Limites superiores para a rotulação-L(3,2,1) de grafos com grau máximo três*

Davi Gomes Florencio
Campus Quixadá, Universidade Federal do Ceará (UFC)
Av. José de Freitas Queiroz, 5003, Cedro – 63902-580 – Quixadá – CE – Brazil
davigomesflorencio@alu.ufc.br

Atílio G. Luiz
Campus Quixadá, Universidade Federal do Ceará (UFC)
Av. José de Freitas Queiroz, 5003, Cedro – 63902-580 – Quixadá – CE – Brazil
gomes.atilio@ufc.br

RESUMO

Uma rotulação-$L(3,2,1)$ de um grafo G é uma função $f\colon V(G) \to \{0,1,\ldots,k\}$ tal que, para quaisquer dois vértices $u, v \in V(G)$, $|f(u)-f(v)| \geq 4-d_G(u,v)$, onde $d_G(u,v)$ é a distância entre os vértices u e v em G. O span de uma rotulação-$L(3,2,1)$ f é o maior rótulo k utilizado. O menor span que uma rotulação-$L(3,2,1)$ pode atribuir a um grafo G é chamado número cromático $L(3,2,1)$ e é denotado por $\lambda_{3,2,1}(G)$. Neste trabalho, provamos que $\lambda_{3,2,1}(G) \leq 25$ para todo grafo G com grau máximo 3 sem vértices de grau 3 adjacentes. Além disso, apresentamos um limitante superior mais justo para uma subclasse desta classe de grafos. Provamos também que os snarks-flor J_i com i ímpar e $i \geq 5$ possuem $\lambda_{3,2,1}(J_i) \leq 12$ e que $\lambda_{3,2,1}(J_3) \leq 14$.

PALAVRAS CHAVE. Coloração de Grafos. Rotulação de Grafos. Rotulação-L(3,2,1).

Tópicos: Teoria dos Grafos, Algoritmos Exatos, Limitantes Superiores para $\lambda_{3,2,1}(G)$.

ABSTRACT

An $L(3,2,1)$-labeling of a graph G is a function $f\colon V(G) \to \{0,1,\ldots,k\}$ such that, for any two vertices $u, v \in V(G)$, $|f(u) - f(v)| \geq 4 - d_G(u,v)$, where $d_G(u,v)$ is the distance between u and v in G. The span of an $L(3,2,1)$-labeling f is the largest label k that is assigned by the labeling f to a vertex of G. The smallest span that any $L(3,2,1)$-labeling can assign to a graph G is called $L(3,2,1)$-chromatic number and is denoted by $\lambda_{3,2,1}(G)$. In this work, we prove that $\lambda_{3,2,1}(G) \leq 25$ for every graph G with maximum degree 3 without adjacent vertices of degree 3. In addition, we present a tighter upper bound for a subclass of this class of graphs. We also prove that the flower snarks J_i with odd i and $i \geq 5$ have $\lambda_{3,2,1}(J_i) \leq 12$ and that $\lambda_{3,2,1}(J_3) \leq 14$.

KEYWORDS. Graph Coloring. Graph Labeling. $L(3,2,1)$-labeling.

Topics: Graph Theory, Exact Algorithms, Upperbound for $\lambda_{3,2,1}(G)$

*Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq (Proc. 423833 / 2018-9) e a Pró-Reitoria de Graduação da UFC (PID 202020831)

1. Introdução

Vários problemas de rotulação em grafos encontram suas motivações no *Problema de Atribuição de Canais de Frequência* [Hale, 1980; Král e Skrekovski, 2003; Chartrand et al., 2001]. Estações de rádio FM são caracterizadas pela sua frequência de transmissão, potência irradiada e altura da antena. Essas estações são divididas em classes (E1, E2, etc.) e os orgãos reguladores das telecomunicações exigem que estações de rádio próximas recebam canais de frequências distintos de modo que, quanto mais próximas duas estações forem uma da outra, tanto maior deverá ser a diferença entre os canais atribuídos a cada uma. Dois canais são considerados *primeiro-adjacentes* se suas frequências diferem em 200 kHz, ou seja, se são consecutivos no dial FM. A distância entre duas estações de rádio em canais primeiro-adjacentes deve ser de pelo menos 72 quilômetros. A distância entre duas estações de rádio cujos canais diferem em 400 ou 600 kHz (*segundo ou terceiro adjacentes*) deve ser de pelo menos 31 quilômetros. Este problema pode ser modelado usando grafos de modo que estações de rádio são vértices do grafo e dois vértices são ligados por uma aresta se as estações correspondentes distam entre 31 km e 71 km. Deste modo, atribuímos frequências aos vértices do grafo de modo que: vértices adjacentes recebam frequências que diferem em pelo menos 600kHz; vértices à distância 2 recebam frequências que diferem em pelo menos 400 kHz; e vértices à distância 3 recebam frequências distintas. Neste trabalho, investigamos uma rotulação de grafos que modela o problema da atribuição de canais de frequências: a Rotulação-$L(3,2,1)$.

Uma *rotulação*-$L(3,2,1)$ de um grafo simples G com conjunto de vértices $V(G)$ e conjunto de arestas $E(G)$ é uma função $f\colon V(G) \to \{0,1,\ldots,k\}$ tal que, para quaisquer dois vértices $u, v \in V(G)$, se $d_G(u,v) = 1$, então $|f(u) - f(v)| \geq 3$; se $d_G(u,v) = 2$, então $|f(u) - f(v)| \geq 2$; e se $d_G(u,v) = 3$, então $|f(u) - f(v)| \geq 1$; onde $d_G(u,v)$ é a distância entre dois vértices u e v em G (a *distância* entre u e v é o número de arestas no menor caminho conectando u a v em G). O *span* de uma rotulação-$L(3,2,1)$ f é o maior rótulo k que é atribuído pela rotulação f a um vértice de G. Uma rotulação-$L(3,2,1)$ é dita *ótima* quando possui o menor span possível e o span de tal rotulação é chamado *número cromático* $L(3,2,1)$ e é denotado por $\lambda_{3,2,1}(G)$. A Figura 1 exibe um grafo caminho com uma rotulação-$L(3,2,1)$ ótima.



Figura 1: Grafo com uma rotulação-$L(3,2,1)$ ótima.

A rotulação-$L(3,2,1)$ foi introduzida por Liu e Shao [2004], que a investigaram para grafos planares e mostraram que $\lambda_{3,2,1}(G) \leq 15(\Delta^2 - \Delta + 1)$ se G for planar com grau máximo igual a Δ. Posteriormente, outros autores [Clipperton et al., 2006; Chia et al., 2011] determinaram o número cromático $L(3,2,1)$ de famílias clássicas de grafos, tais como caminhos, ciclos, grafos completos, bipartidos completos, potências de caminho e o produto Cartesiano de dois caminhos. Em particular, Chia et al. [2011] também obtiveram o seguinte limitante superior para o parâmetro $\lambda_{3,2,1}(G)$ de grafos simples G, que ainda permanece como o melhor limitante superior conhecido para $\lambda_{3,2,1}(G)$ de grafos simples arbitrários.

Teorema 1 (Chia et al. [2011])**.** *Se G é um grafo simples, então $\lambda_{3,2,1}(G) \leq \Delta(G)^3 + 2\Delta(G)$.*

O Teorema 1 determina que $\lambda_{3,2,1}(G) \leq 33$ para todo grafo simples G com $\Delta(G) = 3$. Porém, ao investigarmos $\lambda_{3,2,1}(G)$ para classes de grafos G com $\Delta(G) = 3$, não encontramos exemplos que tivessem $\lambda_{3,2,1}(G) = 33$. Esta observação nos motivou a investigar limitantes superiores mais justos para o número cromático $L(3,2,1)$ de familias de grafos com grau $\Delta(G) = 3$.

Neste trabalho, provamos que $\lambda_{3,2,1}(G) \leq 25$ para todo grafo G com $\Delta(G) = 3$ e sem vértices adjacentes de grau máximo. Mostramos também que, se G é um grafo com $\Delta(G) = 3$ no qual quaisquer dois vértices de grau 3 estão à distância pelo menos 4, então $\lambda_{3,2,1}(G) \leq 16$. Além disso, investigamos a família de grafos 3-regulares Snark-Flor, cujos membros são denotados por J_i, com $i \geq 3$ e i ímpar e provamos que $\lambda_{3,2,1}(J_3) \leq 14$ e que $\lambda_{3,2,1}(J_i) \leq 12$ para todo $i \geq 5$ e i ímpar. A próxima seção apresenta conceitos e resultados usados nas demonstrações da Seção 3.

