LIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional
João Pessoa - PB, 3 a 5 de novembro de 2021

OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS SOB RESTRIÇÕES DE BACKTESTING SOBRE O VALOR EM RISCO (VaR): UMA ABORDAGEM SOBRE MODELOS COM COVARIÂNCIAS INCONDICIONAIS E MODELOS IGARCH MULTIVARIADOS

Luiz Augusto Finger França Maluf
Universidade Federal de São Paulo
R. Oleska Winogradow, 100 - Jd. Das Flores, Osasco - SP
laffmaluf@unifesp.br

Luiz Leduino de Salles-Neto
Universidade Federal de São Paulo
Avenida Cesare Mansueto Giulio Lattes, 1201 - Eugênio de Mello, São José dos Campos - SP
luiz.leduino@unifesp.br

Renato Cesar Sato
Universidade Federal de São Paulo
Avenida Cesare Mansueto Giulio Lattes, 1201 - Eugênio de Mello, São José dos Campos - SP
rcsato@unifesp.br

RESUMO

Nosso objetivo nesse trabalho foi avaliar o desempenho de modelos multivariados de seleção de carteiras do tipo média-Valor em Risco (textitVaR) em *backtests* de aderência e independência do *VaR*. Foram testados modelos com covariâncias incondicionais e condicionais do tipo IGARCH, o qual possui apenas o fator de decaimento exponencial, λ, a ser estimado, o que reduz seu custo computacional. As previsões do *VaR* obtidas pelo modelo de variância incondicional não passaram em nenhum dos *backtests* realizados, para nenhum grau de aversão ao risco e nível de cobertura. Nos modelos IGARCH verificou-se que os valores de λ que tiveram melhor desempenho nos *backtests* nem sempre minimizaram o Erro Quadrático Médio (MSE) da variância da carteira. Assim, iremos desenvolver um novo método de otimização de λ alternativo ao critério do MSE, que considere o desempenho do modelo no conjunto de backtests considerados.

PALAVRAS CHAVE. IGARCH Multivariado, Otimização Multi-Objetivo, Backtesting.
GF – Gestão Financeira

ABSTRACT

Our objective was to evaluate the performance of multivariate Mean-Value at Risk (VaR) models for portfolio selection in backtests for adherence and independence of VaR. Models with unconditional and conditional variance of the IGARCH type were tested, which has only one parameter to be estimated, the exponential decay factor, λ, with viable computational cost. textit VaR forecasts obtained by the unconditional covariance did not pass any of the *backtests* performed, on any degree of risk aversion nor any coverage level used. In IGARCH models, the values of λ that performed better in the backtests did not always minimize the mean square error (MSE) of the portfolio variance. Thus, we will develop a new optimization method for λ, which should consider the model's performance in the set of backtests considered, as an alternative to the MSE criterion.

KEYWORDS. Multivariate IGARCH, Multi-Objective Optimization, Backtesting.
Financial Management

1. Introdução

Há uma grande quantidade de trabalhos na literatura sobre otimização de carteiras em que se buscou encontrar formulações alternativas para melhorar critérios como lucratividade e maximização da relação retorno/risco. Quando a medida de risco utilizada é o Valor em Risco (VaR), os trabalhos pesquisados não submeteram seus modelos a *backtesting* para aderência e independência das violações do VaR, deixando-se de verificar dois importantes pressupostos para a adequação do modelo de risco [Maluf e Asano, 2019]. Nesse sentido, o objetivo neste trabalho foi avaliar modelos multivariados de otimização de carteiras do tipo Média-Valor em Risco (VaR) construídos a partir de matrizes de covariâncias incondicionais e condicionais, em termos de seu desempenho em *backtests* de aderência [Kupiec, 1995], independência de primeira ordem via cadeias de Markov [Christoffersen, 1998] e independência de ordens superiores [Berkowitz et al., 2011].

Os modelos de otimização de carteiras do tipo Média-Valor em Risco (*Mean-VaR*) podem ser formulados a partir de matrizes de covariância incondicionais [Markowitz, 1952] ou condicionais dos retornos dos ativos. As matrizes de variância-covariância incondicional são computacionalmente simples para implementação, mas proporcionam previsões para o VaR que são muito viscosas a choques de volatilidade, de modo que geram maiores erros de previsão [Santos e Tessari, 2012]. Por sua vez, modelos *Mean-*VaR formulados a partir de matrizes de covariâncias condicionais possuem um maior custo computacional, podendo se tornar impraticáveis se o número de ativos analisados seja elevado, caso de modelos GARCH multivariados como VEC [Bollerslev et al., 1988], BEKK [Engle e Kroner, 1995] e DCC [Engle, 2000], que nessas condições terão um número muito grande de parâmetros a serem estimados. Por outro lado, modelos IGARCH multivariados utilizados pelo *RiskMetrics* [JPMorgan e Reuters, 1996] fornecem estimativas de matrizes de covariância condicionais e possuem apenas um parâmetro a ser estivado, o chamado fator de decaimento exponencial, λ. Um critério comumente utilizado pelo *RiskMetrics* para otimização do parâmetro λ é a utilização do Erro Quadrático Médio (MSE) da variância estimada da carteira [JPMorgan e Reuters, 1996].

