LIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional
João Pessoa - PB, 3 a 5 de novembro de 2021

ALGORITMO ILS APLICADO AO PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO DE CONCENTRADORES COM CUSTO FIXO E ECONOMIA DE ESCALA VARIÁVEL

Nayane Carvalho Freitas [1,2], Elisangela Martins de Sá [2], Marcone Jamilson Freitas Souza [3]

[1]Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Rua Rui Barbosa, 710, Centro, 44380-000, Cruz das Almas, BA, Brasil.

[2] Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Av. Amazonas, 7675, CEP: 30510-000, Belo Horizonte, MG, Brasil

[3] Universidade Federal de Ouro Preto
Campus Universitário, Morro do Cruzeiro, CEP: 35400-000, Ouro Preto, MG, Brasil
nayane.freitas@ufrb.edu.br, elisangelamartins@cefetmg.br, marcone@ufop.edu.br

RESUMO

Este artigo apresenta uma nova formulação matemática para os problemas de localização de concentradores de alocação simples com custo fixo e economia de escala variável e propõe a utilização da meta-heurística Iterated Local Search (ILS) como uma estratégia de resolução. Os problemas de localização de concentradores consistem em determinar a localização de concentradores em uma rede conexa e estabelecer a alocação de nós de demanda aos concentradores de modo a minimizar o custo total da rede. Tais problemas estão presentes nos mais variados campos de aplicação, como nas redes de transporte (aéreo, terrestre e marítimo), rede de telecomunicação, no planejamento regional, dentre outros. Com base nos resultados obtidos, o algoritmo proposto se mostrou capaz de solucionar instâncias do problema de maneira eficiente e satisfatória.

PALAVRAS CHAVE. Problemas de Localização de Concentradores. Economia de Escala Variável. Iterated Local Search.

Tópicos: Logística e Transportes, Metaheurísticas

ABSTRACT

This article presents a new mathematical formulation for the single allocation hub location problem with fixed cost and variable economies of scale and proposes the use of the metaheuristic Iterated Local Search (ILS), as a solution strategy. The hub location problems consist of determining the location of hubs in a connected network and establishing the allocation of demand nodes to the hub in order to minimize the total cost of the network. Such problems are present in the most varied fields of application, such as transport networks (air, land, and sea), telecommunication network, regional planning, among others. Based on the results obtained, the proposed algorithm proved to be able to solve the problem instances efficiently and satisfactorily.

KEYWORDS. Hub Location Problems. Variable Economies of Scale. Iterated Local Search.

Paper topics: Logistics and Transport, Metaheuristics

1. Introdução

Os problemas de localização de concentradores (PLCs) estão presentes em muitas situações de aplicação prática. Todas elas têm em comum que se deve enviar um determinado bem ou produto entre todos os nós de uma rede, porém este envio deve ser realizado necessariamente através de nós especiais denominados concentradores. Os nós concentradores têm a função de agrupar fluxos de demanda, proveniente de diferentes origens, e distribuí-los entre os nós de destinos, ou a outros concentradores que por sua vez possam enviá-los aos seus destinos. Como exemplo de aplicação de problemas de localização de concentradores, podemos citar os serviços de transportadoras, neles as cargas são alocadas a uma central que concentra o fluxo de demanda e fazem a redistribuição para outras centrais visando a redução de custos dado pelo compartilhamento de transportes. Outras situações de aplicação de PLCs são as redes de telecomunicações e de transporte público (ver [Carello et al., 2004], [Kim e O'Kelly, 2009], [Nickel et al., 2001]).

De modo geral, os PLCs dispõem-se de uma rede conexa, onde entre cada par de nós existe um fluxo de produtos que deve ser roteado na rede, e o problema consiste em selecionar os nós nos quais os concentradores serão estabelecidos e atribuir as rotas de envio através dos concentradores, para que o custo total seja mínimo. Redes com essa topologia são chamadas de redes do tipo eixo-raio, em inglês, *hub-and-spoke networks*. Este tipo de rede é projetado visando obter economias de escala através do agrupamento de fluxos nos concentradores que compartilham os custos de transporte. De acordo com Kara e Tansel [2001], as vantagens da utilização de redes eixo-raio são, principalmente, a redução dos custos de transporte em função da economia de escala obtida, diminuição dos custos de instalação, aumento da eficiência logística e melhoria do desempenho do sistema.

