formulação F4b</b>	34 instâncias	14 instâncias	79,59%	18,64%	100,00%	28,15%	1.116,78 segundos

A F4 não é comparável diretamente com as demais pelas restrições CPS, por este motivo não temos o percentual de melhores soluções. Entre as formulações comparáveis, a F3 encontrou o maior número de soluções ótimas, ou seja, GAP igual a 0,00%. O GAP percentual médio e o tempo médio em segundos de execução da formulação também foi menor em relação as demais formulações. Porém, a F1 só não encontrou a melhor solução, ou seja, o menor valor quando

comparado com as soluções encontradas pelas outras formulações, em 4 das 49, que corresponde a 91,84% das instâncias (Airland9-1, Airland11-1, Airland12-1 e Airland13-1).

Visto as observações feitas anteriormente e os resultados apresentados na Tabela 4, a F3 se mostrou superior às outras quatro formulações comparáveis neste estudo. Afim de realizar uma análise de desempenho aprimorada, autores como [Dolan e Moré, 2002] propuseram uma ferramenta conhecida como perfis de desempenho (em inglês, *Performance Profiles*) para facilitar a visualização e interpretação dos resultados obtidos em experimentos computacionais por diversas abordagens. A Figura 1 apresenta o desempenho das formulações F1, F2, F3, F4a e F4b, considerando o valor da função objetivo. Para as devidas análises,  $P$  é o conjunto de 49 instâncias,  $S$  são as 5 formulações analisadas e  $t$  é a métrica de avaliação. Assim, a qualidade da solução  $r_{ps}$  é calculada em (35),

$$r_{ps} = \frac{t_{ps}}{\min\{t_{ps} : s \in S\}} \quad (35)$$

ou seja, a solução obtida por cada formulação dividida pelo mínimo valor da solução entre as cinco formulações. Nesta equação,  $t_{ps}$  é o valor da solução pela formulação em  $S$  para resolver a instância  $p$ .

Sendo  $Np$  o número total de instâncias, a probabilidade  $P_s(\tau)$  de que cada formulação seja igual ou melhor a  $\tau$  é dada por:

$$P_s(\tau) = \frac{|p \in P : r_{ps} \leq \tau|}{Np} \quad (36)$$

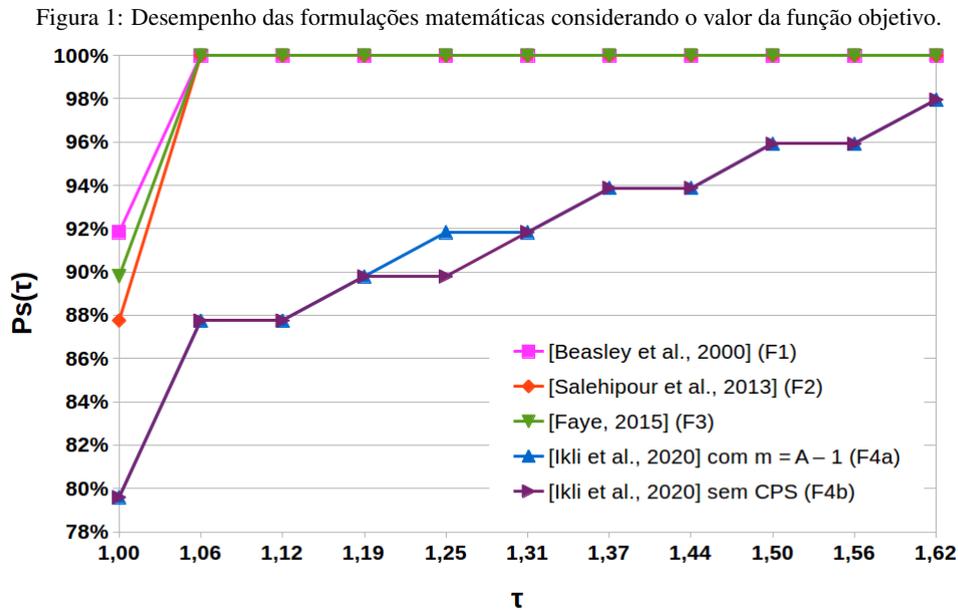
O  $\tau = 1,00$  representa a porcentagem de instâncias que a formulação em  $S$  fornece a melhor/menor solução. Assim, observa-se que, em relação a função objetivo, a formulação F1 possui 91,84% destas soluções em  $\tau = 1,00$ . Isso significa que esta formulação apresentou melhor solução em 45 das 49 instâncias comparadas com as demais formulações. As formulações de F2 e F3 possuem 90,00% das soluções, aproximadamente, já as variações F4a e F4b conseguem quase 80,00% das melhores soluções nas instâncias.

