LIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional
João Pessoa - PB, 3 a 5 de novembro de 2021

Sobre os Números Clique Orientado Relativo e Absoluto em Algumas Classes de Grafos

Erika Morais Martins Coelho
INF/UFG, Goiânia–GO, Brasil
erikamorais@inf.ufg.br

Hebert Coelho da Silva
INF/UFG, Goiânia–GO, Brasil
hebert@inf.ufg.br

Mateus de Paula Ferreira
INF/UFG, Goiânia–GO, Brasil
mateus_ferreira@discente.ufg.br

RESUMO

Seja $\overrightarrow{G} = (V, A)$ um grafo orientado. O número cromático orientado de $\overrightarrow{G}$ denotado por $\chi_o(\overrightarrow{G})$ é um parâmetro bem conhecido na literatura. Nos últimos anos os parâmetros número clique orientado relativo e absoluto de $\overrightarrow{G}$ denotados respectivamente por $\omega_{ro}(\overrightarrow{G})$ e $\omega_{ao}(\overrightarrow{G})$ tem ganhado atenção por serem limites inferiores para o número cromático orientado, ou seja, $\omega_{ao}(\overrightarrow{G}) \leq \omega_{ro}(\overrightarrow{G}) \leq \chi_o(\overrightarrow{G})$ para todo grafo $\overrightarrow{G}$. Dado uma família $\mathcal{F}$ de grafos não orientados, temos que $\omega_\sigma(\mathcal{F}) = max\{\omega_\sigma(\overrightarrow{G}) : \overrightarrow{G}$ é toda orientação de $G \in \mathcal{F}$ e $\sigma \in \{\text{ao}, \text{ro}\}\}$. Neste trabalho, apresentamos uma relação entre os números clique orientado relativo e absoluto, em particular para as famílias dos grafos k-Trevo, roda, estrela, bipartido completo e grades.

PALAVRAS CHAVE. Número Clique Orientado Relativo, Número Clique Orientado Absoluto, Grafo Orientado.

Teoria e Algoritmos em Grafos (TAG), Otimização Combinatória (OC), Outras aplicações em PO (OA)

ABSTRACT

Let $\overrightarrow{G} = (V, A)$ be an oriented graph. The oriented chromatic number of $\overrightarrow{G}$ denoted by $\chi_o(\overrightarrow{G})$ is a well know parameter in the literature. In the las few years the paremeters relative and absolute oriented clique number of $\overrightarrow{G}$ denoted respectively by $\omega_{ro}(\overrightarrow{G})$ e $\omega_{ao}(\overrightarrow{G})$ has gained attetion for being lower bounds for the oriented chromatic number, that is, $\omega_{ao}(\overrightarrow{G}) \leq \omega_{ro}(\overrightarrow{G}) \leq \chi_o(\overrightarrow{G})$ for every graph $\overrightarrow{G}$. Given a family $\mathcal{F}$ of undirected graphs, we have $\omega_\sigma(\mathcal{F}) = max\{\omega_\sigma(\overrightarrow{G}) : \overrightarrow{G}$ is every orientation of $G \in \mathcal{F}$ and $\sigma \in \{\text{ao}, \text{ro}\}\}$. In this work, we present a relation between the relative and absolute oriented clique numbers, in particular for the graph families of the k-Clover ,wheel, star, complete bipartite and grid graphs.

KEYWORDS. Relative Oriented Clique Number, Absolute Oriented Clique Number, Oriented Graph.

Theory and Algorithms in Graphs (TAG), Combinatorial Optimization (CO), Another applications in OR (AA)

1. Introdução

O problema da coloração orientada foi introduzido independentemente na literatura por meio dos trabalhos [Raspaud e Sopena, 1994] e [Courcelle, 1994]. O trabalho de Sopena [Sopena, 2015] faz uma revisão dos principais resultados do problema. Nos últimos anos os parâmetros número clique orientado relativo e absoluto de $\overrightarrow{G}$, denotados respectivamente por $\omega_{ro}(\overrightarrow{G})$ e $\omega_{ao}(\overrightarrow{G})$, tem ganhado atenção por serem limites inferiores para o número cromático orientado $\chi_o(\overrightarrow{G})$, ou seja, $\omega_{ao}(\overrightarrow{G}) \leq \omega_{ro}(\overrightarrow{G}) \leq \chi_o(\overrightarrow{G})$ para todo grafo $\overrightarrow{G}$. O foco deste trabalho são os número clique orientado relativo e absoluto, sendo o número clique orientado relativo introduzido por [Nandy *et al.*, 2016] e o número clique orientado absoluto introduzido por [Klostermeyer e MacGillivray, 2004].

Neste texto utilizamos as definições usuais de teoria dos grafos [Feofiloff *et al.*, 2011]. O par $G = (V(G), E(G))$ é um *grafo simples*, onde $V(G)$ é um conjunto de *vértices* e $E(G)$ é um conjunto de *arestas* de G. Caso não haja dúvidas quanto a notação, utilizaremos V e E, para representar o conjunto de vértices e arestas de G, respectivamente. Um *arco* é uma das duas orientações possíveis para uma aresta xy, sendo denotado respectivamente por xy ou yx. Um *grafo orientado* $\overrightarrow{G} = (V, A)$ é obtido a partir de G, contendo o mesmo conjunto de vértices de G, de tal modo que o conjunto A contém uma orientação para cada aresta de $E(G)$. O grafo G é chamado de grafo *subjacente* de $\overrightarrow{G}$. A *ordem* de um grafo G é dada pela cardinalidade do seu conjunto de vértices, ou seja, pelo número de vértices de G.