Nos problemas clássicos de localização de concentradores, o custo de transporte para atender a uma demanda (fluxos para pares de origem-destino) são frequentemente modelados usando um fator de desconto α, tal que $0 \leq \alpha \leq 1$, nos arcos entre concentradores, para representar as economias de escala. Nesses modelos, presume-se que o mesmo desconto se aplique a todos os arcos entre concentradores na rede, independentemente das diferenças de fluxos que circulam entre eles. No entanto, O'Kelly e Bryan [1998] demonstraram que a suposição de custos independentes do fluxo não apenas calcula incorretamente o custo total da rede, mas também pode selecionar erroneamente a localização dos concentradores e as alocações dos nós não concentradores a estes concentradores. Portanto, eles desenvolvem o primeiro modelo que expressa o fator de desconto nos arcos entre concentradores em função do fluxo, denominado de modelo FLOWLOC. Neste modelo, os autores substituem o fator de desconto constante nos arcos entre concentradores por uma função côncava linear por partes, a qual permite que o valor do desconto dependa do fluxo nessas conexões. Dessa forma, o custo da utilização de um arco entre concentradores passa a depender da quantidade total de fluxo que viaja através dele, com o custo por unidade diminuindo à medida que os fluxos aumentam. Variações e extensões para o modelo FLOWLOC foram propostas por Bryan [1998], dentre as quais o autor incorpora uma função de custo dependente do fluxo também nos arcos entre não concentradores. Assim todos os arcos da rede recebem algum nível de desconto com base no fluxo. Klincewicz [2002] apresenta abordagens de solução para o modelo FLOWLOC utilizando um procedimento de enumeração bem como algumas heurísticas baseadas em busca tabu e procedimentos de busca adaptativa aleatória. Também baseado no modelo FLOWLOC, de Camargo et al. [2009] propõem uma formulação nova e mais forte para o problema de localização de concentradores com alocações múltiplas e sem capacidade e desenvolvem um algoritmo de decomposição de Benders para resolver instâncias com até 50 nós.

Racunica e Wynter [2005] apresentam um modelo de localização de concentradores de

custo côncavo não linear que determina a localização ideal de concentradores de frete intermodais, onde a função de custo modela o desconto aplicado, dependente do fluxo, apenas nos trechos de origem para o concentrador e do concentrador para o destino. Um procedimento de linearização, juntamente com duas heurísticas de redução variável são propostos para a resolução do problema. Cunha e Silva [2007] descrevem um algoritmo genético híbrido para o problema de localização de concentradores aplicado à indústria de caminhões LTL. Para garantir economias de escala, os autores utilizam uma função de custo não linear, que permite que o fator de desconto nos arcos entre concentradores varie de acordo com a quantidade total de carga entre os concentradores.

Lüer-Villagra et al. [2019] apresentam um problema de localização de p-concentradores com alocação única, onde o custo do fluxo em qualquer arco da rede é modelado por diferentes funções (côncavas e convexas) lineares por partes. Para resolver o problema, os autores propõem uma heurística matemática que permite resolver instâncias com até 200 nós e demonstram que o modelo proposto é capaz de representar corretamente a existência (ou não) de economias de escala.

Com base no trabalho de de Camargo et al. [2009], neste artigo, propomos uma nova formulação para o problema de localização de concentradores com alocação simples, não capacitado e com economias de escala variável. Para modelar as reduções de custo obtidas pela consolidação de fluxos nos concentradores, faremos uso de uma função de custo, côncava linear por partes, para caracterizar economias de escalas obtidas pela utilização de arcos entre concentradores. Por se tratar de um problema combinatório NP-difícil, propomos um algoritmo *Iterated Local Search* (ILS) [Lourenço et al., 2003], com busca local usando o procedimento de descida em vizinhança variável randômica (*Randomized Variable Neighborhood Descent* - RVND) [Souza et al., 2010; Subramanian et al., 2010], onde quatro estruturas de vizinhanças são exploradas, em ordem aleatória, como uma forma de resolução heurística para o problema. O desempenho do algoritmo heurístico proposto foi analisado utilizando a base de dados do serviço postal australiano (AP), que é uma base de dados padrão da literatura.

Este artigo está organizado da seguinte forma. A Seção 2 apresenta a descrição do problema e um modelo matemático. A Seção 3 descreve o algoritmo heurístico proposto, enquanto a Seção 4 apresenta os resultados obtidos. Por fim, a Seção 5 apresenta as considerações finais.

2. Caracterização do Problema

Em um problema de localização de concentradores existem vários aspectos a se considerar, tais como:

- Número de concentradores: a quantidade de concentradores a serem localizados pode ser previamente definida com um certo valor p (problema de p-concentradores) ou pode ser obtido na solução do problema.
- Custo fixo para instalação de um concentrador: para esses problemas um custo fixo de instalação de cada concentrador é agregado à função objetivo do problema.
- Tipo de alocação: a alocação pode ser simples ou múltipla, estas configurações se diferenciam na quantidade de concentradores conectados a um nó não concentrador. Quando cada nó não concentrador só pode estar conectado a um concentrador, diremos que se trata de alocação simples. Quando um nó não concentrador pode ser conectado a mais de um concentrador, tem-se um problema com alocação múltipla. A Figura 1 ilustra esses dois casos.
- Restrições de capacidade: existe a possibilidade de impor restrições de capacidades, como exemplo, um limitante no volume de informações que um concentrador consegue transportar, neste caso dizemos que o problema é capacitado.