Por fim, podemos concluir que as formulações F1 e F3 são competitivas e demonstraram bons resultados computacionais. A formulação F1 se destacou por possuir a maior quantidade de menores soluções encontradas (91,84%), quando comparada com as demais formulações, já que o problema de pouso de aeronaves tem como objetivo minimizar o atraso e o adiamento dos pousos. Já a formulação F3 destacou-se por apresentar o maior número de soluções ótimas, além de tempo médio e GAP médio percentual menores.

#### 4. Conclusões e Trabalhos Futuros

Neste trabalho foi abordado o Problema de Pouso de Aeronaves (ALP), o qual refere-se a utilização de uma pista quando uma aeronave realiza o pouso e busca minimizar o adiamento e o atraso do pouso das aeronaves. Consideramos quatro formulações matemáticas (F1, F2, F3 e F4) encontradas na literatura e duas variações (F4a e F4b), abordadas para uma comparação mais justa com F1, F2 e F3. Todas foram codificadas na linguagem C++ e resolvidas utilizando B&C, com o intuito de comparação da qualidade das soluções geradas e do desempenho computacional.

Experimentos computacionais foram realizados em 13 instâncias da literatura com 10 a 500 aeronaves. Nestes experimentos, observou-se que a formulação F4 se comporta de maneira diferente das demais por possuir restrições CPS. Esta formulação retornou valores de função objetivo maiores por permitir que cada aeronave desvie um número limitado de posições da sua inicial. Apesar das CPS restringir o conjunto de soluções, elas podem melhorar o sequenciamento FCFS e



ampliar o rendimento da pista. Entre as formulações comparáveis, a F3 se mostrou superior considerando tempo de execução, quantidade de soluções ótimas encontradas e porcentagem de GAP. Entretanto, a F1 também se mostrou competitiva pela análise de desempenho proposta por [Dolan e Moré, 2002] por não encontrar a menor solução em apenas quatro instâncias, quando comparada com as demais formulações.

Os trabalhos futuros estarão concentrados em formular o ALP baseado como problema de máquinas paralelas e *job shop*. Além disso, desenvolver MIP heurísticas para solucionar o ALP considerando um número maior de aeronaves.

**Agradecimentos** Os autores agradecem à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) processo número 2017/21488-2 e processo número 2013/07375-0, pelo apoio financeiro.

## Referências

- Ashford, N., Coutu, P., e Beasley, J. (2012). *Airport Operations*. 3 edition.
- Balakrishnan, H. e Chandran, B. (2006). Scheduling aircraft landings under constrained position shifting.
- Beasley, J. E. (1990). Or-library: Distributing test problems by electronic mail. *The Journal of the Operational Research Society*, 41(11):1069–1072.
- Beasley, J. E., Krishnamoorthy, M., Sharaiha, Y. M., e Abramson, D. (2000). Scheduling aircraft landings—the static case. *Transportation Science*, 34(2):180–197.
- Beasley, J. E., Sonander, J., e Havelock, P. (2001). Scheduling aircraft landings at london heathrow using a population heuristic. *Journal of the Operational Research Society*, 52(5):483–493.
- Dolan, E. e Moré, J. (2002). Benchmarking optimization software with performance profiles. *Mathematical Programming*, 91(2):201 – 213.

- Faye, A. (2015). Solving the aircraft landing problem with time discretization approach. *European Journal of Operational Research*, 242(3):1028 – 1038.
- Girish, B. S. (2016). An efficient hybrid particle swarm optimization algorithm in a rolling horizon framework for the aircraft landing problem. *Applied Soft Computing*, 44:200 – 221.
- Ikli, S., Mancel, C., Mongeau, M., Olive, X., e Rachelson, E. (2020). Coupling Mathematical Optimization and Machine Learning for the Aircraft Landing Problem. In *ICRAT 2020, 9th International Conference for Research in Air Transportation*, ICRAT 2020, Tampa, United States.
- Ji, X.-P., Cao, X.-B., e Tang, K. (2016). Sequence searching and evaluation: a unified approach for aircraft arrival sequencing and scheduling problems. *Memetic Computing*, 8:109–123.
- Salehipour, A. e Ahmadian, M. (2017). A heuristic algorithm for the aircraft landing problem. In *22nd International Congress on Modelling and Simulation*, p. 1344–1349, Hobart - Austrália.
- Salehipour, A., Modarres, M., e Naeni, L. M. (2013). An efficient hybrid meta-heuristic for aircraft landing problem. *Computers Operations Research*, 40(1):207 – 213.