Para um par de grafos G e H, o *produto cartesiano* de G e H, denotado por $G\square H$, é o grafo com o conjunto de vértices $V(G\square H) = V(G) \times V(H)$ e $(x_1, x_2)(y_1, y_2) \in E(G\square H)$ sempre que $x_1 = y_1$ e $x_2y_2 \in E(H)$ ou $x_2 = y_2$ e $x_1y_1 \in E(G)$. Uma *grade* $\overrightarrow{H}_{m,n}$, de ordem $m \cdot n$, é definida pelo produto cartesiano dos caminhos P_m de ordem m e P_n de ordem n. Uma *grade cilíndrica* $\overrightarrow{H}_{m,n}$ de ordem $m \cdot n$ é definida pelo produto cartesiano do ciclo C_m de ordem m e do caminho P_n de ordem n.

Para um par de grafos G e H, o *produto tensor* de G e H, denotado por $G \otimes H$, é o grafo com o conjunto de vértices $V(G \otimes H) = V(G) \times V(H)$ e $(x_1, x_2)(y_1, y_2) \in E(G \otimes H)$ sempre que $x_1y_1 \in E(G)$ e $x_2y_2 \in E(H)$. Uma *grade tensor* $\overrightarrow{H}^t_{m,n}$ de ordem $m \cdot n$ é definida pelo produto tensor dos caminhos P_m de ordem m e P_n de ordem n.

Uma *k-coloração orientada* é definida pela função $\phi_{\overrightarrow{G}}\colon V(\overrightarrow{G}) \to \{1, 2, \ldots, k\}$, tal que:

- Se $xy \in A(\overrightarrow{G})$, então $\phi_{\overrightarrow{G}}(x) \neq \phi_{\overrightarrow{G}}(y)$.
- Se xy, $zt \in A(\overrightarrow{G})$ e $\phi_{\overrightarrow{G}}(y) = \phi_{\overrightarrow{G}}(z)$ então $\phi_{\overrightarrow{G}}(x) \neq \phi_{\overrightarrow{G}}(t)$.

O *número cromático orientado*, denotado por $\chi_o(\overrightarrow{G})$, é o menor *k* tal que $\overrightarrow{G}$ admite uma *k*-coloração orientada. A *distância orientada* $\overrightarrow{d}_{\overrightarrow{G}}(x, y)$ de dois vértices x, y de um grafo orientado $\overrightarrow{G}$ é o tamanho do menor caminho de x para y em $\overrightarrow{G}$. Se não existe um caminho entre os vértices x e y em $\overrightarrow{G}$ dizemos que $\overrightarrow{d}_{\overrightarrow{G}}(x, y) = \infty$. A *distância orientada fraca* $\overline{d}_{\overrightarrow{G}}(x, y)$ entre x e y é dada por $\overline{d}_{\overrightarrow{G}}(x, y) = min\{\overrightarrow{d}_{\overrightarrow{G}}(x, y), \overrightarrow{d}_{\overrightarrow{G}}(y, x)\}$. Um vértice x *enxerga* ou *vê* um vértice y em um grafo $\overrightarrow{G}$ se $\overline{d}_{\overrightarrow{G}}(x, y) = 2$. O *diâmetro fraco* de um grafo $\overrightarrow{G}$ é a maior distância orientada fraca de todos os pares de vértices do grafo.

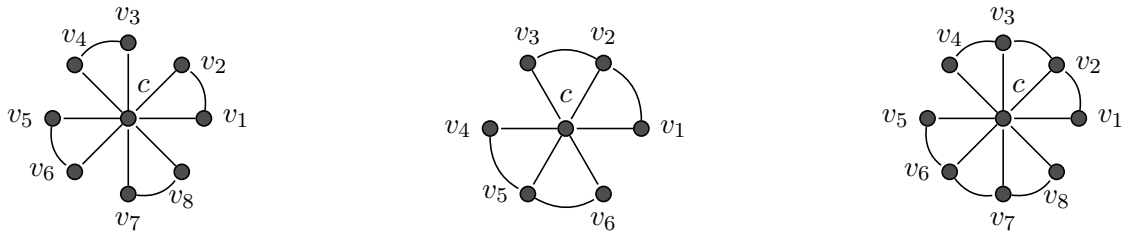
Uma *clique orientada relativa* de um grafo orientado $\overrightarrow{G}$ é um conjunto $R \in V(\overrightarrow{G})$ tal que para quaisquer dois vértices $x, y \in R$ temos que $\overline{d}_{\overrightarrow{G}}(x, y) \leq 2$. O *número clique orientado relativo*, denotado por $\omega_{ro}(\overrightarrow{G})$, é a ordem da maior clique orientada relativa que é um subgrafo de $\overrightarrow{G}$. Uma

clique orientada absoluta ou uma *o-clique* é um grafo orientado $\overrightarrow{G}$ para qual $\chi_o(\overrightarrow{G}) = |V(\overrightarrow{G})|$. O *número clique orientado absoluto*, denotado por $\omega_{ao}(\overrightarrow{G})$, é a ordem da maior clique orientada absoluta $\overrightarrow{H}$ que é um subgrafo de $\overrightarrow{G}$. Dado uma família $\mathcal{F}$ de grafos não orientados, temos que $\omega_\sigma(\mathcal{F}) = max\{\omega_\sigma(\overrightarrow{G}) : \overrightarrow{G}$ é toda orientação de $G \in \mathcal{F}$e $\sigma \in \{\text{ao}, \text{ro}\}\}$. O mesmo acontece para o número cromático orientado.