2. Definições e Resultados Auxiliares

Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo simples. Dois vértices $u, v \in V(G)$ são ditos *adjacentes* ou *vizinhos* se $uv \in E(G)$. O *grau*, $d_G(u)$, de $u \in V(G)$ é o número de vizinhos de u. O *grau máximo* de G é definido por $\Delta(G) = \max\{d_G(u) : u \in V(G)\}$. O grafo G é *k-regular* se $d_G(v) = k$ para todo $v \in V(G)$. Um grafo 3-regular é também chamado cúbico. Por sua vez, um grafo G é *subcúbico* se $\Delta(G) = 3$ mas G não é cúbico. Um *(v_0, v_k)-caminho* em G é uma sequência $v_0, v_1, \ldots, v_k$ finita e não vazia de vértices de G, tal que os termos da sequência não se repetem e $v_{i-1}v_i \in E(G)$ para $1 \leq i \leq k$. A *distância* entre dois vértices $u, v \in V(G)$, denotada por $d_G(u, v)$, é o número de arestas em um menor (u, v)-caminho em G.

Um grafo G é *conexo* se existe um (u, v)-caminho em G para quaisquer dois vértices $u, v \in V(G)$. Dado G conexo, uma aresta $e \in E(G)$ é uma *aresta de corte* se sua remoção de G resulta em um grafo não conexo. Um ciclo C_n com $n \geq 3$ vértices em um grafo G, é um (v_0, v_k)-caminho em G tal que $v_0 = v_k$ com $k \geq 3$. Como usual, denotamos por $N_k(v)$ o conjunto dos vértices à distância k de v. Denotamos por $N_k^{d \leq t}(v)$ o conjunto de vértices de G com grau menor ou igual a t que estão à distância exatamente k de v. A *vizinhança estendida* de um vértice $v \in V(G)$ é o conjunto dos vértices que estão à distância no máximo 3 de v.

Seja S um conjunto de cores. Uma *coloração de vértices* $\varphi\colon V(G) \to S$ é uma função que atribui para cada vértice do grafo um elemento do conjunto S. Dizemos que φ é uma *k-coloração* de G, quando $|S| = k$. A coloração φ é dita *própria* quando, para quaisquer dois vértices adjacentes $u, v \in V(G)$, temos que $\varphi(u) \neq \varphi(v)$. O *número cromático* de um grafo G, denotado por $\chi(G)$, é o menor k para o qual G tem uma k-coloração própria de vértices. A seguir, apresentamos dois limitantes superiores para $\chi(G)$ que são usados nas demonstrações dos resultados da Seção 3.

Teorema 2 (West [2018])**.** *Se G é um grafo, então $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Teorema 3 (Brooks [1941])**.** *Se G é um grafo conexo e G não é isomorfo a um ciclo ímpar ou a um grafo completo, então $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Chamamos de *grafo-beta* um grafo simples subcúbico, sem vértices adjacentes de grau máximo, que pode ser obtido a partir do grafo completo K_4 subdividindo cada uma de suas arestas uma ou duas vezes. A seguir, provamos que existem apenas 11 grafos-beta não-isomorfos.

Lema 4. *Existem exatamente onze grafos-beta não-isomorfos.*

Demonstração. Existem exatamente 11 grafos simples não-isomorfos com 4 vértices [West, 2018]. Denotamos esses grafos por $H_1, \ldots, H_{11}$ e os ilustramos na Figura 2. A partir de cada grafo H_i, obtemos um grafo-beta G_i em duas etapas: (i) subdividimos cada aresta de H_i exatamente duas vezes; e (ii) para todo par de vértices não-adjacentes $u, v \in V(H_i)$, adicionamos um novo vértice x_{uv} e duas novas arestas ux_{uv} e $x_{uv}v$, criando assim um caminho $P = ux_{uv}v$ conectando u a v em G_i. Deste modo, obtemos os onze grafos-beta $G_1, \ldots, G_{11}$ exibidos na Figura 3. Reciprocamente, aplicando a construção reversa a que foi usada acima em um grafo-beta, obtemos um grafo H_i. Portanto, existem exatamente 11 grafos-beta não isomorfos. □

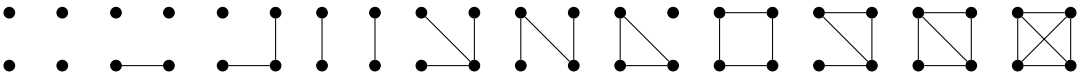

Figura 2: Os únicos grafos simples não-isomorfos com exatamente 4 vértices.

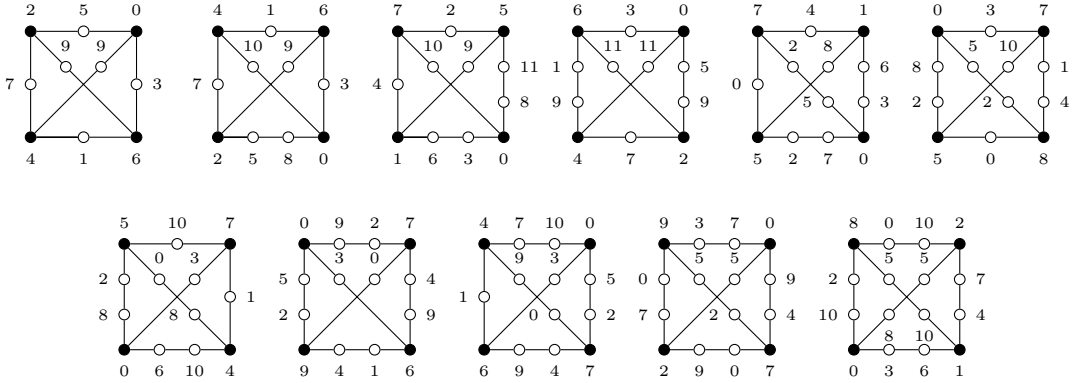

Figura 3: Os onze grafos-beta, cada um com uma rotulação-$L(3,2,1)$ ótima.

3. Resultados

Nesta seção, são apresentados os resultados principais deste trabalho. Porém, é necessário antes apresentarmos algumas definições adicionais. Dizemos que um rótulo ℓ *causa conflito* se a sua atribuição a um vértice do grafo faz com que alguma das condições requeridas para se ter uma rotulação-$L(3,2,1)$ não seja satisfeita. Um rotulo ℓ está *disponível* para um vértice v de G quando sua atribuição a v não causa conflito com os rótulos dos vértices da vizinhança estendida de v.

Teorema 5. *Se G é um grafo subcúbico sem vértices de grau 3 adjacentes, então $\lambda_{3,2,1}(G) \leq 25$.*

Demonstração. Seja G como definido no enunciado. É suficiente supor G conexo. Se G for isomorfo a um dos onze grafos-beta (Lema 4), então ele possui $\lambda_{3,2,1}(G) \leq 11$, como estabelecido pelas rotulações-$L(3,2,1)$ da Figura 3. Portanto, no restante desta demonstração, supomos que G não é isomorfo a nenhum desses onze grafos, já que, para eles, o resultado é válido.

Construímos uma rotulação-$L(3,2,1)$ $f\colon V(G) \to \{0,\ldots,25\}$ para G. Inicialmente, rotulamos os vértices de grau 3 de G. A fim de obter esta rotulação parcial, construímos um grafo auxiliar H. Seja $V_3 \subset V(G)$ o conjunto de vértices de grau 3 de G. Definimos H tal que: $V(H) = V_3$ e $uv \in E(H)$ se e somente se $u, v \in V(H)$, $u \neq v$ e existe um (u,v)-caminho de comprimento 2 ou 3 em G. Pela construção de H, temos que $\Delta(H) \leq \Delta(G) = 3$.

A seguir, provamos que H possui $\chi(H) \leq 3$. Consideramos 3 casos, dependendo se H é um ciclo ímpar, um grafo completo ou nenhum destes dois grafos. Se H é isomorfo a um ciclo ímpar, então $\Delta(H) = 2$. Logo, pelo Teorema 2, $\chi(H) \leq 3$. Sabemos que H não pode ser isomorfo a um grafo completo com mais do que 3 vértices porque $\Delta(H) \leq 3$ e porque G não é um grafo-beta. Se H for isomorfo a K_1, K_2 ou K_3, então, pelo Teorema 2, temos que $\chi(H) \leq 3$. Por fim, no caso em que H não é um ciclo ímpar nem um grafo completo, temos que $\chi(H) \leq 3$ pelo Teorema 3. Deste modo, seja $\varphi\colon V(H) \to \{0,2,4\}$ uma 3-coloração própria dos vértices de H.

Dada a 3-coloração própria de vértices φ do grafo H, defina $f(v) = \varphi(v)$ para todo vértice v de G com $d_G(v) = 3$. Pela definição de H, todo vértice de grau 3 de G é um vértice de

H; logo, a rotulação parcial f é bem-definida. Deste modo, quaisquer dois vértices de grau 3 de G que estiverem à distância 2 ou 3 recebem rótulos distintos cuja diferença absoluta é maior ou igual a 2. Portanto, esta rotulação parcial de G satisfaz as condições da rotulação-$L(3,2,1)$.

A fim de concluir a construção da rotulação f, resta definir os rótulos dos vértices de grau 2 e 1 de G. Rotulamos estes vértices por meio de um algoritmo guloso, descrito a seguir. Seja $v_1, v_2, \ldots, v_k$ uma sequência arbitrária dos vértices de grau 2 e 1 de G. Na i-ésima iteração, o algoritmo guloso atribui ao vértice v_i o menor rótulo $f(v_i)$ pertencente ao conjunto $\mathcal{R} = \{7, 8, \ldots, 25\}$, que ainda estiver disponível para o vértice v_i.