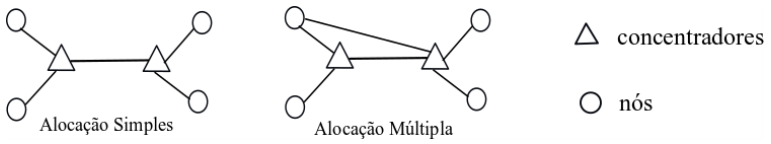


Figura 1: Exemplos de alocação simples e alocação múltipla

Neste trabalho, será abordado o problema de localização de concentradores com alocação simples, com custos fixos e sem restrições de capacidade. A economia de escala é obtida somente nas conexões entre concentradores, dependente da quantidade de fluxo que circula por estes arcos. Além disso, não há possibilidade de ligação direta entre nós não concentradores, ou seja, estaremos admitindo que o fluxo de demanda deve passar por pelo menos um e no máximo dois concentradores. A quantidade de concentradores instalados é uma das variáveis de decisão do problema.

Com base no trabalho de de Camargo et al. [2009], que abordaram o problema com alocação múltipla, apresentamos, a seguir, a notação usada e uma formulação para o problema.

2.1. Descrição e Modelo Matemático do Problema

Sejam N o conjunto de pontos de demanda e K o conjunto de pontos candidatos a se instalar um concentrador, tal que $K \subseteq N$. Para simplificar a notação usaremos os índices i e j para indexar os elementos do conjuntos N e usaremos k e m para indexar os elementos do conjunto K. O problema consiste em localizar os nós nos quais os concentradores serão estabelecidos e realizar a alocação de nós não concentradores aos concentradores, de modo a minimizar o custo total (custo de transporte e custo de instalação de concentradores). Neste trabalho, o custo de transporte nos arcos entre concentradores é modelado utilizando uma função côncava linear por partes para representar economias de escalas devido ao agrupamento de fluxo nos concentradores. Com isso, o valor do desconto nas conexões entre concentradores será dado mediante a quantidade de fluxo que circula entre eles.

Para modelar as funções de custos entre concentradores (k, m), definimos L como um conjunto de funções lineares de custo, onde cada função linear $l \in L$ representa uma faixa de custo. Conforme ilustrado na Figura 2, após um dado limite f^l_{km} de unidades de fluxo, uma nova função linear deve ser ativada com o propósito de promover economias de escala dada pelos fatores de desconto α^l_{km}, os quais diminuem com o aumento da quantidade de unidades que passam pela conexão $k - m$. Para ativar novas faixas de custos, é necessário, no entanto, pagar uma "taxa de instalação" $b^l_{km}c_{km}$, que ocorre no intercepto de duas funções. Desse modo, para cada função linear l, deve-se calcular seu novo intercepto $b^l_{km}c_{km}$ resguardando os valores dos descontos α^l_{km} previamente estabelecidos.

Para construir uma formulação para o problema, considera-se os seguintes parâmetros e variáveis de decisão:

- w_{ij}: demanda a ser enviada do nó i para o nó j, através de pelo menos um concentrador;
- a_k: custo da instalação de um concentrador;
- c_{ik}: custo por unidade de demanda roteada no link $i - k$;
- c_{mj}: custo por unidade de demanda roteada no link $m - j$;
- $b^l_{km}c_{km}$ e $\alpha^l_{km}c_{km}$: são a interceptação (custo fixo) e a inclinação (fator de desconto), da função de custo nos arcos entre os concentradores k e m, respectivamente, para cada parte $l \in L$;

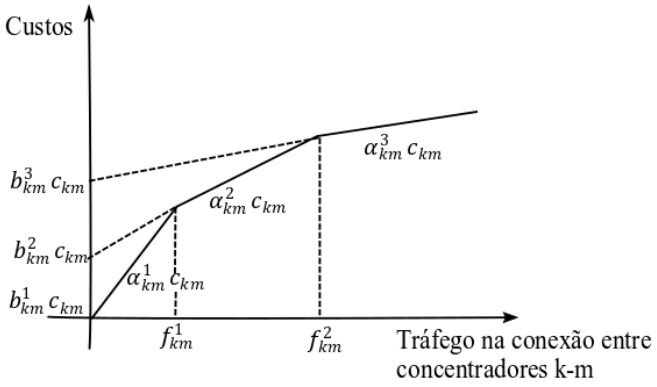


Figura 2: Função de custo linear por partes na conexão entre concentradores k–m. Observe que aumentando a quantidade de fluxos que passam pela conexão, a inclinação das funções lineares diminuem, o que representa o decréscimo do custo unitário de transporte.