Utilizando 1500 observações de retornos diários de 46 ativos negociados na B3, foram implementados modelos *Mean-VaR* com matriz de variância-covariância incondicional na linha do modelo clássico de Markowitz [Markowitz, 1952] e condicional do tipo IGARCH multivariado do *RiskMetrics*, dada sua maior viabilidade para seleção de carteiras a partir de um grande número de ativos. Desse modelos, foram obtidas previsões para o VaR de 1 e 10 dias, as quais foram submetidas a *backtesting* para aderência e independência de ordens superiores, consideradas até a décima defasagem entre violações do VaR. Os valores do VaR de 1 e 10 dias obtidos pelo modelo de variância incondicional não passaram em nenhum dos *backtests* realizados, para nenhum grau de aversão ao risco e nível de cobertura do VaR utilizado. Os valores do VaR de 1 dia obtidos pelo modelo IGARCH multivariado, passam nos testes de aderência e independência de primeira ordem somente ao nível de cobertura de p=0.999 para todos os graus de aversão ao risco do investidor, para certos intervalos de λ. Para graus mais elevados de aversão ao risco por parte do investidor, verificou-se que os valores de λ que foram mais adequados aos *backtests* foram menores que os valores de λ que minimizaram o erro quadrático médio da variância estimada da carteira. Esse resultado torna o critério de otimização de λ pelo MSE inadequado se o objetivo for a obtenção de valores para o VaR adequados em termos de aderência e independência de suas violações, ao ser considerado o grau de aversão ao risco.

O presente trabalho é organizado como segue: além desta introdução, na seção 2 apresentamos o referencial teórico utilizado, na seção 3 a metodologia, na seção 4 os resultados alcançados e na seção 5, as conclusões.

2. Referencial Teórico

Uma revisão da literatura sobre otimização de carteiras indicou diversos trabalhos aplicados a encontrar formulações com diferentes métricas de risco [Campigotto, 2020], restrições [Mei et al., 2016] e formas de otimização alternativas para melhorar critérios como lucratividade [Silva et al., 2014], e maximização da relação retorno/risco, comumente medida pelo índice de Sharpe [Ledoit e Wolf, 2008], [Santos e Tessari, 2012], [Ranković et al., 2016], entre outros.

No entanto, a literatura que trata de modelos *Mean-VaR* não submete o desempenho de seus modelos a *backtesting* para aderência e independência das violações do VaR. Uma exceção encontrada foi em [Santos et al., 2012], que propõem um modelo do tipo Média-Valor em Risco (*Mean-VaR*) submetido à contagem das violações do VaR de modo a atender exigências regulatórias do acordo de Basileia, sem contudo submeterem seu modelo aos *backtests* mais robustos para a adequação da medida de risco, como os testes de [Kupiec, 1995], [Christoffersen, 1998] e [Berkowitz et al., 2011]. Desse modo, tomando-se como pressuposto básico que modelos para o (*Mean-Var*) são somente adequados se suportarem testes de aderência e independência de suas violações [Maluf e Asano, 2019], encontrou-se uma importante lacuna na literatura sobre otimização de carteiras, o que motivou o início do presente estudo.

3. Metodologia

Nesta seção, apresentamos a forma de se estimar o VaR a partir de matrizes de variância-covariância condicionais obtidas por IGARCH e a partir de matrizes de variância-covariância incondicionais. Na seção 3.1 apresentamos o modelo IGARCH e como se obter a variância da previsão do retorno da carteira. Na seção 3.2 apresentamos a forma de se estimar o VaR a partir da variância da previsão do retorno da carteira e, na seção 3.3 apresentamos a formulação do modelo de otimização não linear utilizado para seleção de carteiras.

3.1. Modelo IGARCH Multivariado

Considerando um conjunto de N ativos em um horizonte temporal $t = 1, \ldots, T$, um modelo generalizado integrado de heterocedasticidade condicional (IGARCH) multivariado utilizado pelo *RiskMetrics* [JPMorgan e Reuters, 1996] pode ser adaptado na forma das equações 1, 2 e 3 de modo a considerar que os valores esperados dos retornos dos ativos da carteira são não nulos:

$$\boldsymbol{R}_t = \boldsymbol{\mu}_{t|t-1} + \boldsymbol{S}_t^{0.5} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{A}_t = \boldsymbol{S}_t^{0.5} \varepsilon_t \tag{2}$$

$$\boldsymbol{S}_t = (1-\lambda)\boldsymbol{A}_{t-1}\boldsymbol{A}_{t-1}' + \lambda \boldsymbol{S}_{t-1} \tag{3}$$