No restante da demonstração, provamos que sempre há um rótulo disponível em $\mathcal{R}$ para v_i. Para isso, contamos quantos rótulos, no máximo, não estão disponíveis para v_i no momento da sua escolha e mostramos que esse número é sempre menor que $|\mathcal{R}|$. Inicialmente, note que cada vértice rotulado $w \in N_1(v_i)$ impossibilita que 5 rótulos sejam atribuídos ao vértice v_i: $f(w)$, $f(w)-1$, $f(w)-2$, $f(w)+1$ e $f(w)+2$. Além disso, cada vértice rotulado $z \in N_2(v_i)$ impossibilita que 3 rótulos sejam atribuídos ao vértice v_i: $f(z)$, $f(z)-1$ e $f(z)+1$. Por fim, cada vértice rotulado $y \in N_3(v_i)$ deve ter um rótulo $f(y)$ diferente do rótulo de v_i. Adicionalmente, lembramos que os vértices de grau 3 já foram rotulados com rótulos do conjunto $\{0, 2, 4\}$ e estes rótulos não conflitam com os rótulos do conjunto $\mathcal{R}$ pois $|\max(\{0,2,4\}) - \min(\mathcal{R})| \geq 3$. Portanto, na contagem dos rótulos não disponíveis para o vértice v_i não consideramos vértices de grau 3; consideramos apenas os vértices de grau 2 e 1 que estão na sua vizinhança estendida. Dividimos a análise em três casos.

Caso 1: $d_G(v_i) = 2$ e v_i pertence a um (u,v)-caminho $P = (u, x_1, x_2, \ldots, x_n, v)$ tal que $d_G(u) = 3$ e $d_G(v) \in \{1, 3\}$ com $u \neq v$ e $d_G(x_i) = 2$, para $1 \leq i \leq n$. Dividimos este caso em mais três subcasos, dependendo da quantidade de vértices de grau 3 na vizinhança estendida de v_i.

Caso 1.1: O vértice v_i possui exatamente dois vértices u e v de grau 3 na sua vizinhança estendida. Há seis subcasos a considerar. **Caso 1.1.1:** $d_G(u, v_i) = d_G(v, v_i) = 3$. Neste caso, $|N_1^{d\leq 2}(v_i)| = 2$ e $|N_2^{d\leq 2}(v_i)| = 2$. Logo, o número de rótulos não disponíveis para v_i é no máximo $5 \cdot |N_1^{d\leq 2}(v_i)| + 3 \cdot |N_2^{d\leq 2}(v_i)| = 5 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 16$. **Caso 1.1.2:** $d_G(u, v_i) = d_G(v, v_i) = 2$. Note que $|N_1^{d\leq 2}(v_i)| = 2$ e $|N_3^{d\leq 2}(v_i)| = 4$. Então, o número de rótulos não disponíveis para v_i é no máximo $5 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 14$. **Caso 1.1.3:** $d_G(u, v_i) = d_G(v, v_i) = 1$. Neste caso, $|N_2^{d\leq 2}(v_i)| = 4$ e $|N_3^{d\leq 2}(v_i)| \leq 4$. Portanto, o número de rótulos não disponíveis para v_i é no máximo $3 \cdot 4 + 1 \cdot 4 = 16$. **Caso 1.1.4:** $d_G(u, v_i) = 3$ e $d_G(v, v_i) = 2$. Neste caso, $|N_1^{d\leq 2}(v_i)| = 2$, $|N_2^{d\leq 2}(v_i)| = 1$ e $|N_3^{d\leq 2}(v_i)| = 2$. Isso implica que no máximo $5 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 15$ rótulos não estão disponíveis para v_i. **Caso 1.1.5:** $d_G(u, v_i) = 3$ e $d_G(v, v_i) = 1$. Neste caso, $|N_1^{d\leq 2}(v_i)| = 1$, $|N_2^{d\leq 2}(v_i)| = 3$ e $|N_3^{d\leq 2}(v_i)| \leq 2$. Isso implica que o número de rótulos não disponíveis para v_i é no máximo $5 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 16$. **Caso 1.1.6:** $d_G(u, v_i) = 2$ e $d_G(v, v_i) = 1$. Neste caso, $|N_1^{d\leq 2}(v_i)| = 1$, $|N_2^{d\leq 2}(v_i)| = 2$ e $|N_3^{d\leq 2}(v_i)| \leq 4$. Isso implica que o número de rótulos não disponíveis para v_i é no máximo $5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 15$. Portanto, concluímos que no máximo 16 rótulos não estão disponíveis para v_i no Caso 1.1.

Caso 1.2: O vértice v_i possui exatamente um vértice u de grau 3 na sua vizinhança estendida. Há três subcasos a considerar. **Caso 1.2.1:** $d_G(u, v_i) = 3$. Neste caso, temos que $|N_1^{d\leq 2}(v_i)| = 2$, $|N_2^{d\leq 2}(v_i)| \leq 2$ e $|N_3^{d\leq 2}(v_i)| \leq 1$. Isso implica que no máximo $5 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 17$ rótulos não estão disponíveis para v_i. **Caso 1.2.2:** $d_G(u, v_i) = 2$. Aqui, $|N_1^{d\leq 2}(v_i)| = 2$, $|N_2^{d\leq 2}(v_i)| \leq 1$ e $|N_3^{d\leq 2}(v_i)| \leq 3$. Então, no máximo $5 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 16$ rótulos não estão disponíveis para v_i. **Caso 1.2.3:** $d_G(u, v_i) = 1$. Agora, $|N_1^{d\leq 2}(v_i)| = 1$, $|N_2^{d\leq 2}(v_i)| \leq 3$ e $|N_3^{d\leq 2}(v_i)| \leq 3$. Logo, no máximo $5 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 17$ rótulos não estão disponíveis para v_i.

Portanto, concluímos que no máximo 17 rótulos não estão disponíveis para v_i no Caso 1.2.

Caso 1.3: Não há vértices de grau 3 na vizinhança estendida do vértice v_i. Neste caso temos $|N_1^{d\leq 2}(v_i)| = 2$, $|N_2^{d\leq 2}(v_i)| \leq 2$ e $|N_3^{d\leq 2}(v_i)| \leq 2$. Isso implica que no máximo $5 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 18$ rótulos não estão disponíveis para v_i.

Portanto, no máximo 18 rótulos não estão disponíveis para v_i no Caso 1.

Caso 2: $d_G(v_i) = 1$ e v_i pertence a um (v_i, v)-caminho $P = (v_i, x_1, x_2, \ldots, x_n, v)$ tal que $d_G(v) = 3$ e $d_G(x_i) = 2$, para $1 \leq i \leq n$. Consideramos dois subcasos.

Caso 2.1: $P = (v_i, x_1, x_2, \ldots, x_n, v)$ com $n \geq 3$. Neste caso, temos que $|N_1^{d\leq 2}(v_i)| = 1$, $|N_2^{d\leq 2}(v_i)| = 1$ e $|N_3^{d\leq 2}(v_i)| = 1$. Portanto, no máximo 9 rótulos não estão disponíveis para v_i.

Caso 2.2: $P = (v_i, x_1, x_2, \ldots, x_n, v)$ com $0 \leq n \leq 2$. **Caso 2.2.1:** $d_G(v, v_i) = 3$. Neste caso, $|N_1^{d\leq 2}(v_i)| = |N_2^{d\leq 2}(v_i)| = 1$. Logo, no máximo $5 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 8$ rótulos não estão disponíveis para v_i. **Caso 2.2.2:** $d_G(v, v_i) = 2$. Neste caso, $|N_1^{d\leq 2}(v_i)| = 1$ e $|N_3^{d\leq 2}(v_i)| = 2$. Então, no máximo $5 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 7$ rótulos não estão disponíveis para v_i. **Caso 2.2.3:** $d_G(v, v_i) = 1$. Neste caso, $|N_2^{d\leq 2}(v_i)| = 2$ e $|N_3^{d\leq 2}(v_i)| \leq 2$. Isso implica que no máximo $3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 8$ rótulos não estão disponíveis para v_i.

Portanto, no máximo 9 rótulos não estão disponíveis para v_i no Caso 2.

Caso 3: $d_G(v_i) = 2$ e v_i pertence a um caminho fechado $P = (u, x_1, x_2, \ldots, x_n, v)$ tal que $d_G(u) = d_G(v) = 3$ com $u = v$ e $d_G(x_i) = 2$, para $1 \leq i \leq n$. Há quatro subcasos a analisar, dependendo da posição de v_i no caminho P.