Definimos como um *grafo da amizade*, o grafo denotado por $T2_q$ com $q \geq 2$ admitindo somente inteiros q que são divisíveis por 2, que tem $V(T2_q) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, c\}$ e $E(T2_q) = \{v_iv_{i+1} : i \in \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots, n-1\}\} \cup \{v_ic : i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ com $n = q$. Chamamos o vértice c de vértice central de $T2_q$. A classe de grafos da amizade é amplamente estudada na literatura em outros problemas em grafos, veja por exemplo [Albina e Mary, 2018; Salindeho *et al.*, 2020; Rohini e Venkatachalam, 2020].

Definimos como um *grafo roda*, o grafo denotado por W_q com $q \geq 3$, que tem $V(W_q) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, c\}$ e $E(W_q) = \{v_iv_{i+1} : i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}\} \cup \{v_nv_1\} \cup \{v_ic : i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ com $n = q$. Chamamos o vértice c de vértice central de W_q. Definimos como um *grafo estrela*, o grafo denotado por S_q com $q \geq 1$, que tem $V(S_q) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, c\}$ e $E(S_q) = \{v_ic : i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ com $n = q$. Chamamos o vértice c de vértice central de S_q.

A seguir definimos uma nova classe de grafos baseada nos grafos da amizade e rodas, com a intenção de generalizar essas classes. Definimos como um *k-Trevo*, o grafo denotado por Tk_q com $q, k \geq 2$ admitindo somente inteiros q que são divisíveis por k, e que considerando $n = q$, tem $V(Tk_q) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, c\}$ e $E(Tr_q) = \{v_1c, v_ic, \ldots, v_nc : 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_iv_{i+1}, \ldots, v_{i+(k-1)}v_{i+k} : 1 \leq i \leq n \text{ e } i \equiv 1 \mod k\}$ se $q \neq k$ e $E(Tr_q) = \{v_nv_1\} \cup \{v_1c, v_ic, \ldots, v_nc : 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_iv_{i+1}, \ldots, v_{i+(k-1)}v_{i+k} : 1 \leq i \leq n \text{ e } i \equiv 1 \mod k\}$ se $q = k$. Chamamos o vértice c de vértice central de Tk_q. A Figura 1 apresenta exemplos de k-Trevos com $k = 2, 3$ e 4.



(a) (b) (c)

Figura 1: O grafo $T2_8$ em (a), o grafo $T3_6$ em (b) e o grafo $T4_8$ em (c).

O trabalho de [Nandy *et al.*, 2016] apresenta resultados relativos ao número clique orientado absoluto mostrando que se $\overrightarrow{G}$ é um grafo planar com cintura pelo menos 3, 4 ou 5, ou 6, então $\omega_{ao} \leq 15, 6, 5$ ou 3. Neste mesmo trabalho também é demonstrado que se $\overrightarrow{G}$ é um grafo planar, então $\omega_{ao}(\overrightarrow{G}) \leq 15$. Em [Dybizbański *et al.*, 2020] é estudado a relação do grau máximo com o número clique orientado absoluto demonstrando que se $\overrightarrow{G}$ tem grau máximo 4, então $\omega_{ao}(\overrightarrow{G}) \leq 12$ [Dybizbański *et al.*, 2020] e que se $\overrightarrow{G}$ tem grau máximo 5, então $16 \leq \omega_{ao}(\overrightarrow{G}) \leq 18$.

O trabalho de [Das *et al.*, 2018] apresenta o primeiro estudo sistemático sobre o número clique orientado relativo. Neste trabalho os autores provaram que se $\overrightarrow{G}$ é um grafo com grau máximo 3, então $\omega_{ro} \leq 7$ e este limite é justo. Provaram resultados relacionados à cintura do grafo, mostrando que se $\overrightarrow{G}$ é um grafo periplanar com cintura pelo menos 3, 4 ou 5, ou 6, então $\omega_{ro} \leq 7, 5$

ou 3 e todos estes limites são justos. Se $\overrightarrow{G}$ é um grafo planar com cintura pelo menos 3, 4, 5, 6 ou 7, eles mostraram que $\omega_{ro} \leq 32, 14, 6, 4, 3$ e os limites para as cinturas 5, 6 e 7 são justos. Por fim, no mesmo trabalho os autores estabeleceram resultados de complexidade provando que determinar o número clique relativo de um grafo orientado bipartido é NP-difícil.

Um grafo $\overrightarrow{G}$ é *livre de triângulos* se tem cintura pelo menos 4. O trabalho de [Das *et al.*, 2020] mostra que se $\overrightarrow{G}$ é um grafo planar e livre de triângulos, então $\omega_{ro}(\overrightarrow{G}) = 10$. O trabalho de [Ferreira *et al.*, 2020] mostra que para a família $\overrightarrow{H}_{m,n}$ das grades de ordem $m, n \geq 2$, temos $\omega_{ro}(\overrightarrow{H}_{m,n}) \leq 5$. Este mesmo trabalho também demonstra que a família $\overrightarrow{H}_{m,n}$ das grades cilíndricas de ordem $m \geq 4$ e $n \geq 2$, tem $\omega_{ro}(\overrightarrow{H}_{m,n}) \leq 5$.