Em que $\boldsymbol{R}_t = (R_{1,t}, R_{2,t}, \cdots, R_{N,t})'$ é o vetor de log-retornos diários dos N ativos observados no instante t, tal que $R_{i,t} = \log\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}}\right)$, $i = 1, ..., N$, $t = 1, ..., T$. $\boldsymbol{\mu}_{t|t-1}$ é vetor de valores esperados de $\boldsymbol{R}_t$ no instante $t-1$ para o instante t e $\boldsymbol{S}_t$ a matriz de covariâncias condicionais $\mathrm{Cov}\left(R_{it}, R_{jt} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) = \mathrm{Cov}_{t-1}\left(R_{1t}, R_{2t}\right)$, em que $\mathcal{F}_{t-1}$ é a filtragem de informação disponível no instante $t-1$ e λ é o fator de decaimento exponencial da matriz de covariâncias condicionais (4).

$$\boldsymbol{S}_t = \begin{bmatrix} \mathrm{Var}_{t-1}\left(R_{1,t}\right) & \mathrm{Cov}_{t-1}\left(R_{1,t}, R_{2,t}\right) & \cdots & \mathrm{Cov}_{t-1}\left(R_{1,t}, R_{N,t}\right) \\ \mathrm{Cov}_{t-1}\left(R_{2,t}, R_{1,t}\right) & \mathrm{Var}_{t-1}\left(R_{1,t}\right) & \cdots & \mathrm{Cov}_{t-1}\left(R_{2,t}, R_{N,t}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cov}_{t-1}\left(R_{N,t}, R_{1,t}\right) & \mathrm{Cov}_{t-1}\left(R_{N,t}, R_{2,t}\right) & \cdots & \mathrm{Var}_{t-1}\left(R_{N,t}\right) \end{bmatrix}_{NxN} \tag{4}$$

A equação 5 descreve o valor esperado de $\boldsymbol{R}$ no instante $t+h$ condicionado à filtragem de informação no instante t:

$$E_t\left(\boldsymbol{R}_{t+h}\right) = \boldsymbol{\mu}_{t+h|t}, \quad h = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

É possível demonstrar que matriz de covariâncias entre os retornos estimada para o instante $t+h$ é notada pela equação 6

$$\mathrm{Cov}\left(\boldsymbol{R}_{t+h} \mid \mathcal{F}_t\right) = E_t\left(\boldsymbol{S}_{t+h}\right) = \boldsymbol{S}_t, \quad h = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

O retorno da carteira observado no instante $t+h$, $R_(t+h)^{\text{port}}$, com uma posição montada no instante t pode ser notado pelos termos da equação 7:

$$R_{t+h}^{\text{port}} \mid \mathcal{F}_t = \boldsymbol{x}'_{t+h|t}\boldsymbol{R}_t, \quad h = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Em que $x_{t+h|t} = (x_{1,t+h|t}, x_{1,t+h|t}, \cdots, x_{N,t+h|t})'$, em que $x_{i,t+h|t}$ é a ponderação do ativo i no instante $t+h$, em uma carteira de N ativos definida no instante t. Dado que $E_t\left(\boldsymbol{R}_{t+h}\right) = \boldsymbol{\mu}_{t+h|t}$, o valor esperado no instante t do retorno da carteira no instante $t+h$, pode ser notado pelos termos da equação 8:

$$E_t\left(R_{t+h}^{\text{port}}\right) = \boldsymbol{x}'_{t+h|t}\boldsymbol{\mu}_{t+h|t}, \quad h = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Um estimador no instante $t-1$ para a variância da carteira no instante t é dado pela equação 9:

$$\widehat{\mathrm{Var}_{t-1}\left(R_t^{\text{port}}\right)} = \boldsymbol{x}'_{t|t-1}\boldsymbol{S}_{t-1}\boldsymbol{x}_{t|t-1} \tag{9}$$

Sob a hipótese de que $\mathrm{Cov}\left(R_{t+l}^{\text{port}}, R_{t+m}^{\text{port}}\right) = 0 \;\forall\; l < m$, temos que um estimador no instante t para a variância acumulada da previsão h passos a frente é dado pela equação 10:

$$\widehat{\mathrm{Var}_t\left(\sum_{l=1}^{h} R_{t+l}^{\text{port}}\right)} = h\boldsymbol{x}'_{t+h|t}\boldsymbol{S}_t\boldsymbol{x}_{t+h|t}, \quad h = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