Caso 3.1: $v_i = x_1$ (resp. $v_i = x_n$) com $n \geq 2$. Neste caso, temos que $|N_1^{d\leq 2}(v_i)| = 1$. Além disso, $|N_2^{d\leq 2}(v_i)| \leq 3$ já que existem no máximo dois vértices internos de P à distância 2 de v_i e existe um vizinho de v não pertencente a P à distância 2 de v_i. Por fim, $|N_3^{d\leq 2}(v_i)| \leq 3$ já que no máximo dois vértices internos de P estão à distância três de v_i e no máximo um terceiro vértice não pertencente a P também está à distância 3 de v_i. Então, no máximo $5 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 17$ rótulos não estão disponíveis para v_i neste caso.

Caso 3.2: $v_i = x_2$ (resp. $v_i = x_{n-1}$) com $n \geq 3$. Agora, temos que $|N_1^{d\leq 2}(v_i)| = 2$ e $|N_2^{d\leq 2}(v_i)| \leq 1$. Por fim, $|N_3^{d\leq 2}(v_i)| \leq 3$ já que no máximo dois vértices internos de P estão à distância três de v_i e no máximo um terceiro vértice não pertencente a P também está à distância 3 de v_i. Logo, no máximo $5 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 16$ rótulos não estão disponíveis para v_i neste caso.

Caso 3.3: $v_i = x_3$ (resp. $v_i = x_{n-2}$) com $n \geq 5$. Neste caso, temos que $|N_1^{d\leq 2}(v_i)| = |N_2^{d\leq 2}(v_i)| = 2$. Ademais, $|N_3^{d\leq 2}(v_i)| \leq 1$. Isso implica que no máximo $5 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 17$ rótulos não estão disponíveis para v_i neste caso.

Caso 3.4: $v_i = x_i$ tal que $4 \leq i \leq n - 3$ e $n \geq 7$. Este caso é equivalente ao Caso 1.3. Logo, no máximo 18 rótulos não estão disponíveis para v_i neste caso.

Portanto, no máximo 18 rótulos não estão disponíveis para v_i no Caso 3.

A partir da análise de casos acima, concluímos que, na i-ésima iteração do algoritmo, supondo o pior caso em que os vértices da vinhança estendida do vértice v_i estão todos rotulados, no máximo 18 rótulos não estão disponíveis para serem atribuídos a v_i. Isso implica que, se existirem pelo menos 19 rótulos no conjunto $\mathcal{R}$, então sempre sobrará pelo menos um rótulo disponível em $\mathcal{R}$ para v_i. Como $|\mathcal{R}| = 25 - 7 + 1 = 19$, o resultado segue. □

No Teorema 8 a seguir, melhoramos o limitante superior apresentado no Teorema 5 para a subclasse de grafos subcúbicos em que vértices de grau 3 estejam à distância maior que três. Na prova do Teorema 8 usamos os seguintes resultados auxiliares.

Teorema 6 (Clipperton et al. [2006])**.** *Para todo caminho P_n, $\lambda_{3,2,1}(P_n) \leq 7$.*

Lema 7. *Seja k um inteiro não-negativo e p um inteiro positivo. Se $f\colon V(G) \to \{0, 1, \ldots, k\}$ é uma rotulação-$L(3, 2, 1)$ de um grafo G então a rotulação $f'\colon V(G) \to \{p, p + 1, \ldots, p + k\}$ obtida adicionando-se p a todos os rótulos de vértice de G também é uma rotulação-$L(3, 2, 1)$.*

Teorema 8. *Seja G um grafo subcúbico no qual quaisquer dois vértices de grau 3 estão à distância pelo menos quatro entre si. Então, $\lambda_{3,2,1}(G) \leq 16$.*

Demonstração. Seja G como descrito no enunciado. Construímos uma rotulação-$L(3, 2, 1)$ f para G com span 16. Como quaisquer dois vértices de grau 3 estão à distância maior que 3 em G, eles podem ser receber um mesmo rótulo sem ocasionar conflitos. Deste modo, defina $f(v) = 7$ para todo vértice $v \in V(G)$ com $d_G(v) = 3$.

Em seguida, rotulamos todos os vértices adjacentes a vértices de grau 3. Para todo $v_i \in V(G)$ com grau 3, seja $N_G(v_i) = \{w_1^i, w_2^i, w_3^i\}$. Construímos um grafo simples auxiliar H' tal que: $V(H') = N_G(v_i)$ e $E(H') = \{w_1^i w_2^i, w_2^i w_3^i, w_3^i w_1^i\}$ para todo $v_i \in V(G)$. A partir de H', construímos um grafo simples H adicionando também a aresta $w_a^k w_b^l$ ao grafo H' se e somente se existe um (w_a^k, w_b^l)-caminho $P = (w_a^k, x_1, x_2, \ldots, x_n, w_b^l)$ em G com $d_G(x_j) = 2$ para $1 \leq j \leq n$. Pela construção de H, temos que $\Delta(H) \leq \Delta(G) = 3$.

Agora, mostramos que $\chi(H) \leq 3$. Temos 3 casos a considerar, dependendo se H for um ciclo ímpar, um grafo completo ou nenhum destes dois casos. Se H for isomorfo a um ciclo ímpar, então $\chi(H) \leq 3$ pelo Teorema 2. Note que H não pode ser isomorfo a um grafo completo com mais do que 4 vértices pois $\Delta(H) \leq 3$. Além disso, H não pode ser isomorfo ao K_1 nem ao K_2 pois, pela construção de H, não é possível que H tenha menos que três vértices. Se H é isomorfo ao K_3, então $\chi(H) \leq 3$ pelo Teorema 2. Além disso, H não pode ser isomorfo ao K_4 pois a distância entre vértices de grau 3 em G implica que haverá pelo menos um vértice de grau 2 em H. Por fim, no caso em que H não é um ciclo ímpar nem um grafo completo, $\chi(H) \leq 3$ pelo Teorema 3.

Deste modo, seja $\varphi\colon V(H) \to \{0, 2, 4\}$ uma 3-coloração própria dos vértices de H. Dado um vértice $w_a^k \in V(G)$ defina $f(w_a^k) = \varphi(w_a^k)$. Note que todo vértice w_a^k de G é um vértice de H, logo a rotulação parcial f é bem-definida e satisfaz as condições da rotulação-$L(3, 2, 1)$.

A fim de concluir a demonstração, observamos que o subgrafo induzido pelos vértices ainda não rotulados é uma floresta linear (uma floresta em que cada componente conexa é isomorfa a um caminho). Pelo Teorema 6, todo caminho P_i dessa floresta possui uma rotulação-$L(3, 2, 1)$ com span no máximo 7. Para cada caminho P_i munido de tal rotulação, adicionamos 9 ao rótulo dos seus vértices de modo a obter uma rotulação-$L(3, 2, 1)$ do P_i com rótulos no conjunto $\{9, \ldots, 16\}$ (Lema 7). Note que esta nova rotulação-$L(3, 2, 1)$ da floresta linear não introduz conflitos pois quaisquer dois vértices pertencentes a caminhos P_i e P_j disjuntos estão a distância maior que 3. Além disso, não há conflitos entre os rótulos dos vértices da floresta linear e os rótulos do restante do grafo porque $|\max(\{0, 2, 4\}) - \min(\{9, \ldots, 16\})| \geq 3$ e $|7 - \min(\{9, \ldots, 16\})| \geq 2$. Com isto, concluímos que $\lambda_{3,2,1}(G) \leq 16$. □

Pela definição de rotulação-$L(3, 2, 1)$, $\lambda_{3,2,1}(H) \leq \lambda_{3,2,1}(G)$ para todo subgrafo H de G. Além disso, sabe-se que todo grafo simples com grau máximo k é subgrafo de um grafo k-regular [West, 2018]. Logo, uma rotulação-$L(3, 2, 1)$ de um grafo k-regular determina um limitante superior para $\lambda_{3,2,1}(H)$ de seus subgrafos H. A seguir, determinamos um limitante superior para o parâmetro $\lambda_{3,2,1}(G)$ de uma família de grafos 3-regulares pertencente à classe dos grafos snarks.

Snarks são grafos simples, 3-regulares, conexos, sem arestas de corte e que não admitem uma atribuição de rótulos do conjunto $\{1, 2, 3\}$ às suas arestas de modo que quaisquer duas arestas

adjacentes possuam rótulos distintos. Os snarks são muito estudados em teoria dos grafos e sua origem está relacionada à famosa *Conjetura das Quatro Cores*, provada por Appel e Haken em 1977. O primeiro snark foi descoberto por Petersen [1898] e, até 1975, apenas cinco snarks eram conhecidos, até que Isaacs [1975] descobriu as primeiras famílias infinitas de snarks, entre elas, a família dos snarks-flor, definida a seguir.