Neste contexto, na Seção 2 demonstramos resultados relacionando os números clique orientado relativo e absoluto, mostrando que toda clique orientada absoluta pode ser definida por uma clique orientada relativa que não tem vértices auxiliares, e consequentemente, o número clique orientado absoluto de um grafo $\overrightarrow{G}$ pode ser definido pela maior clique orientada relativa de $\overrightarrow{G}$ que não tem vértices auxiliares. Também demonstramos que dado um grafo $\overrightarrow{G}$ toda clique orientada relativa ou absoluta de $\overrightarrow{G}$ é conexa.

Na Seção 3 demonstramos que a família dos k-Trevos Tk_q com $q, k \geq 2$ admitindo somente inteiros q que são divisíveis por k, tem seu número clique orientado relativo e absoluto no máximo 7. Na mesma Seção também demonstramos que a família dos grafos roda W_q com $q \geq 6$, temos $\omega_{ro}(W_q) \leq 7$ e $\omega_{ao}(W_q) \leq 7$. Também demonstramos que a família dos grafos estrela S_q com $q \geq 2$ tem $\omega_{ro}(S_q) = 3$ e $\omega_{ao}(S_q) = 3$. Demonstramos que para a família dos grafos bipartidos completos $K_{m,n}$, temos $\omega_{ao}(K_{m,n}) = \omega_{ro}(K_{m,n}) = \chi_o(K_{m,n}) = m + n$.

Por fim também na Seção 3 mostramos que para a família $\overrightarrow{H}_{m,n}$ das grades de ordem $m, n \geq 2$, tem $\omega_{ao}(\overrightarrow{H}_{m,n}) \leq 4$ e que a família $\overrightarrow{H}_{m,n}$ das grades cilíndricas de ordem $m \geq 4$ e $n \geq 2$, tem $\omega_{ao}(\overrightarrow{H}_{m,n}) \leq 5$. Também demonstramos que a família $\overrightarrow{H}^t_{m,n}$ das grades tensor de ordem $m, n \geq 2$ tem $\omega_{ro}(\overrightarrow{H}^t_{m,n}) \leq 5$ e $\omega_{ao}(\overrightarrow{H}^t_{m,n}) \leq 4$.

2. Relação entre ω_{ao}, ω_{ro} e χ_o

Pelas definições apresentadas na introdução do número cromático orientado χ_o, número clique orientado relativo ω_{ro} e número clique orientado absoluto ω_{ao} podemos obter a relação trivial de que:

$$\omega_{ao}(\overrightarrow{G}) \leq \omega_{ro}(\overrightarrow{G}) \leq \chi_o(\overrightarrow{G}).$$

Seja $\overrightarrow{G}$ um grafo e R uma clique orientada relativa de $\overrightarrow{G}$. Se existem dois vértices x, z cujo valor $\overline{d}_{\overrightarrow{G}}(x, z) = 2$ é obtido através de um caminho passando por um vértice y e tal que $\overline{d}_R(x, y) \geq 3$, ou seja $y \notin R$, dizemos que y é um vértice *auxiliar*. A partir dessas definições apresentamos o Teorema 1 que mostra que toda clique orientada absoluta pode ser definida por uma clique orientada relativa que não tem vértices auxiliares.

Teorema 1. *Seja $\overrightarrow{G}$ um grafo. Um conjunto de vértices $R \in V(\overrightarrow{G})$ de tamanho k é uma clique orientada absoluta se e somente se R também é uma clique orientada relativa de ordem k que não tem vértices auxiliares.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Seja $\overrightarrow{G}$ um grafo com uma clique orientada absoluta R de tamanho k. Vamos mostrar que R também é uma clique orientada relativa que não utiliza vértices auxiliares. Suponha por contradição que R não é uma clique orientada relativa. Então existem dois vértices $x, y \in R$

tal que $\overline{d}_{\overrightarrow{G}}(x,y) \geq 3$, assim x e y tem a mesma cor em $\chi_o(R)$. Pela definição de clique orientada absoluta temos que $\chi_o(R) = k$ e $|R| = k$. Como x e y tem a mesma cor em $\chi_o(R)$, então $\chi_o(R) < k$. Logo R é uma clique orientada relativa de ordem k.

Suponha por contradição que R utiliza pelo menos um vértice auxiliar x. Então existem dois vértices $y, z \in R$ tal que y e z não são adjacentes. Sem perda de generalidade suponha que $yx, xz \in E(R)$ logo y e z tem a mesma cor, implicando que $\chi_o(R) < k$. Logo R é uma clique orientada relativa de ordem k que não tem vértices auxiliares.

($\Longleftarrow$) Seja $\overrightarrow{G}$ um grafo e R uma clique orientada relativa de ordem k que não tem vértices auxiliares. Temos que $\chi_o(R) = k$, e pela definição de ω_{ao} sabemos que R é uma clique orientada absoluta. □

A partir da demonstração do Teorema 1 podemos verificar que o número clique orientado absoluto de um grafo G pode ser determinado encontrando a maior clique relativa de G que não possui vértices auxiliares.

Teorema 2. *O número clique orientado absoluto, ω_{ao}, de um grafo $\overrightarrow{G}$ pode ser definido pelo tamanho da maior clique orientada relativa de $\overrightarrow{G}$ que não tem vértice auxiliar.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Seja $\overrightarrow{G}$ um grafo com $\omega_{ao}(\overrightarrow{G}) = k$. Seja R a maior clique orientada absoluta de $\overrightarrow{G}$. Pelo Teorema 1 sabemos que R é uma clique orientada relativa que não tem vértices auxiliares. Se $\overrightarrow{G}$ possuir uma clique orientada relativa R^* de ordem $k+1$ que não tem vértices auxiliares, então o $\chi_o(R^*) = k+1$. Logo R^* é uma clique orientada absoluta de ordem $k+1$, contratirando o fato de que $\omega_{ao}(\overrightarrow{G}) = k$.