O Erro Quadrático Médio (MSE) da estimativa de variância condicional da carteira para um *k-ésimo* valor de λ é dado pela equação 11:

$$MSE_k = \frac{\sum_{t=1}^{T}\left(\boldsymbol{x}'_{t|t-1}\boldsymbol{R}_t\boldsymbol{R}'_t\boldsymbol{x}_{t|t-1} - \widehat{\mathrm{Var}_{t-1}\left(R_t^{\text{port}}\right)}\right)^2}{T} \tag{11}$$

3.2. Valor em Risco (*VaR*) da Carteira

A equação 12 define uma expressão do retorno do portfolio R_t^{port} como um processo estocástico:

$$R_t^{\text{port}} = E_{t-1}\left(R_t^{\text{port}}\right) + \left(\widehat{\mathrm{Var}_{t-1}\left(R_t^{\text{port}}\right)}\right)^{0.5} z_t \tag{12}$$

Em que $E_{t-1}\left(R_t^{\text{port}}\right) = \mu_{t|t-1}^{\text{port}}$, tal que $\mu_{t|t-1}^{\text{port}} = x'_{t|t-1}\mu_{t|t-1}$. Definindo $\{z_t\}_{t\in\tau}$ um processo estocástico não correlacionado, com média zero e variância igual a 1, ou seja, um processo de ruído branco (WN), tal que $z_t \sim WN(0,1)$, descrito pela equação 13, é obtido da seguinte forma:

$$z_t = \frac{x'_{t|t-1}\left(\boldsymbol{R}_t - \boldsymbol{\mu}_{t|t-1}\right)}{\left(\boldsymbol{x}'_{t|t-1}\boldsymbol{S}_t\boldsymbol{x}_{t|t-1}\right)^{0.5}} \tag{13}$$

O Valor em Risco (VaR) por unidade monetária investido em uma carteira com N ativos por um período de h dias com uma probabilidade p pode ser estimado conforme a equação 14:

$$VaR_p[h] = q(p)\sqrt{\widehat{\text{Var}_t\left(\sum_{l=1}^{h} R_{t+l}^{\text{port}}\right)}} \tag{14}$$

Em $q(p)$ é o p-quantil associado à distribuição de probabilidades de $\{z_t\}$. Neste trabalho foi utilizada a distribuição *t-Student* assimétrica tendo seus parâmetros estimados por máxima verossimilhança a partir das séries geradas $\{z_t\}$.

3.3. Otimização das Carteiras

O modelo de otimização não linear multiobjetivo de uma carteira, considerando variância condicional para os retornos, o modelo pode ser escrito na forma do sistema das equações 15, 16 e 17:

$$\min\left(\varphi = w\boldsymbol{x}'_{t|t-1}\boldsymbol{S}_{t-1}\boldsymbol{x}_{t|t-1} - (1-w)\boldsymbol{x}'_{t|t-1}\boldsymbol{\mu}_{t|t-1}\right) \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_{i,t|t-1} = 1 \tag{16}$$

$$0 \leq x_{i,t|t-1} < 1 \tag{17}$$

Em que w é o grau de aversão ao risco do investidor, no domínio $w \in [0,1]$. A partir de uma série de 2001 observações diárias de log-retornos de 46 ativos negociados na B3, foram calculadas matrizes $\boldsymbol{S}_t$ para cada dia e $\lambda \in \{0.5, 0.505, 0.51, ..., 1\}$. Os valores diários de $\boldsymbol{\mu}_{t|t-1}$ foram estimados na forma de médias móveis dos últimos 30 log-retornos de cada uma das 46 ações selecionadas. Em seguida, com o uso do software R, o modelo não linear nas equações 15, 16 e 17 foi otimizado de forma exata para e $w \in [0, 0.56, 0.66, 0.76, 0.86, 0.96, 1]$, para cada valor de λ e para cada dia das séries de retornos, partindo-se do dia de número 500, de modo a treinar as matrizes $\boldsymbol{S}_t$. Com as estimativas de $x_{t|t-1}$ foram obtidas 1500 estimativas para o VaR de 1 dia e 1490 estimativas para o VaR de 10 dias com níveis de cobertura $p = \{0.99, 0.995, 0.9975, 0.999\}$.

O modelo com variância incondicional é obtido substituindo-se a matriz $\boldsymbol{S}_t$ na equação pela matriz de covariâncias incondicionais dos log-retornos, $\boldsymbol{S}$, dada por 18:

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \text{Var}(R_1) & \text{Cov}(R_1, R_2) & \cdots & \text{Cov}(R_1, R_N) \\ \text{Cov}(R_2, R_1) & \text{Var}(R_2) & \cdots & \text{Cov}(R_2, R_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(R_N, R_1) & \text{Cov}(R_N, R_2) & \cdots & \text{Var}(R_N) \end{bmatrix}_{NxN} \tag{18}$$

Os valores para a variância da previsão da carteira, e todos os demais valores necessários para o cálculo do VaR são obtidos de forma análoga, substituindo-se a matriz $\boldsymbol{S}_t$ pela matriz $\boldsymbol{S}$.