A família dos snarks-flor é composta pelos grafos $J_3, J_5, \ldots, J_i$, $i \geq 3$ e i ímpar. Estes grafos podem ser construídos por meio da união disjunta de blocos especiais e da adição de arestas específicas. A seguir, definimos os blocos especiais e determinamos como cada membro da família é obtido. O *bloco* B_i é o grafo com conjunto de vértices $V(B_i) = \{u_i, v_i, x_i, y_i\}$ e conjunto de arestas $E(B_i) = \{u_iv_i, x_iv_i, y_iv_i\}$, como ilustrado na Figura 4. Dois blocos B_i e B_j são conectados por meio de *arestas de ligação* definidas pelo conjunto $E_{i,j} = \{u_iu_j, x_ix_j, y_iy_j\}$. O *grafo de ligação* L_i é o grafo com $V(L_i) = V(B_{i-3}) \cup V(B_{i-2}) \cup V(B_{i-1}) \cup V(B_i)$ e $E(L_i) = E(B_{i-3}) \cup E(B_{i-2}) \cup E(B_{i-1}) \cup E(B_i) \cup E_{(i-3),(i-2)} \cup E_{(i-2),(i-1)} \cup E_{(i-1),i}$, como ilustrado na Figura 5.

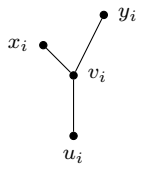

Figura 4: Bloco B_i.

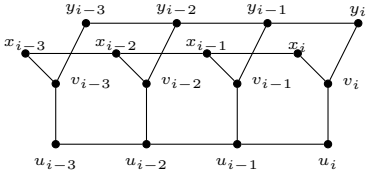

Figura 5: Grafo L_i.

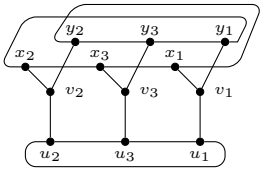

Figura 6: Grafo J_3.

O primeiro snark-flor é o grafo J_3, com conjunto de vértices $V(J_3) = \cup_{i=1}^{3} V(B_i)$ e conjunto de arestas $E(J_3) = (\cup_{i=1}^{3} E(B_i)) \cup E_{2,3} \cup E_{3,1} \cup \{u_1u_2, x_1y_2, y_1x_2\}$, como ilustrado na Figura 6. O segundo snark-flor é o grafo J_5, com conjunto de vértices $V(J_5) = \cup_{i=1}^{5} V(B_i)$ e conjunto de arestas $E(J_5) = (\cup_{i=1}^{5} E(B_i)) \cup E_{2,3} \cup E_{3,4} \cup E_{4,5} \cup E_{5,1} \cup \{u_1u_2, x_1y_2, y_1x_2\}$.

Para todo $i \geq 7$ ímpar, o snark-flor J_i é obtido recursivamente a partir do snark-flor J_{i-4} e do grafo de ligação L_i como definido a seguir: $V(J_i) = V(J_{i-4}) \cup V(L_i)$; $E(J_i) = (E(J_{i-4}) \setminus E_{i-4}^{out}) \cup E(L_i) \cup E_i^{in}$, tal que: $E_{i-4}^{out} = E_{(i-4),1}$ e $E_i^{in} = E_{(i-4),(i-3)} \cup E_{i,1}$.

A seguir, determinamos um limitante superior para $\lambda_{3,2,1}(J_i)$ de cada snark-flor J_i.

Teorema 9. *Para todo snark-flor J_i com $i \geq 5$ ímpar, $\lambda_{3,2,1}(J_i) \leq 12$. Além disso, $\lambda_{3,2,1}(J_3) \leq 14$.*

Demonstração. Rotulações-$L(3,2,1)$ ótimas do J_3 e do J_5 com span 14 e 12, respectivamente, são exibidas nas Figuras 7 e 8.

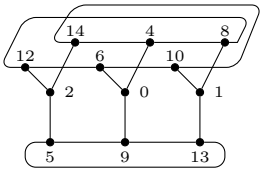

Figura 7: Rotulação L(3,2,1) do J_3.

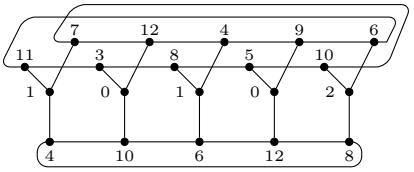

Figura 8: Rotulação $L(3,2,1)$ do J_5.

Para os demais snarks-flor, construímos uma rotulação-$L(3,2,1)$ com span 12. Seja então J_i um snark-flor, com $i \geq 7$ ímpar. A prova é dividida em dois casos, dependendo do valor de i módulo 4. Em cada caso, usamos uma prova indutiva baseada na construção recursiva da família.

Caso 1: $i = 4k + 3$ com $k \geq 1$. Construímos uma rotulação-$L(3,2,1)$ *especial* f_k para J_{4k+3} com span 12, que atribui os seguintes rótulos aos seguintes vértices específicos de J_{4k+3}:

$f_k(x_1) = 6$, $f_k(y_1) = 8$, $f_k(u_1) = 4$, $f_k(v_1) = 1$, $f_k(x_2) = 3$, $f_k(y_2) = 9$, $f_k(u_2) = 12$, $f_k(v_2) = 0$, $f_k(x_3) = 11$, $f_k(y_3) = 4$, $f_k(u_3) = 7$, $f_k(v_3) = 1$, $f_k(x_i) = 11$, $f_k(y_i) = 5$, $f_k(u_i) = 9$, $f_k(v_i) = 2$, $f_k(x_{i-1}) = 4$, $f_k(y_{i-1}) = 10$, $f_k(u_{i-1}) = 6$, $f_k(v_{i-1}) = 0$, $f_k(x_{i-2}) = 9$, $f_k(y_{i-2}) = 7$, $f_k(u_{i-2}) = 11$, $f_k(v_{i-2}) = 1$.

Prova por indução em k. Como base da indução, a Figura 9 exibe uma rotulação-$L(3,2,1)$ especial f_1 do J_7. Como hipótese de indução, suponha que o snark-flor $J_{4(k-1)+3}$ possui uma rotulação-$L(3,2,1)$ especial f_{k-1}. Considere também a rotulação-$L(3,2,1)$ f_L do grafo de ligação L_i definida na Figura 10. Deste modo, definimos a rotulação f_k para J_{4k+3} de modo que, para todo vértice $x \in V(J_{4k+3})$: $f_k(x) = f_{k-1}(x)$ se $x \in V(J_{4(k-1)+3})$; e $f_k(x) = f_L(x)$ se $x \in V(L_i)$.

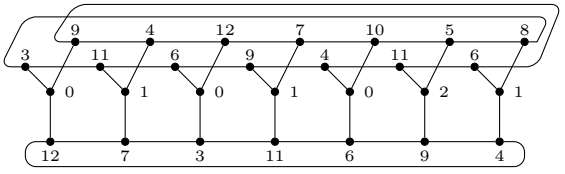

Figura 9: Rotulação-$L(3,2,1)$ especial do J_7.

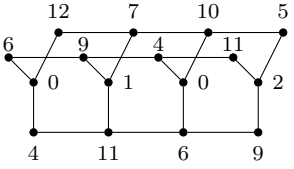

Figura 10: Rotulação-$L(3,2,1)$ do L_i.

Para concluir a demonstração deste caso, primeiro provamos que os rótulos dos vértices de L_i não causam conflito com os rótulos do vértices de $J_{4(k-1)+3}$. Dado que f_L é uma rotulação-$L(3,2,1)$, os rótulos que ela atribui a $V(L_i)$ não conflitam (o mesmo acontece com relação a f_{k-1} e $V(J_{4(k-1)+3})$. Portanto, para cada vértice de L_i, analisamos na sua vizinhança estendida apenas os rótulos dos vértices que não pertencem a L_i. Existem 16 vértices em L_i a serem analisados. Em cada caso abaixo, denotamos por $\mathcal{J}^p(v)$ o conjunto $N_p(v) \cap V(J_{4(k-1)+3})$, onde $p \in \{1,2,3\}$ e $v \in L_i$. O conjunto $\mathcal{J}^p(v)$ contém os vértices de $J_{4(k-1)+3}$ que estão à distância p de v.

Caso 1.1. v_{i-3} com $f_k(v_{i-3}) = 0$. Como $\mathcal{J}^1(v_{i-3}) = \emptyset$ analisamos apenas os vértices em $\mathcal{J}^2(v_{i-3})$ e $\mathcal{J}^3(v_{i-3})$. Como $f_k(x_{i-4}) = 11$, $f_k(y_{i-4}) = 5$, $f_k(u_{i-4}) = 9$ e esses são os únicos vértices em $\mathcal{J}^2(v_{i-3})$, temos que $|f_k(v_{i-3}) - f_k(x)| \geq 2$ para todo $x \in \mathcal{J}^2(v_{i-3})$. Além disso, como $f_k(x_{i-5}) = 4$, $f_k(y_{i-5}) = 10$, $f_k(u_{i-5}) = 6$ e $f_k(v_{i-4}) = 2$ e esses são os únicos vértices em $\mathcal{J}^3(v_{i-3})$, temos que $f_k(v_{i-3}) \neq f_k(x)$ para todo $x \in \mathcal{J}^3(v_{i-3})$.