- $y_{ik} \in \{0,1\}$: variável binária que recebe o valor 1, se o ponto $i \in N$ é alocado ao concentrador instalado em $k \in K$ e 0, caso contrário. Quando $i = k$ e $y_{kk} = 1$, significa que há um concentrador instalado em k.
- $x^l_{ikmj} \geq 0$: variável correspondente à fração de fluxo que usa a rota $i - k - m - j$ e a faixa de custo l;
- $z^l_{km} \in \{0,1\}$: variável binária que recebe o valor 1, se a parte l for selecionada para modelar os custos no arco entre os concentradores k e m e 0, caso contrário. A ativação desta variável ($z^l_{km} = 1$) indica o uso dos parâmetros de custo b^l_{km} e α^l_{km} no fluxo entre estes concentradores.

A formulação matemática para o problema é dada por:

$$\min \sum_{k\in K} a_k y_{kk} + \sum_{i\in N}\sum_{k\in K}\sum_{m\in K}\sum_{j\in N}\sum_{l\in L} w_{ij}(c_{ik} + \alpha^l_{km}c_{km} + c_{mj})x^l_{ikmj} + \sum_{k\in K}\sum_{m\in K}\sum_{l\in L} b^l_{km}c_{km}z^l_{km} \tag{1}$$

$$s.a.\ \ y_{ik} \leq y_{kk} \qquad \forall i \in N, k \in K, i \neq k \tag{2}$$

$$\sum_{k\in K} y_{ik} = 1 \qquad \forall i \in N \tag{3}$$

$$\sum_{l\in L}\sum_{m\in K} x^l_{ikmj} \leq y_{ik} \qquad \forall i \in N, k \in K, j \in N \tag{4}$$

$$\sum_{l\in L}\sum_{k\in K} x^l_{ikmj} \leq y_{jm} \qquad \forall i \in N, m \in K, j \in N \tag{5}$$

$$\sum_{k\in K}\sum_{l\in L}\sum_{m\in K} x^l_{ikmj} = 1 \qquad \forall i \in N, j \in N \tag{6}$$

$$\sum_{l\in L} z^l_{km} \leq y_{kk} \qquad \forall k \in K, m \in K \tag{7}$$

$$\sum_{l \in L} z_{km}^{l} \leq y_{mm} \qquad \forall k \in K, m \in K \tag{8}$$

$$\sum_{l \in L} z_{ij}^{l} \geq y_{ii} + y_{jj} - 1 \qquad \forall i \in N, j \in N \tag{9}$$

$$z_{ij}^{l} \leq x_{iijj}^{l} \qquad \forall i \in N, j \in N, l \in L \tag{10}$$

$$x_{ikmj}^{l} \leq z_{km}^{l} \qquad \forall i \in N, j \in N, k \in K, m \in K, l \in L \tag{11}$$

$$x_{ikmj}^{l} \geq 0 \qquad \forall i \in N, j \in N, k \in K, m \in K, l \in L \tag{12}$$

$$z_{km}^{l} \in \{0, 1\} \qquad \forall k, m \in K, l \in L \tag{13}$$

$$y_{kk} \in \{0, 1\} \qquad \forall k \in K \tag{14}$$

A função objetivo (1) minimiza o custo total de operação da rede composto pela soma dos custos de instalação e transporte. As restrições (2) permitem a alocação do nó $i \in N$ ao nó $k \in K$ somente se k é um concentrador. As restrições (3) garantem que cada nó possa estar alocado a somente um concentrador. As restrições (4) e (5) asseguram que só existe tráfego passando por um concentrador se o nó de origem ou de destino estiver alocado a este concentrador. As restrições (6) admitem que cada tráfego, referente a demanda w_{ij}, deverá ser atribuído a apenas uma rota. As restrições (7) e (8) garantem que no máximo uma função linear l será selecionada para se calcular o custo de transporte em cada arco, e que esta seleção só é feita se os concentradores k e m forem instalados. As restrições (9) e (10) forçam o arco entre concentradores $i-j$ a transportar a demanda w_{ij} quando i e j são concentradores. As restrições (11) permitem que o tráfego siga pela rota $i-k-m$–j, usando a função de custo linear l, apenas se esta função de custo for selecionada. Por fim, as expressões (12) - (14) são restrições de domínio das variáveis.

3. Algoritmo de Resolução

3.1. Representação da solução

A solução heurística do problema é representada por uma matriz binária $X = (x_{ik})$, com o elemento x_{ik} igual a 1, se o nó i é atribuído ao concentrador k, e 0 caso contrário. Portanto, a matriz indica a localização dos concentradores e a alocação dos nós aos concentradores instalados. A ordem da matriz X é dada pela quantidade de nós em uma dada instância do problema.