($\Longleftarrow$) Seja $\overrightarrow{G}$ um grafo que tem $|R| = k$ como sua maior clique orientada relativa que não tem vértices auxiliares. Pelo Teorema 1 sabemos que R é uma clique orientada absoluta. Suponha por contradição, que $\overrightarrow{G}$ tem uma clique orientada absoluta R^* de ordem $k+1$. Pelo Teorema 1 temos que R^* é uma clique orientada relativa de ordem $k+1$ que não possui vértices auxiliares, contrariando a suposição de que a maior clique orientada relativa de $\overrightarrow{G}$ tem ordem k. □

A seguir demonstramos nos Teoremas 3 e 4 que as cliques orientadas relativas e absolutas são conjuntos de vértices conexos.

Teorema 3. *Seja $\overrightarrow{G}$ um grafo orientado. Toda clique orientada relativa de $\overrightarrow{G}$ é conexa.*

Demonstração. Seja $\overrightarrow{G}$ um grafo orientado e R uma clique orientada relativa de $\overrightarrow{G}$. Suponha por contradição que R não é conexa. Com isso podemos dividir R em pelo menos duas componentes conexas, digamos X_1 e X_2. Sejam x, y dois vértices quaisquer tal que $x \in X_1$ e $y \in X_2$. Por definição da clique orientada relativa sabemos que $\overline{d}_{\overrightarrow{G}}(x,y) = 2$. Sabemos que x e y não são adjacentes pois pertencem a componentes conexas diferentes. Assim x vê y por uma caminho de tamanho 2, uma contradição. □

Teorema 4. *Seja $\overrightarrow{G}$ um grafo orientado. Toda clique orientada absoluta de $\overrightarrow{G}$ é conexa.*

Demonstração. Seja $\overrightarrow{G}$ um grafo orientado e R uma clique orientada absoluta de $\overrightarrow{G}$. Suponha por contradição que R não é conexo. Com isso podemos dividir R em pelo menos duas componentes conexas, digamos X_1 e X_2. Por definição temos $|R| = \chi_o(R)$. Sejam x, y dois vértices quaisquer tal que $x, y \in X_1$, pela definição de coloração orientada podemos utilizar as cores de x e y para colorir um par de vértices qualquer em X_2 pois as cores de todos os demais vértices de X_2 são diferentes das cores de x e y, assim $\chi_o(R) < |R|$ uma contradição. □

3. Limites para os Números Clique Orientado Relativo e Absoluto em Algumas Classes de Grafos

Nesta seção, estabelecemos limites para os números Clique Orientado Relativo e Absoluto para as famílias dos k-Trevos, dos grafos roda e estrela, dos bipartidos completos e das grades tensores. Iniciaremos com os grafos k-Trevos.

3.1. k-Trevos

Nesta seção demonstramos que a família dos k-Trevos Tk_q com $q, k \geq 2$ e admitindo somente inteiros q que são divisíveis por k, tem $\omega_{ro}(Tk_q) \leq \begin{cases} 5, & \text{se } k = 2, \\ 7. & \text{se } k \geq 3. \end{cases}$ e $\omega_{ao}(Tk_q) \leq \begin{cases} 5, & \text{se } k = 2, \\ 7. & \text{se } k \geq 3. \end{cases}$. E consequentemente demonstramos que a família dos grafos roda W_q com $q \geq 6$, tem seu número clique orientado relativo e absoluto no máximo 7.

Para a obtenção dos limites para os parâmetros ω_{ro} e ω_{ao}, utilizaremos o resultado de [Das *et al.*, 2018] sobre a família dos grafos periplanares com cintura pelo menos 6, denotado por $\mathcal{O}_6$, com cintura pelo menos 6.

Teorema 5 ([Das *et al.*, 2018])**.** *Para a família dos grafos periplanares com cintura pelo menos 6, $\mathcal{O}_6$, temos $\omega_{ro}(\mathcal{O}_6) = 3$.*

Teorema 6. *Para a família dos grafos k-Trevos Tk_q com $q \geq 2$ e $k = 2$ admitindo somente inteiros q que são divisíveis por 2, tem-se que $\omega_{ro}(Tk_q) \leq 5$*

Demonstração. Por contradição, suponha uma orientação $\overrightarrow{T2_q}$ que tem $\omega_{ro}(\overrightarrow{T2_q}) > 5$. Considere R como qualquer clique orientada relativa de $\overrightarrow{T2_q}$, tal que $|R| > 5$. Sem perda de generalidade, assuma $R = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, \ldots\}$. Seja v_c o vértice central de $\overrightarrow{T2_q}$. Temos que o grafo formado por $\overrightarrow{T2_q} - \{v_c\}$ é a união disjunta de caminhos de tamanho 1, implicando que $\omega_{ro}(\overrightarrow{T2_q} - \{v_c\}) = 2$. Se v_c não é um vértice auxiliar ou $v_c \notin R$ então a maior clique orientada relativa tem tamanho 2, uma contradição. Assim analisamos dois casos:

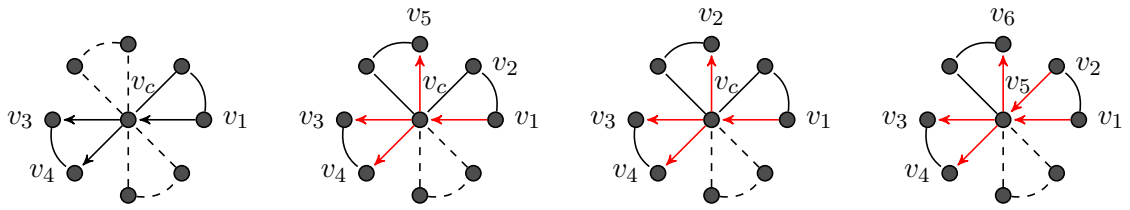
Caso 1: v_c é um vértice auxiliar de R. Pela estrutura de $\overrightarrow{T2_q}$, sabemos que v_1 é adjacente a no máximo um vértice de R. Sem perda de generalidade, considere v_3 e v_4 dois vértices não adjacentes a v_1 tais que v_1 os vê por um caminho de tamanho 2. Assuma que $v_1v_c \in A(\overrightarrow{T2_q})$. Como R é uma clique orientada relativa, v_3 e v_4 devem ser adjacentes ou se veem por um caminho de tamanho 2. Desde que $v_cv_3, v_cv_4 \in A(\overrightarrow{T2_q})$, temos que v_3 e v_4 devem ser adjacentes, pois caso contrário R não seria uma clique orientada relativa. Então, ou $v_3v_4 \in A(\overrightarrow{T2_q})$ ou $v_4v_3 \in A(\overrightarrow{T2_q})$. A Figura 2 (a) apresenta um exemplo dessa configuração.

Como $\omega_{ro}(\overrightarrow{T2_q}) > 5$, sabemos que existem vértices v_2, v_5 em R tal que $v_2, v_5 \notin \{v_1, v_3, v_4\}$. Primeiro, suponha que v_2 seja adjacente de v_1. Considere o vértice v_5 tal que v_1 o vê por um caminho de tamanho 2. Desde que, $v_1v_c \in A(\overrightarrow{T2_q})$, temos que $v_cv_5 \in A(\overrightarrow{T2_q})$. Como $v_cv_3, v_vv_4 \in A(\overrightarrow{T2_q})$, concluímos que v_3 e v_4 não veem v_5 por um caminho de tamanho 2. Logo R não é uma clique orientada relativa e chegamos a uma contradição. A Figura 2 (b) apresenta essa contradição.

Agora, suponha que v_1 e v_2 não são adjacentes. Então, $v_cv_2 \in A(\overrightarrow{T2_q})$ para que v_1 e v_2 se vejam por um caminho de tamanho 2. Assim também não é possível que v_2 veja v_3 e v_4 por caminhos de tamanho 2. Logo R também não é uma clique orientada relativa, uma contradição. A Figura 2 (c) apresenta essa contradição.

Caso 2: $v_c \in R$. Considere $v_5 = v_c$, que v_3 e v_4 são adjacentes e não são adjacentes a v_1, que v_2 é adjacente a v_1 e que $v_1v_5, v_5v_3, v_5v_4 \in A(\overrightarrow{T2_q})$. Como $\omega_{ro}(\overrightarrow{T2_q}) > 5$, sabemos que existe

um vértice v_6 tal que $v_6 \notin \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Se $v_5v_6 \in A(\overrightarrow{T2_q})$ então v_6 não vê os vértices v_3 e v_4, e se $v_6v_5 \in A(\overrightarrow{T2_q})$, v_6 não vê os vértices v_1 e v_2. Logo R não é uma clique orientada relativa, uma contradição. A Figura 2 (d) apresenta essa contradição. Assim, temos $\omega_{ro}(T2_q) \leq 5$. □



(a) Cf_1 (b) Cf_2 (c) Cf_3 (d) Cf_4

Figura 2: Visualização das configurações do Teorema 6.

Teorema 7. *Para a família dos grafos k-Trevos Tk_q com $q, k \geq 3$ admitindo somente inteiros q que são divisíveis por k, tem-se que $\omega_{ro}(Tk_q) \leq 7$*

Demonstração. Por contradição, suponha uma orientação $\overrightarrow{Tk_q}$ em que $\omega_{ro}(\overrightarrow{W_q}) > 7$. Considere R como qualquer clique orientada relativa de $\overrightarrow{Tk_q}$, tal que $|R| > 7$. Sem perda de generalidade, assuma $R = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, \ldots\}$. Seja v_c o vértice central de $\overrightarrow{Tk_q}$. Temos que o grafo formado por $\overrightarrow{Tk_q} - \{v_c\}$ é uma união disjunta de caminhos ou é um grafo periplanar com cintura pelo menos 6. Assim se v_c não é um vértice auxiliar ou $v_c \notin R$, então pelo Teorema 5 e pela definição de caminhos temos $\omega_{ro}(\overrightarrow{W_q}) = 3$, uma contradição. Assim analisamos dois casos:

Caso 1: v_c é um vértice auxiliar de R. Pela estrutura de $\overrightarrow{Tk_q}$, temos que v_1 é adjacente a no máximo 2 vértices de R e que v_1 vê no máximo quatro vértices de R por caminhos de tamanho 2 que não passam por v_c. Como $\omega_{ro}(\overrightarrow{Tk_q}) > 7$, existem pelo menos outros três vértices, digamos v_1, v_2, v_3, tal que v_1 os vê por caminhos de tamanho 2 que passam por v_c e a distância de v_1 a eles em C_q é maior do que 2. Sem perda de generalidade, vamos assumir que $v_1v_c \in A(\overrightarrow{Tk_q})$. Assim podemos assumir que $v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4 \in A(\overrightarrow{Tk_q})$. Desde que $v_cv_2, v_cv_3, v_cv_4 \in A(\overrightarrow{Tk_q})$, o subgrafo $\overrightarrow{Tk_q[\{v_2, v_3, v_4\}]}$ forma um caminho de tamanho 3 em $\overrightarrow{Tk_q}$. Sem perda de generalidade, assuma que $v_2v_3, v_3v_4 \in A(\overrightarrow{Tk_q})$. Na Figura 3 (a) apresentamos a configuração construída até o momento.