Caso 1.2. x_{i-3} com $f_k(x_{i-3}) = 6$. Neste caso, $\mathcal{J}^1(x_{i-3}) = \{x_{i-4}\}$, $\mathcal{J}^2(x_{i-3}) = \{x_{i-5}, v_{i-4}\}$, $\mathcal{J}^3(x_{i-3}) = \{x_{i-6}, v_{i-5}, y_{i-4}, u_{i-4}\}$, $f_k(x_{i-4}) = 11$, $f_k(x_{i-5}) = 4$, $f_k(v_{i-4}) = 2$, $f_k(x_{i-6}) = 9$, $f_k(v_{i-5}) = 0$, $f_k(y_{i-4}) = 5$ e $f_k(u_{i-4}) = 9$. Portanto, $|f_k(x_{i-3}) - f_k(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \mathcal{J}^t(x_{i-3})$ e $t \in \{1,2,3\}$.

Caso 1.3. y_{i-3} com $f_k(y_{i-3}) = 12$. Neste caso, $\mathcal{J}^1(y_{i-3}) = \{y_{i-4}\}$, $\mathcal{J}^2(y_{i-3}) = \{y_{i-5}, v_{i-4}\}$, $\mathcal{J}^3(y_{i-3}) = \{y_{i-6}, v_{i-5}, x_{i-4}, u_{i-4}\}$, $f_k(y_{i-4}) = 5$, $f_k(y_{i-5}) = 10$, $f_k(v_{i-4}) = 2$, $f_k(y_{i-6}) = 7$, $f_k(v_{i-5}) = 0$, $f_k(x_{i-4}) = 11$ e $f_k(u_{i-4}) = 9$. Portanto, $|f_k(y_{i-3}) - f_k(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \mathcal{J}^t(y_{i-3})$ e $t \in \{1,2,3\}$.

Caso 1.4. u_{i-3} com $f_k(u_{i-3}) = 4$. Neste caso, $\mathcal{J}^1(u_{i-3}) = \{u_{i-4}\}$, $\mathcal{J}^2(u_{i-3}) = \{u_{i-5}, v_{i-4}\}$, $\mathcal{J}^1(u_{i-3}) = \{u_{i-6}, v_{i-5}, x_{i-4}, y_{i-4}\}$, $f_k(u_{i-4}) = 9$, $f_k(u_{i-5}) = 6$, $f_k(v_{i-4}) = 2$, $f_k(u_{i-6}) = 11$, $f_k(v_{i-5}) = 0$, $f_k(x_{i-4}) = 11$ e $f_k(y_{i-4}) = 5$. Portanto, $|f_k(u_{i-3}) - f_k(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \mathcal{J}^t(u_{i-3})$ e $t \in \{1,2,3\}$.

Caso 1.5. v_{i-2} com $f_k(v_{i-2}) = 1$. Neste caso, $\mathcal{J}^1(v_{i-2}) = \mathcal{J}^2(v_{i-2}) = \emptyset$, $\mathcal{J}^3(v_{i-2}) = \{x_{i-4}, y_{i-4}, u_{i-4}\}$, $f_k(x_{i-4}) = 11$, $f_k(y_{i-4}) = 5$ e $f_k(u_{i-4}) = 9$. Portanto, $|f_k(v_{i-2}) - f_k(x)| \geq 1$ para todo $x \in \mathcal{J}^3(v_{i-2})$.

Caso 1.6 x_{i-2} com $f_k(x_{i-2}) = 9$. Neste caso, $\mathcal{J}^1(x_{i-2}) = \emptyset$, $\mathcal{J}^2(x_{i-2}) = \{x_{i-4}\}$, $\mathcal{J}^3(x_{i-2}) = \{x_{i-5}, v_{i-4}, x_1\}$, $f_k(x_{i-4}) = 11$, $f_k(x_{i-5}) = 4$, $f_k(v_{i-4}) = 2$ e $f_k(x_1) = 6$. Portanto, $|f_k(x_{i-2}) - f_k(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \mathcal{J}^t(x_{i-2})$ e $t \in \{2,3\}$.

Caso 1.7 y_{i-2} com $f_k(y_{i-2}) = 7$. Neste caso, $\mathcal{J}^1(y_{i-2}) = \emptyset$, $\mathcal{J}^2(y_{i-2}) = \{y_{i-4}\}$, $\mathcal{J}^3(y_{i-2}) = \{y_{i-5}, v_{i-4}, y_1\}$, $f_k(y_{i-4}) = 5$, $f_k(y_{i-5}) = 10$, $f_k(v_{i-4}) = 2$ e $f_k(y_1) = 8$. Portanto, $|f_k(y_{i-2}) - f_k(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \mathcal{J}^t(y_{i-2})$ e $t \in \{2, 3\}$.

Caso 1.8 u_{i-2} com $f_k(u_{i-2}) = 11$. Neste caso, $\mathcal{J}^1(u_{i-2}) = \emptyset$, $\mathcal{J}^2(u_{i-2}) = \{u_{i-4}\}$, $\mathcal{J}^3(u_{i-2}) = \{u_{i-5}, v_{i-4}, u_1\}$, $f_k(u_{i-4}) = 9$, $f_k(u_{i-5}) = 6$, $f_k(v_{i-4}) = 2$ e $f_k(u_1) = 4$. Portanto, $|f_k(u_{i-2}) - f_k(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \mathcal{J}^t(u_{i-2})$ e $t \in \{2, 3\}$.

Caso 1.9. v_{i-1} com $f_k(v_{i-1}) = 0$. $\mathcal{J}^1(v_{i-1}) = \mathcal{J}^2(v_{i-1}) = \emptyset$, $\mathcal{J}^3(v_{i-1}) = \{x_1, y_1, u_1\}$, $f_k(x_1) = 6$, $f_k(y_1) = 8$ e $f_k(u_1) = 4$. Portanto, $|f_k(v_{i-1}) - f_k(x)| \geq 1$ para todo $x \in \mathcal{J}^3(v_{i-1})$.

Caso 1.10. x_{i-1} com $f_k(x_{i-1}) = 4$. Neste caso, $\mathcal{J}^1(x_{i-1}) = \emptyset$, $\mathcal{J}^2(x_{i-1}) = \{x_1\}$, $\mathcal{J}^3(x_{i-1}) = \{v_1, y_2, x_{i-4}\}$, $f_k(x_1) = 6$, $f_k(v_1) = 1$, $f_k(y_2) = 9$ e $f_k(x_{i-4}) = 11$. Portanto, $|f_k(x_{i-1}) - f_k(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \mathcal{J}^t(x_{i-1})$ e $t \in \{2, 3\}$.

Caso 1.11. y_{i-1} com $f_k(y_{i-1}) = 10$. Neste caso, $\mathcal{J}^1(y_{i-1}) = \emptyset$, $\mathcal{J}^2(y_{i-1}) = \{y_1\}$, $\mathcal{J}^3(y_{i-1}) = \{v_1, x_2, y_{i-4}\}$, $f_k(y_1) = 8$, e $f_k(v_1) = 1$, $f_k(x_2) = 3$, $f_k(y_{i-4}) = 5$. Portanto, $|f_k(y_{i-1}) - f_k(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \mathcal{J}^t(y_{i-1})$ e $t \in \{2, 3\}$.

Caso 1.12. u_{i-1} com $f_k(u_{i-1}) = 6$. Neste caso, $\mathcal{J}^1(u_{i-1}) = \emptyset$, $\mathcal{J}^2(u_{i-1}) = \{u_1\}$, $\mathcal{J}^3(u_{i-1}) = \{v_1, u_2, u_{i-4}\}$, $f_k(u_1) = 4$, $f_k(v_1) = 1$, $f_k(u_2) = 12$ e $f_k(u_{i-4}) = 9$. Portanto, $|f_k(u_{i-1}) - f_k(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \mathcal{J}^t(u_{i-1})$ e $t \in \{2, 3\}$.

Caso 1.13. v_i com $f_k(v_i) = 2$. Neste caso, $\mathcal{J}^1(v_i) = \emptyset$, $\mathcal{J}^2(v_i) = \{x_1, y_1, u_1\}$, $\mathcal{J}^3(v_i) = \{x_2, y_2, u_2, v_1\}$, $f_k(x_1) = 6$, $f_k(y_1) = 8$, $f_k(u_1) = 4$, $f_k(x_2) = 3$, $f_k(y_2) = 9$, $f_k(u_2) = 12$ e $f_k(v_1) = 1$. Portanto, $|f_k(v_i) - f_k(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \mathcal{J}^t(v_i)$ e $t \in \{2, 3\}$.