3.2. Função de avaliação

Para a avaliar a solução heurística, definimos a seguinte função:

$$f(X) = \sum_{k \in K} a_k x_{kk} + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} w_{ij} \left(\sum_{k \in K} x_{ik} c_{ik} + \sum_{m \in K} x_{jm} c_{jm} \right) + \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} \alpha(X)_{km} c_{km} \Big(\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} w_{ij} x_{ik} x_{jm} \Big) + b(X)_{km} c_{km} \tag{15}$$

em que $\alpha(X)_{km}$ e $b(X)_{km}$ correspondem, respectivamente, à inclinação e ao intercepto da função linear de custo referente ao fluxo $\left(\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} w_{ij} x_{ik} x_{jm} \right)$, que circula na conexão entre os concentradores $k - m$.

3.3. Iterated Local Search (ILS)

A meta-heurística ILS consiste em explorar o espaço de soluções por meio de perturbações em ótimos locais, com o pressuposto de que outros ótimos locais podem ser obtidos, por meio das perturbações, podendo alcançar melhores soluções para o problema. O método basicamente aplica

uma busca local sobre uma solução inicial, a fim de retornar uma solução melhorada; em seguida, é aplicada uma perturbação visando sair desse ótimo local e explorar novas regiões do espaço de soluções. Após a perturbação, uma nova busca local é então aplicada a essa solução perturbada, onde verifica-se se o ótimo local obtido é melhor do que a solução corrente. Portanto, o algoritmo ILS possui quatro principais componentes em sua formulação, são elas: processo de geração inicial da solução, método de busca local, método de perturbação e critério de aceitação. O pseudocódigo do ILS é mostrado no Algoritmo 1.

Algoritmo 1: ILS($X^0, nivel$)

```
1 X ← BuscaLocal(X^0)
2 while critério de parada não satisfeito do
3 |   X' ← Perturbação(X, nivel)
4 |   X'' ← BuscaLocal(X')
5 |   X ← CriterioAceitação(X, X'')
6 end
7 retornar X
```

Para o problema de localização de concentradores estudado neste trabalho, implementamos o ILS da seguinte maneira: inicialmente, geramos uma solução gulosa, instalando apenas dois concentradores e alocando cada cliente ao concentrador mais próximo. Em seguida, aplicamos uma busca local, considerando quatro estruturas de vizinhanças do problema, utilizando o método RVND. O critério de perturbação adotado faz com que a busca local ocorra em diferentes pontos de uma vizinhança estabelecida. O critério de parada definido foi a execução do algoritmo por k vezes, ou seja, k buscas locais e perturbações (iterações), aceitando somente as soluções melhores do que as existentes até então.

O método de busca local e o processo de perturbação aplicado são detalhados a seguir.

3.4. Busca Local RVND

O procedimento de descida em vizinhança variável randômica (RVND) é um método de refinamento que explora o espaço de soluções do problema por meio de trocas sistemáticas de estruturas de vizinhanças seguindo uma ordenação aleatória dessas estruturas. O método consiste em verificar se um ótimo local com relação a uma vizinhança é também ótimo local com relação a uma outra vizinhança distinta. Dessa forma, podemos garantir que a solução retornada pelo RVND será um ótimo local relativamente a todas as vizinhanças exploradas.

O algoritmo RVND é apresentado no Algoritmo 2, ele inicializa gerando uma solução inicial (linha 1). Na linha 2, cria-se uma lista de estruturas de vizinhanças (LV) do problema que serão exploradas. Em seguida, a cada iteração do algoritmo, seleciona-se de maneira aleatória, dentro de LV, uma vizinhança $\mathcal{N}_k$ a ser analisada (linha 4). Dadas uma solução X e essa estrutura de vizinhança $\mathcal{N}_k$ realiza-se uma busca local, aqui usamos a estratégia de busca baseada no melhor vizinho (do inglês, *best improvement*), de acordo com a estrutura de vizinhança escolhida (linha 5). Quando a solução X', encontrada pela busca local, é melhor do que X, então X' passa a ser a solução corrente e a lista de vizinhanças é atualizada recebendo novamente todas as estruturas de vizinhança disponíveis (linhas 6-8). Caso contrário, a estrutura de vizinhança é removida de LV (linha 10). Repetem-se os passos descritos entre as linhas 4 e 11 até que lista de vizinhanças não tenha mais nenhum elemento.

Algoritmo 2: Algoritmo RVND(X^0)

```
1  X ← X^0
2  LV' ← Inicialize a lista de estruturas de vizinhanças
3  LV ← LV'
4  while LV ≠ ∅ do
5  |  Selecione aleatoriamente uma vizinhança N_k de LV
6  |  Selecione o melhor vizinho X' ∈ N_k(X)
7  |  if f(X') < f(X) then
8  |  |  X ← X'
9  |  |  LV ← LV'
10 |  end
11 |  else
12 |  |  LV ← LV \ {N_k}
13 |  end
14 end
15 retornar X
```

Neste trabalho, utilizamos quatro estruturas de vizinhança, admitindo somente movimentos viáveis, isto é, todas as demandas devem ser atendidas e um nó não concentrador deve estar alocado a somente um concentrador. Uma descrição de cada estrutura é apresentada a seguir e uma ilustração de cada uma delas é apresentada na Figura 3.