Como $\omega_{ro}(\overrightarrow{Tk_q}) > 7$, sabemos que existem vértices v_5, v_6, v_7, em R, tal que $v_5, v_6, v_7 \notin \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Pela estrutura de $\overrightarrow{Tk_q}$, v_3 vê no máximo quatro vértices de R por caminhos de tamanho no máximo 2 que não passam por v_c. Então, existem pelo menos 2 vértices de R que veem v_3 por um caminho de tamanho 2 passando por v_c e que possuem distância maior do que 2 para v_3 em qualquer caminho sem passar por v_c. Digamos que estes vértices sejam v_5 e v_6. Desde que $v_cv_3 \in A(\overrightarrow{Tk_q})$, temos que $v_5v_c, v_6v_c \in A(\overrightarrow{Tk_q})$. Logo os vértices v_4 e v_2 veem v_5 e v_6 por caminhos de tamanho 2 que passam por v_c. Ainda, ou v_5 é adjacente ou vê v_6 por um caminho de tamanho 2 que não passa por v_c.

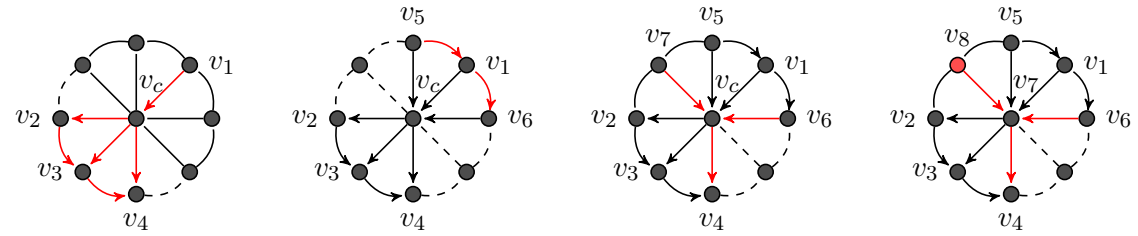
Como $v_1v_c \in A(\overrightarrow{Tk_q})$, para que v_1 veja v_5 e v_6 alguma combinação dos vértices v_1, v_5, v_6 deve formar um caminho de tamanho 3 em $\overrightarrow{Tk_q}$. Sem perda de generalidade suponha que este caminho é $v_5v_1, v_1v_6 \in A(\overrightarrow{Tk_q})$. A Figura 3 (b) apresenta a configuração construída até este ponto.

Novamente, observe que pela estrutura de $\overrightarrow{Tk_q}$, v_7 vê no máximo quatro vértices de R por caminhos de tamanho no máximo 2 que não passam por v_c. Assim existem 2 vértices em $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ que o vértice v_7 vê por um caminho de tamanho 2 que passa por v_c e cuja distância sem passar pelo vértice central de Tk_q seja maior do que 2.

Sem perda de generalidade sejam v_4 e v_6 estes vértices. Observe que esses dois vértices poderiam ser os vértices v_2 e v_5. Desde que $v_6v_c, v_cv_4 \in A(\overrightarrow{Tk_q})$, temos que v_7 só pode ver um, dentre v_4 e v_6 por um caminho de tamanho 2 passando por v_c. Logo R não é uma clique orientada relativa. A Figura 3 (c) mostra essa contradição.

Caso 2: $v_c \in R$. Podemos assumir a mesma estrutura em que v_2, v_3, v_4 e v_5, v_1, v_6 são caminhos de tamanho 3 em R e v_1 vê v_2, v_3, v_4 por caminhos de tamanho 2 que passam por v_c, analisada no caso anterior e fazer $v_7 = v_c$. Como $\omega_{ro}(\overrightarrow{Tk_q}) > 7$, sabemos que existe um vértice v_8 tal que $v_8 \notin \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$. Observe que pela estrutura de $\overrightarrow{Tk_q}$, v_8 vê no máximo quatro vértices de R por caminhos de tamanho no máximo 2 que não passam por v_c. Assim existem 2 vértices em $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ que o vértice v_8 vê por um caminho de tamanho 2 que passa por v_7 e cuja distância sem passar pelo vértice central de Tk_q seja maior do que 2. Sem perda de generalidade, sejam v_4 e v_6 estes vértices. Note que esses vértices poderiam ser v_2 e v_5. Desde que $v_6v_c, v_cv_4 \in A(\overrightarrow{Tk_q})$, temos que v_8 só pode ver um, dentre v_4 e v_6 por um caminho de tamanho 2 passando por v_7. Logo R não é uma clique orientada relativa. A Figura 3 (d) mostra essa contradição.

Portanto quando $k \geq 3$ temos $\omega_{ro}(Tk_q) \leq 7$. □



(a) Cf_1 (b) Cf_2 (c) Cf_3 (d) Cf_4

Figura 3: Visualização das configurações do Teorema 7.

Na demonstração dos Teoremas 6 e 7 percebemos que a maior clique orientada relativa de um k-Trevo não tem vértices auxiliares, assim pelo Teorema 1 obtemos o Corolário 1. Por definição, sabemos que quando $k = q$ o grafo k-Trevo, Tk_q, é isomórfico ao grafo roda, W_q. Assim obtemos o Corolário 2.