Caso 1.14. x_i com $f_k(x_i) = 11$. Neste caso, $\mathcal{J}^1(x_i) = \{x_1\}$, $\mathcal{J}^2(x_i) = \{v_1, y_2\}$, $\mathcal{J}^3(x_i) = \{u_1, y_1, y_3, v_2\}$, $f_k(x_1) = 6$, $f_k(v_1) = 1$, $f_k(y_2) = 9$, $f_k(u_1) = 4$, $f_k(y_1) = 8$, $f_k(y_3) = 4$ e $f_k(v_2) = 0$. Portanto, $|f_k(x_i) - f_k(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \mathcal{J}^t(x_i)$ e $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 1.15. y_i com $f_k(y_i) = 5$. Neste caso, $\mathcal{J}^1(y_i) = \{y_1\}$, $\mathcal{J}^2(y_i) = \{v_1, x_2\}$, $\mathcal{J}^3(y_i) = \{u_1, x_1, x_3, v_2\}$, $f_k(y_1) = 8$, $f_k(v_1) = 1$, $f_k(x_2) = 3$, $f_k(u_1) = 4$, $f_k(x_1) = 6$, $f_k(x_3) = 11$ e $f_k(v_2) = 0$. Portanto, $|f_k(y_i) - f_k(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \mathcal{J}^t(y_i)$ e $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 1.16. u_i com $f_k(u_i) = 9$. Neste caso, $\mathcal{J}^1(u_i) = \{u_1\}$, $\mathcal{J}^2(u_i) = \{v_1, u_2\}$, $\mathcal{J}^3(u_i) = \{x_1, y_1, u_3, v_2\}$, $f_k(u_1) = 4$, $f_k(v_1) = 1$, $f_k(u_2) = 12$, $f_k(x_1) = 6$, $f_k(y_1) = 8$, $f_k(u_3) = 7$, $f_k(v_2) = 0$. Portanto, $|f_k(u_i) - f_k(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \mathcal{J}^t(u_i)$ e $t \in \{1, 2, 3\}$.

Pela análise de casos, os rótulos dos vértices de L_i não causam conflito com os rótulos dos vértices de $J_{4(k-1)+3}$. Portanto, f_k é uma rotulação-$L(3, 2, 1)$. A seguir, mostramos que f_k é especial. Pela construção recursiva da função f_k, os vértices dos blocos B_1, B_2 e B_3 de J_{4k+3} possuem os mesmos rótulos que eles tinham na rotulação-$L(3, 2, 1)$ especial f_{k-1} do $J_{4(k-1)+3}$. Além disso, como a rotulação f_L também é conhecida, é possível verificar, por inspeção, que f_k é uma rotulação-$L(3, 2, 1)$ especial, e o resultado segue.

Caso 2: $i = 4k + 1$ com $k \geq 2$. Construímos uma rotulação-$L(3, 2, 1)$ *especial* f_k para J_{4k+1} com span 12, que atribui os seguintes rótulos aos seguintes vértices específicos de J_{4k+1}: $f_k(x_1) = 10$, $f_k(y_1) = 6$, $f_k(u_1) = 8$, $f_k(v_1) = 2$, $f_k(x_2) = 11$, $f_k(y_2) = 7$, $f_k(u_2) = 4$, $f_k(v_2) = 1$, $f_k(x_3) = 3$, $f_k(y_3) = 12$, $f_k(u_3) = 10$, $f_k(v_3) = 0$, $f_k(x_i) = 5$, $f_k(y_i) = 9$, $f_k(u_i) = 12$, $f_k(v_i) = 0$, $f_k(x_{i-1}) = 8$, $f_k(y_{i-1}) = 4$, $f_k(u_{i-1}) = 6$, $f_k(v_{i-1}) = 1$, $f_k(x_{i-2}) = 3$, $f_k(y_{i-2}) = 12$, $f_k(u_{i-2}) = 9$, $f_k(v_{i-2}) = 0$.

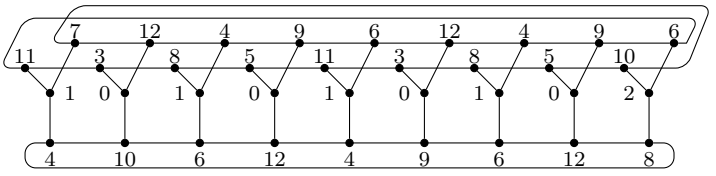

Figura 11: Rotulação-$L(3,2,1)$ especial do J_9.

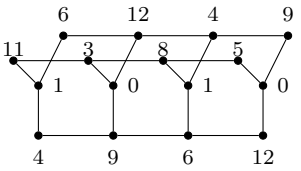

Figura 12: Rotulação-$L(3,2,1)$ do L_i.

Prova por indução em k. Como base da indução, a Figura 11 exibe uma rotulação-$L(3,2,1)$ especial f_2 para o snark-flor J_9. Como hipótese de indução, suponha que o snark-flor $J_{4(k-1)+1}$ possui uma rotulação-$L(3,2,1)$ especial f_{k-1}. Considere também a rotulação-$L(3,2,1)$ f_L do grafo de ligação L_i definida na Figura 12. Deste modo, definimos a rotulação f_k para J_{4k+1} tal que, para todo vértice $x \in V(J_{4k+1})$: $f_k(x) = f_{k-1}(x)$ se $x \in V(J_{4(k-1)+1})$; e $f_k(x) = f_L(x)$ se $x \in V(L_i)$. Para concluir a demonstração deste caso, provamos que os rótulos dos vértices de L_i não causam conflito com os rótulos do vértices de $J_{4(k-1)+1}$, assim como no caso 1. Analogamante ao Caso 1, há 16 casos a considerar.

Caso 2.1. v_{i-3} com $f_k(v_{i-3}) = 1$. Neste caso, temos que $\mathcal{J}^1(v_{i-3}) = \emptyset$, $\mathcal{J}^2(v_{i-3}) = \{x_{i-4}, y_{i-4}, u_{i-4}\}$, $\mathcal{J}^3(v_{i-3}) = \{x_{i-5}, y_{i-5}, u_{i-5}, v_{i-4}\}$, $f_k(x_{i-4}) = 5$, $f_k(y_{i-4}) = 9$, $f_k(u_{i-4}) = 12$, $f_k(x_{i-5}) = 8$, $f_k(y_{i-5}) = 4$, $f_k(u_{i-5}) = 6$ e $f_k(v_{i-4}) = 0$. Portanto, $|f_k(v_{i-3}) - f_k(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \mathcal{J}^t(v_{i-3})$ e $t \in \{2,3\}$.

Caso 2.2. x_{i-3} com $f_k(x_{i-3}) = 11$. Neste caso, $\mathcal{J}^1(x_{i-3}) = \{x_{i-4}\}$, $\mathcal{J}^2(x_{i-3}) = \{x_{i-5}, v_{i-4}\}$, $\mathcal{J}^3(x_{i-3}) = \{x_{i-6}, v_{i-5}, y_{i-4}, u_{i-4}\}$, $f_k(x_{i-4}) = 5$, $f_k(x_{i-5}) = 8$, $f_k(v_{i-4}) = 0$, $f_k(x_{i-6}) = 3$, $f_k(v_{i-5}) = 1$, $f_k(y_{i-4}) = 9$ e $f_k(u_{i-4}) = 12$. Portanto, $|f_k(x_{i-3}) - f_k(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \mathcal{J}^t(x_{i-3})$ e $t \in \{1,2,3\}$.

Caso 2.3. y_{i-3} com $f_k(y_{i-3}) = 6$. Neste caso, $\mathcal{J}^1(y_{i-3}) = \{y_{i-4}\}$, $\mathcal{J}^2(y_{i-3}) = \{y_{i-5}, v_{i-4}\}$, $\mathcal{J}^3(y_{i-3}) = \{y_{i-6}, v_{i-5}, x_{i-4}, u_{i-4}\}$, $f_k(y_{i-4}) = 9$, $f_k(y_{i-5}) = 4$, $f_k(v_{i-4}) = 0$, $f_k(y_{i-6}) = 12$, $f_k(v_{i-5}) = 1$, $f_k(x_{i-4}) = 5$ e $f_k(u_{i-4}) = 12$. Portanto, $|f_k(y_{i-3}) - f_k(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \mathcal{J}^t(y_{i-3})$ e $t \in \{1,2,3\}$.

Caso 2.4. u_{i-3} com $f_k(u_{i-3}) = 4$. Neste caso, $\mathcal{J}^1(u_{i-3}) = \{u_{i-4}\}$, $\mathcal{J}^2(u_{i-3}) = \{u_{i-5}, v_{i-4}\}$, $\mathcal{J}^3(u_{i-3}) = \{u_{i-6}, v_{i-5}, x_{i-4}, y_{i-4}\}$, $f_k(u_{i-4}) = 12$, $f_k(u_{i-5}) = 6$, $f_k(v_{i-4}) = 0$, $f_k(u_{i-6}) = 9$, $f_k(v_{i-5}) = 1$, $f_k(x_{i-4}) = 5$ e $f_k(y_{i-4}) = 9$. Portanto, $|f_k(u_{i-3}) - f_k(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \mathcal{J}^t(u_{i-3})$ e $t \in \{1,2,3\}$.

Caso 2.5. v_{i-2} com $f_k(v_{i-2}) = 0$. Neste caso, $\mathcal{J}^1(v_{i-2}) = \mathcal{J}^2(v_{i-2}) = \emptyset$, $\mathcal{J}^3(v_{i-2}) = \{x_{i-4}, y_{i-4}, u_{i-4}\}$, $f_k(x_{i-4}) = 5$, $f_k(y_{i-4}) = 9$ e $f_k(u_{i-4}) = 12$. Portanto, $|f_k(v_{i-2}) - f_k(x)| \geq 1$ para todo $x \in \mathcal{J}^3(v_{i-2})$.