- Vizinhança de Troca de Alocação ($\mathcal{N}_1$): Conjunto de soluções que podem ser obtidas pela modificação da alocação de um nó não concentrador a um concentrador.
- Vizinhança de Troca de Função ($\mathcal{N}_2$): Conjunto de soluções que podem ser obtidas pela troca de função entre um nó não concentrador e o concentrador ao qual este nó estava alocado, ou seja, o concentrador passa a ser um nó não concentrador e o nó não concentrador passa a ser um concentrador, recebendo todas as alocações do concentrador ao qual estava alocado.
- Vizinhança de Inserção de Concentrador ($\mathcal{N}_3$): Conjunto de soluções que podem ser alcançadas pela inserção de um novo concentrador na solução corrente ao transformar um nó não concentrador em um concentrador
- Vizinhança de Remoção de Concentrador ($\mathcal{N}_4$): Conjunto de soluções que podem ser obtidas pela remoção de um concentrador da solução corrente o transformando em um nó não concentrador.

3.5. Perturbação

Devido ao custo fixo gerado pela instalação de um concentrador, a perturbação é feita usando a Vizinhança de Remoção de Concentrador, denotada por $\mathcal{N}_4$, em que perturbamos a solução corrente removendo um dos seus concentradores instalados e o alocamos ao concentrador mais próximo. Da mesma forma, os nós não concentradores, que estavam alocados ao concentrador removido, são realocados aos concentradores que estiverem mais próximos a estes, esperando, assim, obter uma solução de menor custo. O pseudocódigo do procedimento de perturbação utilizado é

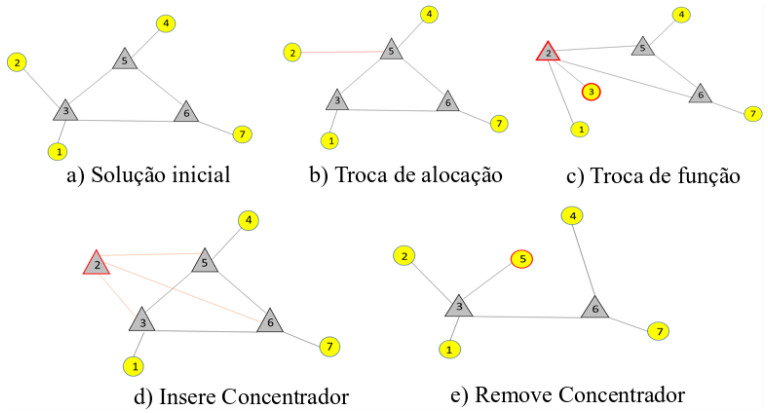


Figura 3: Ilustração das quatro estruturas de vizinhanças. Em vermelho destacamos onde está sendo aplicado o movimento na solução inicial (a).

Algoritmo 3: Perturbação$(X, nivel)$

```
1 X' ← X
2 nmod ← nivel
3 cont ← 1
4 while cont ≤ nmod do
5 |   X' ← SelecioneAleatoriamente(X', N_4)
6 |   cont ← cont + 1
7 end
8 retornar X'
```

apresentado no Algoritmo 3. A função SelecioneAleatoriamente$(X', \mathcal{N}_4)$ consiste em selecionar aleatoriamente uma solução vizinha de X' em relação à estrutura de vizinhança $\mathcal{N}_4$.

Neste algoritmo são passados como parâmetros uma dada solução X e o nível de perturbação, que corresponde à quantidade de modificações que sofrerá a solução corrente X. Na linha 1, X' recebe a solução X. A linha 2 inicializa o número máximo de modificação que será realizada em X'. A linha 3 inicializa o contador do número de modificações. Enquanto o contador não atingir o número máximo de modificações aplica-se um movimento aleatório em X', sobre a estrutura de vizinhança de remoção de concentrador (linhas 4-7). A linha 8 retorna a solução modificada X'.

4. Resultados dos experimentos computacionais

O algoritmo proposto foi implementado em C++, usando o compilador g++ 4.8.2. Os testes foram executados em um computador Dual-Core, CPU 2,3GHz e 2,9GB de memória RAM. O sistema operacional utilizado foi o Ubuntu 18.04.5 64-bits.