As previsões para o VaR de 1 e 10 dias foram submetidas a *backtesting* sobre valores observados fora da amostra de retornos da carteira para aderência [Kupiec, 1995], independência de primeira ordem por meio de cadeias de Markov [Christoffersen, 1998] e independência de ordens

superiores por meio de testes Ljung-Box [Berkowitz et al., 2011]. Os procedimentos para sua implementação são demonstrados em [Maluf e Asano, 2019]. Para o *VaR* de 1 dia foram utilizadas 1500 observações de retornos fora da amostra, enquanto para o *VaR* de 10 dias foram utilizadas 1490 observações.

4. Resultados

As estimativas para o VaR de 1 e 10 dias realizadas por meio das variâncias incondicionais da carteira não passaram em nenhum dos $backtests$ utilizados para aderência e independência das violações do VaR. Por outro lado, o desempenho das estimativas do VaR por IGARCH nos $backtests$ foi sensível aos valores de λ, como mostraremos a seguir.

A tabela 1 apresenta os valores de λ que minimizaram o MSE (eq. 11) da variância da carteira estimada para os valores de $w \in \{0, 0.56, 0.76, 0.86, 0.96, 1\}$. As estimativas fora da amostra para o VaR de 1 e 10 dias pelo método IGARCH multivariado, com $\lambda = 0.765$ e $w = 0.56$ são mostradas nas linhas azuis das figuras 1 e 2. Na figura 1, os pontos correspondem aos retornos diários observados das carteiras otimizadas para $w = 0.56$, enquanto na figura 2, os pontos correspondem aos retornos observados acumulados de 10 dias. Em seguida são apresentados os resultados dos $backtests$ de aderência de Kupiec [Kupiec, 1995], independência de primeira ordem por cadeias de Markov [Christoffersen, 1998] e independência até a décima defasagem das violações do VaR [Berkowitz et al., 2011] de 1 e 10 dias estimadas por meio das variâncias incondicionais da carteira estimadas pelo método IGARCH.

Tabela 1: Valores de λ que minimizam MSE_k para diferentes valores de w

w	0	0.56	0.66	0.76	0.86	0.96	1
λ	1	0.765	0.82	0.86	0.985	0.9	0.925

As tabelas 2 e 3, apresentam em cada linha, quais valores de $lambda$ foi possível não rejeitar a hipótese nula de aderência do teste de Kupiec ao nível de significância de 5%, tal que seu $p - valor > 0.05$, para o VaR de 1 e 10 dias. As tabelas 4, 5, fazem o mesmo para a hipótese nula conjunta de aderência e independência do teste de Christoffersen ao nível de significância de 5%, para o VaR de 1 e 10 dias. Verifica-se que as estimativas para o VaR de 1 e 10 dias foram passaram nos testes de aderência [Kupiec, 1995] e independência de primeira ordem [Christoffersen, 1998] somente para níveis de cobertura $p = 0.99$. Em ambos os testes, as estimativas para o VaR de 1 e 10 dias e níveis de aversão ao risco $w \in \{0, 0.56, 0.66, 0.86\}$, permitiram não rejeitar suas hipóteses nulas de aderência e independência de primeira ordem para todos os valores de $\lambda \in \{0.5, 0.505, ..., 1\}$. Para o nível de aversão ao risco $w = 0.96$, com valor de λ que minimizou o MSE de $\lambda = 0.9$, somente o intervalo de valores de $\lambda \in \{0.5, 0.505, ..., 0.77\}$, permitiu não rejeitar as hipóteses nulas de ambos os testes, enquanto para $w = 1$ o intervalo de λ foi reduzido para $\lambda \in \{0.5, 0.505, ..., 0.67\}$. Para o VaR de 10 dias e $w = 0.96$, o intervalo adequado para λ foi $\lambda \in \{0.5, 0.505, ..., 0.535\}$, enquanto para $w = 1$, as estimativas para o VaR de 10 dias tiveram rejeitadas as hipóteses de aderência e independência de primeira ordem para qualquer valor de λ.