Caso 2.6. x_{i-2} com $f_k(x_{i-2}) = 3$. Neste caso, $\mathcal{J}^1(x_{i-2}) = \emptyset$, $\mathcal{J}^2(x_{i-2}) = \{x_{i-4}\}$, $\mathcal{J}^3(x_{i-2}) = \{x_{i-5}, v_{i-4}, x_1\}$, $f_k(x_{i-4}) = 5$, $f_k(x_{i-5}) = 8$, $f_k(v_{i-4}) = 0$ e $f_k(x_1) = 10$. Portanto, $|f_k(x_{i-2}) - f_k(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \mathcal{J}^t(x_{i-2})$ e $t \in \{2,3\}$.

Caso 2.7. y_{i-2} com $f_k(y_{i-2}) = 12$. Neste caso, $\mathcal{J}^1(y_{i-2}) = \emptyset$, $\mathcal{J}^2(y_{i-2}) = \{y_{i-4}\}$, $\mathcal{J}^3(y_{i-2}) = \{y_{i-5}, v_{i-4}, y_1\}$, $f_k(y_{i-4}) = 9$, $f_k(y_{i-5}) = 4$, $f_k(v_{i-4}) = 0$ e $f_k(y_1) = 6$. Portanto, $|f_k(y_{i-2}) - f_k(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \mathcal{J}^t(y_{i-2})$ e $t \in \{2,3\}$.

Caso 2.8. u_{i-2} com $f_k(u_{i-2}) = 9$. Neste caso, $\mathcal{J}^1(u_{i-2}) = \emptyset$, $\mathcal{J}^2(u_{i-2}) = \{u_{i-4}\}$, $\mathcal{J}^3(u_{i-2}) = \{u_{i-5}, v_{i-4}, u_1\}$, $f_k(u_{i-4}) = 12$, $f_k(u_{i-5}) = 6$, $f_k(v_{i-4}) = 0$ e $f_k(u_1) = 8$. Portanto, $|f_k(u_{i-2}) - f_k(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \mathcal{J}^t(u_{i-2})$ e $t \in \{2,3\}$.

Caso 2.9. v_{i-1} com $f_k(v_{i-1}) = 1$. $\mathcal{J}^1(v_{i-1}) = \mathcal{J}^2(v_{i-1}) = \emptyset$, $\mathcal{J}^3(v_{i-1}) = \{x_1, y_1, u_1\}$, $f_k(x_1) = 10$, $f_k(y_1) = 6$ e $f_k(u_1) = 8$. Portanto, $|f_k(v_{i-1}) - f_k(x)| \geq 1$ para todo $x \in \mathcal{J}^3(v_{i-1})$.

Caso 2.10. x_{i-1} com $f_k(x_{i-1}) = 8$. Neste caso, $\mathcal{J}^1(x_{i-1}) = \emptyset$, $\mathcal{J}^2(x_{i-1}) = \{x_1\}$, $\mathcal{J}^3(x_{i-1}) = \{v_1, y_2, x_{i-4}\}$, $f_k(x_1) = 10$, $f_k(v_1) = 2$, $f_k(y_2) = 7$ e $f_k(x_{i-4}) = 5$. Portanto, $|f_k(x_{i-1}) - f_k(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \mathcal{J}^t(x_{i-1})$ e $t \in \{2, 3\}$.

Caso 2.11. y_{i-1} com $f_k(y_{i-1}) = 4$. Neste caso, $\mathcal{J}^1(y_{i-1}) = \emptyset$, $\mathcal{J}^2(y_{i-1}) = \{y_1\}$, $\mathcal{J}^3(y_{i-1}) = \{v_1, x_2, y_{i-4}\}$, $f_k(y_1) = 6$, $f_k(v_1) = 2$, $f_k(x_2) = 11$ e $f_k(y_{i-4}) = 9$. Portanto, $|f_k(y_{i-1}) - f_k(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \mathcal{J}^t(y_{i-1})$ e $t \in \{2, 3\}$.

Caso 2.12. u_{i-1} com $f_k(u_{i-1}) = 6$. Neste caso, $\mathcal{J}^1(u_{i-1}) = \emptyset$, $\mathcal{J}^2(u_{i-1}) = \{y_1\}$, $\mathcal{J}^3(u_{i-1}) = \{v_1, u_2, u_{i-4}\}$, $f_k(u_1) = 8$, $f_k(v_1) = 2$, $f_k(u_2) = 4$ e $f_k(u_{i-4}) = 12$. Portanto, $|f_k(u_{i-1}) - f_k(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \mathcal{J}^t(u_{i-1})$ e $t \in \{2, 3\}$.

Caso 2.13. v_i com $f_k(v_i) = 0$. Neste caso, $\mathcal{J}^1(v_i) = \emptyset$, $\mathcal{J}^2(v_i) = \{x_1, y_1, u_1\}$, $\mathcal{J}^3(v_i) = \{x_2, y_2, u_2, v_1\}$, $f_k(x_1) = 10$, $f_k(y_1) = 6$, $f_k(u_1) = 8$, $f_k(x_2) = 11$, $f_k(y_2) = 7$, $f_k(u_2) = 4$ e $f_k(v_1) = 2$. Portanto, $|f_k(v_i) - f_k(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \mathcal{J}^t(v_i)$ e $t \in \{2, 3\}$.

Caso 2.14. x_i com $f_k(x_i) = 5$. Neste caso, $\mathcal{J}^1(x_i) = \{u_1\}$, $\mathcal{J}^2(x_i) = \{v_1, y_2\}$, $\mathcal{J}^3(x_i) = \{u_1, y_1, y_3, v_2\}$, $f_k(u_1) = 10$, $f_k(v_1) = 2$, $f_k(y_2) = 7$, $f_k(u_1) = 8$, $f_k(y_1) = 6$, $f_k(y_3) = 12$ e $f_k(v_2) = 1$. Portanto, $|f_k(x_i) - f_k(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \mathcal{J}^t(x_i)$ e $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 2.15. y_i com $f_k(y_i) = 9$. Neste caso, $\mathcal{J}^1(y_i) = \{y_1\}$, $\mathcal{J}^2(y_i) = \{v_1, x_2\}$, $\mathcal{J}^3(y_i) = \{u_1, x_1, x_3, v_2\}$, $f_k(y_1) = 6$, $f_k(v_1) = 2$, $f_k(x_2) = 11$, $f_k(u_1) = 8$, $f_k(x_1) = 10$, $f_k(x_3) = 3$ e $f_k(v_2) = 1$. Portanto, $|f_k(y_i) - f_k(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \mathcal{J}^t(y_i)$ e $t \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 2.16. u_i com $f_k(u_i) = 12$. Neste caso, $\mathcal{J}^1(u_i) = \{u_1\}$, $\mathcal{J}^2(u_i) = \{v_1, u_2\}$, $\mathcal{J}^3(u_i) = \{x_1, y_1, u_3, v_2\}$, $f_k(u_1) = 8$, $f_k(v_1) = 2$, $f_k(u_2) = 4$, $f_k(x_1) = 10$, $f_k(y_1) = 6$, $f_k(u_3) = 10$ e $f_k(v_2) = 1$. Portanto, $|f_k(u_i) - f_k(x)| \geq 4 - t$ para todo $x \in \mathcal{J}^t(u_i)$ e $t \in \{1, 2, 3\}$.

Pela análise de casos, os rótulos de L_i não causam conflito com os rótulos dos vértices de $J_{4(k-1)+1}$. Portanto, f_k é uma rotulação-$L(3, 2, 1)$. A prova de que f_k é especial é similar a que foi descrita para o Caso 1. □

Referências

Brooks, R. L. (1941). On colouring the nodes of a network. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 37:194–197.

Chartrand, G., Erwin, D., Harary, F., e Zhang, P. (2001). Radio labelings of graphs. *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*, 33:77–85.

Chia, M. L., Kuo, D., Yang, H. L. C. H., e Yeh, R. K. (2011). L(3,2,1) labeling of graphs. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 15:2439–2457.

Clipperton, J., Gehrtz, J., Szaniszlo, Z., e Torkornoo, D. (2006). L(3, 2, 1)-labeling of simples graphs. *VERUM*, 68:1497–1514.

Hale, W. K. (1980). Frequency assignment: Theory and applications. *Proceedings of the IEEE*, 68: 1497–1514.

Isaacs, R. (1975). Infinite families of non-trivial trivalent graphs which are not tait colorable. *The American Mathematical Monthly*, 82(3):221–239.

Král, D. e Skrekovski, R. (2003). A theorem about the channel assignment problem. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 16:426–437.

Liu, J. e Shao, Z. (2004). The L(3,2,1)-labeling problem on graphs. *Mathematica Applicata*, 17(4): 596–602.

Petersen, J. (1898). Sur le théoréme de tait. *L'Intermédiaire des Mathèmaticiens*, 5:225–227.

West, D. B. (2018). *Introduction to Graph Theory*. Pearson Modern Classic.