As instâncias utilizadas para os testes experimentais são do banco de dados AP, disponíveis em: http://users.monash.edu/∼andrease/Downloads.htm. O conjunto de dados AP possui dois tipos de custos fixos para as instalações de concentradores: *tight* e *loose*. Nas instâncias do tipo *tight*, os custos fixos são mais altos em nós com grandes volumes de fluxo, o que pode tornar o problema mais difícil de ser resolvido, uma vez que dificilmente esses nós serão eleitos concentradores. Já as instâncias do tipo *loose* possuem custos fixos menores o que possibilita a abertura de um número maior de concentradores.

Os testes foram realizados considerando dois tipos de configurações de custos de transporte linear por partes. Na configuração de custos de transporte linear por partes $Conf_1$, atribui-se um desconto de 50% ao custo de transporte entre concentradores, se a quantidade de fluxo que circula nesses arcos for de até 5% da demanda total da rede, e 80% de desconto em caso contrário. Na configuração de custos de transporte linear por partes $Conf_2$, o desconto de 50% é dado se a quantidade de fluxo que circula entre concentradores for interior a 10% da demanda total e 80% caso contrário. A Tabela 1 apresenta as duas funções de custos propostas.

Tabela 1: Características das funções côncavas linear por partes.

	$Conf_1$			$Conf_2$		
Intervalo l	Fluxo no arco $k-m$	α_{km}^l	b_{km}^l	Fluxo no arco $k-m$	α_{km}^l	b_{km}^l
1	$[0, 200)$	0.5	0	$[0, 400)$	0.5	0
2	≥ 200	0.2	60	≥ 400	0.2	120

A fim de avaliar o algoritmo heurístico proposto, utilizamos o resolvedor comercial CPLEX para determinar o valor de função objetivo das soluções ótimas para o problema; porém, para instâncias acima de 20 nós, não foi possível obter soluções por meio desse método exato, por exceder a memória disponível para concluir a execução do algoritmo. A Tabela 2 apresenta os resultados para as instâncias de 10 e 20 nós. Os dados mostrados nas tabelas são: nome da instância (Inst.) que é formado pela quantidade de nós da rede seguida do tipo de custo fixo, em que L representa custos fixos *loose* e T representa os custos fixos *tight*, o valor da solução ótima (Opt) e o tempo de execução (Tempo).

Tabela 2: Resultados obtidos pelo resolvedor comercial CPLEX.

	Loose			*Tight*	
Inst.	Opt	Tempo	Inst.	Opt	Tempo
		$Conf_1$			
10L	54.849.318,28	3,11s	10T	67.080.888,77	3,22s
20L	70.652.662,16	757,12s	20T	82.209.682,86	2979,02s
		$Conf_2$			
10L	54.849.318,28	2,91s	10T	67.322.451,63	3,74s
20L	71.655.693,61	1434,61s	20T	84.209.881,84	1968,16s

As Tabelas 3 e 4 apresentam a média dos resultados obtidos em 10 execuções realizadas para cada instância. Os dados mostrados nas tabelas são: nome da instância, o valor médio da função objetivo da solução heurística (Valor Médio), o tempo médio das 10 execuções do algoritmo (Tempo), por fim, descrevemos o GAP referente ao desvio do valor médio com o melhor valor encontrado nos experimentos. No caso da instâncias com 10 e 20 nós, este melhor valor é o valor de função objetivo da solução ótima. Para as demais instâncias, em que o CPLEX excedeu o limite de memória, o melhor valor se refere ao valor de função objetivo da melhor solução encontrada pelo algoritmo proposto. Para o cálculo do GAP, foi usada a expressão:

$$GAP = 100 \times \frac{(ValorMedio - MelhorValor)}{MelhorValor}$$

A Tabela 3 apresenta os resultados dos experimentos realizados usando a configuração de custos de transporte $Conf_1$ e a Tabela 4 apresenta os resultados considerando-se a configuração de

custos de transporte linear por partes $Conf_2$. Estabelecemos como critério de parada do método proposto, 8 iterações do algoritmo sem apresentar uma melhora na solução corrente.

Tabela 3: Resultados dos experimentos computacionais usando o algoritmo ILS para a $Conf_1$.

Loose				*Tight*			
Inst.	Valor Médio	Tempo	GAP	Inst.	Valor Médio	Tempo	GAP
10L	54.849.318,28	0,511s	0%	10T	67.080.888,77	0,652s	0%
20L	70.652.662,16	11,74s	0%	20T	82.209.682,86	8,22s	0%
25L	70.657.171,38	51,15s	0%	25T	86.664.466,09	12,48s	0%
40L	75.526.390,08	160,28s	0,10%	40T	89.016.334,52	46,44s	0,63%
50L	74.850.482,94	327,77s	0,36%	50T	90.699.396,24	98,55s	0,15%
100L	75.997.016,07	10.482s	0,008%	100T	10.048.2116,30	893,52s	0%

Tabela 4: Resultados dos experimentos computacionais usando o algoritmo ILS para a $Conf_2$.