As tabelas 6 e 7, apresentam em cada linha, para cada $lambda$, para quais conjuntos K de desfasagens entre violações do VaR foi possível não rejeitar a hipótese nula do teste $Ljung - Box$ [Berkowitz et al., 2011] de ausência de correlação entre as violações, considerando um nível de significância para os testes de 5%, tal que seu $p - valor > 0.05$, para o VaR de 1 e 10 dias. Para as estimativas para o VaR de 1 dia e níveis de aversão ao risco $w \in \{0, 0.56, 0.66, 0.86, 0.96, 1\}$ somente o intervalo $\lambda \in \{0.5, 0.505, ..., 0.72\}$ permitiu não rejeitar a hipótese nula de ausência de

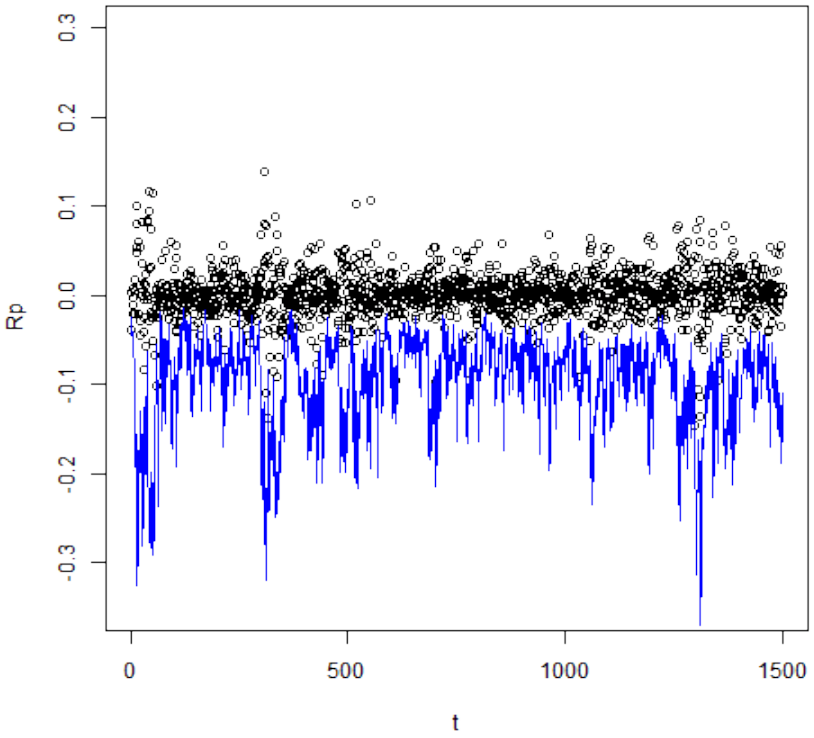


Figura 1: Retornos diários e VaR de 1 dia com $p = 0.995$ por IGARCH com $\lambda = 0.94$ e $w = 0.765$

Tabela 2: Valores de λ com p-valores > 0.05 para o teste de Kupiec sobre o VaR de 1 dia

	w=0	w=0.56	w=0.66	w=0.76	w=0.86	w=0.96	w=1
p=0.99	-	-	-	-	-	-	-
p=0.995	-	-	-	-	-	-	-
p=0.9975	-	-	-	-	-	-	-
p=0.999	0.5 a 1	0.5 a 1	0.5 a 1	0.5 a 1	0.5 a 1	0.5 a 0.77	0.5 a 0.67

Tabela 3: Valores de λ com p-valores > 0.05 para o teste de Kupiec sobre o VaR de 10 dias

	w=0	w=0.56	w=0.66	w=0.76	w=0.86	w=0.96	w=1
p=0.99	-	-	-	-	-	-	-
p=0.995	-	-	-	-	-	-	-
p=0.9975	-	-	-	-	-	-	-
p=0.999	0.5 a 1	0.5 a 1	0.5 a 1	0.5 a 1	0.5 a 1	0.5 a 0.535	-

autocorrelação para $K \in \{1, 2, ..., 10\}$. Para as estimativas para o VaR de 10 dias, somente foi possível não rejeitar a hipótese nula para níveis de aversão ao risco $w \in \{0, 0.56\}$, com respectivos

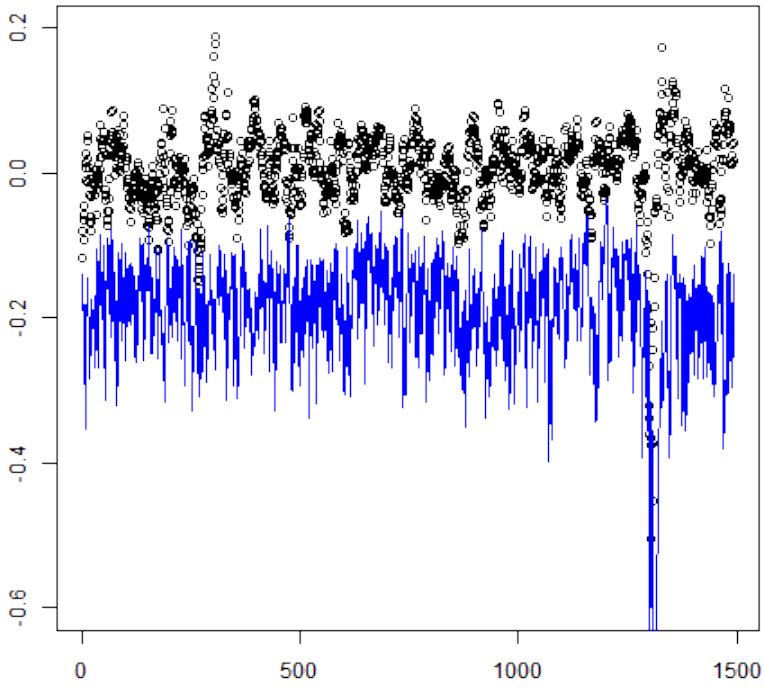


Figura 2: Retornos diários e VaR de 10 dias com $p = 0.995$ por IGARCH com $\lambda = 0.765$ e $w = 0.56$