Loose				*Tight*			
Inst.	Valor Médio	Tempo	GAP	Inst.	Valor Médio	Tempo	GAP
10L	54.849.318,28	0,757s	0%	10T	67.322.451,63	0,634s	0%
20L	71.655.693,61	21,61s	0%	20T	84.218.678,72	18,32s	0,01%
25L	71.251.144,29	50,40s	0%	25T	89.530.545,61	13,38s	0%
40L	77.016.030,18	204,65s	0,005%	40T	91.152.497,45	48,14s	0%
50L	75.413.420,24	478,60s	0%	50T	92.874.231,87	100,33s	0%
100L	77.511.286,58	10.224,5s	0%	100T	101.876.396,83	1.377,35s	0%

Conforme apresentado na Tabela 2, para as instâncias de 10 e 20 nós, as soluções ótimas obtidas via CPLEX também foram encontradas pelo método heurístico, em um tempo computacional significativamente inferior, principalmente, para as instâncias com 20 nós. Além disso, os GAPs apresentados nas Tabelas 3 e 4 mostram que nas dez execuções do método heurístico, as soluções encontradas estão centradas no que chamamos de melhor valor. Quando o GAP é de 0% significa que em todas as dez execuções foram obtidas a mesma solução.

5. Considerações Finais

Conclui-se neste trabalho que o algoritmo proposto é eficiente para obter soluções do problema de localização de concentradores aqui abordado, uma vez que, para pequenas instâncias o método retorna o valor ótimo ou uma solução muito próxima da solução ótima e, além disso, permite encontrar soluções para as instâncias maiores, em tempo computacional aceitável, não solucionáveis por métodos exatos.

Como propostas de trabalho futuro, sugere-se uma calibração para os valores dos parâmetros da heurística e a elaboração de uma análise estatística dos resultados.

Agradecimentos

Os autores agradecem à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES, código de financiamento 001), à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG, processo PPM CEX 0676/17), ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq, processo 303266/2019-8), ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG), à Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB) e à Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP) pelo apoio ao desenvolvimento deste trabalho.

Referências

Bryan, D. (1998). Extensions to the hub location problem: Formulations and numerical examples. *Geographical Analysis*, 30(4):315–330.

Carello, G., Della Croce, F., Ghirardi, M., e Tadei, R. (2004). Solving the hub location problem in telecommunication network design: A local search approach. *Networks: An International Journal*, 44(2):94–105.

Cunha, C. B. e Silva, M. R. (2007). A genetic algorithm for the problem of configuring a hub-and-spoke network for a ltl trucking company in brazil. *European Journal of Operational Research*, 179(3):747–758.

de Camargo, R. S., de Miranda Jr, G., e Luna, H. P. L. (2009). Benders decomposition for hub location problems with economies of scale. *Transportation Science*, 43(1):86–97.

Kara, B. Y. e Tansel, B. Ç. (2001). The latest arrival hub location problem. *Management Science*, 47(10):1408–1420.

Kim, H. e O'Kelly, M. E. (2009). Reliable p-hub location problems in telecommunication networks. *Geographical Analysis*, 41(3):283–306.

Klincewicz, J. G. (2002). Enumeration and search procedures for a hub location problem with economies of scale. *Annals of Operations Research*, 110(1):107–122.

Lourenço, H. R., Martin, O. C., e Stützle, T. (2003). Iterated local search. In Glover, F. e Kochenberger, G. A., editors, *Handbook of Metaheuristics*, p. 320–353. Springer US, Boston, MA.

Lüer-Villagra, A., Eiselt, H. A., e Marianov, V. (2019). A single allocation p-hub median problem with general piecewise-linear costs in arcs. *Computers & Industrial Engineering*, 128:477–491.

Nickel, S., Schöbel, A., e Sonneborn, T. (2001). Hub location problems in urban traffic networks. In *Mathematical methods on optimization in transportation systems*, p. 95–107. Springer.

O'Kelly, M. E. e Bryan, D. (1998). Hub location with flow economies of scale. *Transportation Research Part B: Methodological*, 32(8):605–616.

Racunica, I. e Wynter, L. (2005). Optimal location of intermodal freight hubs. *Transportation Research Part B: Methodological*, 39(5):453–477.

Souza, M. J. F., Coelho, I. M., Ribas, S., Santos, H. G., e Merschmann, L. (2010). A hybrid heuristic algorithm for the open-pit-mining operational planning problem. *European Journal of Operational Research*, 207(2):1041–1051.

Subramanian, A., Drummond, L., Bentes, C., Ochi, L., e Farias, R. (2010). A parallel heuristic for the vehicle routing problem with simultaneous pickup and delivery. *Computers & Operations Research*, 37(11):1899 – 1911.