Tabela 4: Valores de λ com p-valores > 0.05 para o teste de Christoffersen sobre o VaR de 1 dia

	w=0	w=0.56	w=0.66	w=0.76	w=0.86	w=0.96	w=1
p=0.99	-	-	-	-	-	-	-
p=0.995	-	-	-	-	-	-	-
p=0.9975	-	-	-	-	-	-	-
p=0.999	0.5 a 1	0.5 a 1	0.5 a 1	0.5 a 1	0.5 a 1	0.5 a 0.77	0.5 a 0.67

Tabela 5: Valores de λ com p-valores > 0.05 para o teste de Christoffersen sobre o VaR de 10 dias

	w=0	w=0.56	w=0.66	w=0.76	w=0.86	w=0.96	w=1
p=0.99	-	-	-	-	-	-	-
p=0.995	-	-	-	-	-	-	-
p=0.9975	-	-	-	-	-	-	-
p=0.999	0.5 a 1	0.5 a 1	0.5 a 1	0.5 a 1	0.5 a 1	0.5 a 0.535	-

valores de $\lambda \in \{0.5, 0.505, ..., 0.535\}$.

Tabela 6: Valores de λ com p-valores > 0.05 para o teste de Ljung-Box sobre o VaR de 1 dia

λ	w=0	w=0.56	w=0.66	w=0.76	w=0.86	w=0.96	w=1
0.5	K=1 a 10	K=1 a 10	K=1 a 10	K=1 a 10	K=1 a 10	K=1 a 10	K=1 a 10
0.505	K=1 a 10	K=1 a 10	K=1 a 10	K=1 a 10	K=1 a 10	K=1 a 10	K=1 a 10
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.72	K=1 a 10	K=1 a 10	K=1 a 10	K=1 a 10	K=1 a 10	K=1 a 10	K=1 a 10
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.995	K=1 a 10	K=1 a 10	K=1 a 9	K=1 a 10	K=1 a 9	K=1 a 10	K=1 a 10
1	K=1 a 10	K=1 a 10	K=1 a 9	K=1 a 10	K=1 a 9	K=1 a 10	K=1 a 10

Tabela 7: Valores de λ com p-valores > 0.05 para o teste de Ljung-Box sobre o VaR de 10 dias

λ	w=0	w=0.56	w=0.66	w=0.76	w=0.86	w=0.96	w=1
0.5	K=1 a 10	K=1 a 10	-	-	-	-	-
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.535	K=1 a 10	K=1 a 10	-	-	-	-	-
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.705	K=1 a 10	K=1 a 5	-	-	-	-	-
0.71	K=1 a 10	K=1 a 5	-	-	-	-	-
0.715	K=1 a 10	-	-	-	-	-	-
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0,995	K=1 a 10	-	-	-	-	-	-
1	K=1 a 10	-	-	-	-	-	-

Desse modo, verifica-se que, para os testes de Kupiec [Kupiec, 1995] e Christoffersen [Christoffersen, 1998] os valores de λ que minimizam ao MSE para maiores níveis de aversão ao risco ($w \in \{0.96, 1\}$) não permitem rejeitar as hipóteses nulas de aderência e independência de primeira ordem desses testes. Os valores de λ que permitiram não rejeitar as hipóteses nulas de Kupiec e Christoffersen nesses níveis de aversão ao risco foram menores que os que minimizaram o MSE. De forma similar, os intervalos de λ que garantiram o melhor desempenho nos testes *Ljung-Box* de independência das violações [Berkowitz et al., 2011] foram menores que os valores de λ que minimizam ao MSE para os respectivos valores de w.

5. Conclusões

Neste trabalho foram implementados modelos multivariados *Mean-*VaR com matrizes de variância-covariância incondicional e condicional do tipo IGARCH do *RiskMetrics* sobre 2000 observações de retornos diários de 46 ações negociadas na B3. Desse modelos, foram obtidas previsões para o VaR de 1 e 10 dias, as quais foram submetidas a backtesting para aderência e independência, sendo consideradas até a décima defasagem entre violações do VaR.

Os valores do VaR de 1 e 10 dias obtidos pelo modelo de variância incondicional não passaram em nenhum dos *backtests* realizados, para nenhum grau de aversão ao risco e níveis de cobertura utilizados, o que torna esses modelos desaconselháveis para uma quantificação robusta da medida de risco utilizada pelo investidor. Sobre os modelos IGARCH multivariados verificou-

se que os valores de λ que minimizaram o erro quadrático médio não proporcionaram o melhor desempenho nos *backtests* utilizados, especialmente para maiores graus de aversão ao risco por parte do investidor.

Com base nos resultados acima, nossa pesquisa irá desenvolver e propor um método alternativo de otimização do valor de λ em modelos IGARCH multivariados que não considere somente o MSE, mas o desempenho do modelo no conjunto de *backtests* de aderência e independência considerados. A metodologia a ser adotada utilizará modelos de análise multicritério para tomada de decisão (MCDA), como modelos *Promethee* e TODIM, formulados a partir da implementação do chamado Processo Analítico de Hierarquia (AHP).

Referências

Berkowitz, J., Christoffersen, P., e Pelletier, D. (2011). Evaluating Value-at-Risk Models with Desk-Level Data. *Management Science*, 57(12):2213–2227. ISSN 0025-1909. URL https://www.jstor.org/stable/41406342. Publisher: INFORMS.

Bollerslev, T., Engle, R. F., e Wooldridge, J. M. (1988). A Capital Asset Pricing Model with Time-Varying Covariances. *Journal of Political Economy*, 96(1):116–131. ISSN 0022-3808. URL https://www.jstor.org/stable/1830713. Publisher: University of Chicago Press.

Campigotto, P. (2020). Análise da eficiência de diferentes métricas de risco e estratégias de investimento na otimizacão de portfólios. In *Proceedings of the Brazilian Symposium on Operations Research*, p. 13, Online. SOBRAPO, Rio de Janeiro - Brazil.

Christoffersen, P. F. (1998). Evaluating Interval Forecasts. *International Economic Review*, 39(4): 841–862. ISSN 0020-6598. URL https://www.jstor.org/stable/2527341. Publisher: [Economics Department of the University of Pennsylvania, Wiley, Institute of Social and Economic Research, Osaka University].

Engle, R. F. (2000). Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate garch models. *UC San Diego: Department of Economics, UCSD*. URL https://escholarship.org/uc/item/56j4143f.

Engle, R. F. e Kroner, K. F. (1995). Multivariate Simultaneous Generalized Arch. *Econometric Theory*, 11(1):122–150. ISSN 0266-4666. URL https://www.jstor.org/stable/3532933. Publisher: Cambridge University Press.

JPMorgan e Reuters (1996). Riskmetrics: Technical document, fourth edition.

Kupiec, P. H. (1995). Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models. *The Journal of Derivatives*, 3(2):73–84. ISSN 1074-1240, 2168-8524. URL http://jod.pm-research.com/lookup/doi/10.3905/jod.1995.407942.

Ledoit, O. e Wolf, M. (2008). Robust performance hypothesis testing with the Sharpe ratio. *Journal of Empirical Finance*, p. 10.

Maluf, L. A. F. F. e Asano, J. T. (2019). Comparison of VaR Models to the Brazilian Stock Market Under the Hypothesis of Serial Independence in Higher Orders: Are Garch Models Really Indispensable? *Brazilian Business Review*, 16(6):626–645. URL http://bbronline.com.br/index.php/bbr/article/view/552.

Markowitz, H. (1952). Porfolio selection. *The Journal of Finance*, 17(1):17–91.

Mei, X., DeMiguel, V., e Nogales, F. J. (2016). Multiperiod portfolio optimization with multiple risky assets and general transaction costs. *Journal of Banking & Finance*, 69:108–120. ISSN 03784266. URL https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0378426616300267.

Ranković, V., Drenovak, M., Urosevic, B., e Jelic, R. (2016). Mean-univariate GARCH VaR portfolio optimization: Actual portfolio approach. *Computers & Operations Research*, 72:83–92. ISSN 03050548. URL https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0305054816300041.

Santos, A. A. P. e Tessari, C. (2012). Técnicas Quantitativas de Otimização de Carteiras Aplicadas ao Mercado de Ações Brasileiro. *Brazilian Review of Finance*, 10(3):369. ISSN 1984-5146, 1679-0731. URL http://bibliotecadigital.fgv.br/ojs/index.php/rbfin/article/view/3865.

Santos, A. A., Nogales, F. J., Ruiz, E., e Dijk, D. V. (2012). Optimal portfolios with minimum capital requirements. *Journal of Banking & Finance*, 36(7):1928–1942. ISSN 03784266. URL https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0378426612000623.

Silva, P., Moreira, B., e Francisco, G. (2014). Linear Programming Applied to Finance - Building a Great Portfolio Investment. *Revista de Gestão, Finanças e Contabilidade*, 4(3):107–124. ISSN 2238-5320.