Corolário 1. *Para a família dos grafos k-Trevos Tk_q com $q, k \geq 2$ admitindo somente inteiros q são divisíveis por k, tem* $\omega_{ao}(Tk_q) \leq \begin{cases} 5, & \text{se } k = 2, \\ 7. & \text{se } k \geq 3. \end{cases}$

Corolário 2. *Para a família dos grafos roda W_q com $q \geq 6$, temos $\omega_{ro}(W_q) \leq 7$ e $\omega_{ao}(W_q) \leq 7$.*

3.2. Estrelas

Nesta seção demonstramos que a família das estrelas S_q com $q \geq 2$ tem seus números clique orientado relativo e absoluto igual a 3 através do Teorema 9. Por definição sabemos que

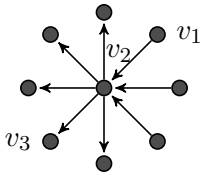


Figura 4: Uma orientação da estrela S_8.

todo grafo estrela é uma floresta, assim se $\overrightarrow{S_q}$ é uma estrela orientada então pelo Teorema 8 temos $\chi_o(\overrightarrow{S}) \leq 3$, ou seja, o limite geral dos números clique orientado relativo e absoluto das estrelas é obtido diretamente, e assim precisamos mostrar uma estrela com $\omega_{ro} = \omega_{ao} = 3$ para demonstrarmos os limites da classe.

Teorema 8 ([da Silva, 2013])**.** *Toda Floresta orientada $\overrightarrow{F}$, tem $\chi_o(\overrightarrow{F}) \leq 3$.*

Teorema 9. *Se S_q é uma estrela com $q \geq 2$, então $\omega_{ro}(S_q) = \omega_{ao}(S_q) = 3$.*

Demonstração. Pelo Teorema 8 sabemos que $\omega_{ro}(S_q) \leq 3$ e $\omega_{ao}(S_q) \leq 3$. Na Figura 4 exibimos uma orientação da estrela S_8 que tem uma clique orientada relativa de ordem 3 e uma clique orientada absoluta de ordem 3. □

3.3. Bipartidos Completos

Nesta seção demonstramos que a família dos grafos bipartidos completos $K_{m,n}$ tem seu número cromático orientado e seus números clique orientado relativo e absoluto iguais a $m + n$.

Teorema 10. *Para a família dos grafos bipartidos completos $K_{m,n}$, temos $\omega_{ao}(K_{m,n}) = \omega_{ro}(K_{m,n}) = \chi_o(K_{m,n}) = m + n$.*

Demonstração. Seja $K_{m,n}$ um grafo bipartido completo com bipartição $[M, N]$ onde $M = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ e $N = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Por definição sabemos que $|V(K_{m,n})| = m + n$.

Primeiramente demonstramos que $\omega_{ro}(K_{m,n}) = m + n$, apresentando uma orientação de $\overrightarrow{K_{m,n}}$ em que $\omega_{ro}(\overrightarrow{K_{m,n}}) = m + n$. Definimos $A(\overrightarrow{K_{m,n}}) = \{v_iu_i : i \in \{1, 2, \ldots, min\{m, n\}\} \cup \{u_iv_j : i \in \{1, 2, \ldots, min\{m, n\}$ e $i + 1 \leq j \leq m\}$. Note que a orientação dos arcos restantes de $\overrightarrow{K_{m,n}}$ não importa pois já garantimos que $V(\overrightarrow{K}_{m,n})$ formam uma clique orientada relativa de tamanho $m + n$. Logo, $\omega_{ro}(\overrightarrow{K_{m,n}}) = m + n$. A Figura 5 apresenta um exemplo dessa orientação em um $K_{3,3}$.

A orientação apresentada anteriormente não utiliza vértices auxiliares, assim pelo Teorema 2 sabemos que $V(\overrightarrow{K_{m,n}})$ forma uma clique orientada absoluta. Implicando que $\omega_{ao}(\overrightarrow{K_{m,n}}) = m+n$. Por fim, como $|V(\overrightarrow{K_{m,n}})| = m+n$ e pela definição de clique orientada absoluta, concluímos que $\chi_o(\overrightarrow{K_{m,n}}) = m + n$. □

3.4. Grades

Nesta seção demonstramos que o número clique orientado absoluto das grades é no máximo 4 e das grades cilíndricas é no máximo 5. Também demonstramos que o número clique orientado relativo das grades tensor é no máximo 5 e que o número clique orientado absoluto das grades tensor é no máximo 4.

Definimos uma *configuração* como um conjunto de grafos. Para realizar as demonstrações apresentamos uma serie de lemas definidos por [Ferreira *et al.*, 2020] que definem as configurações

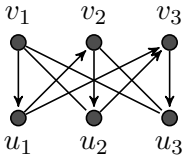


Figura 5: Exemplo da orientação apresentada no Teorema 10

das cliques orientadas relativas das grades e grades cilíndricas de acordo com o seu número de vértices.

Lema 1 ([Ferreira *et al.*, 2020])**.** *Seja $\overrightarrow{H}_{m,n}$ uma grade com $m, n \geq 2$ ou uma grade cilíndrica com $m \geq 4,\ m \neq 5$ e $n \geq 2$. Se $\omega_{ro}(\overrightarrow{H}_{m,n}) \geq 4$, então toda clique orientada relativa de ordem 4 em $\overrightarrow{H}_{m,n}$ tem uma das configurações $C_{f_4 i}$, $1 \leq i \leq 3$, da Figura 6.*

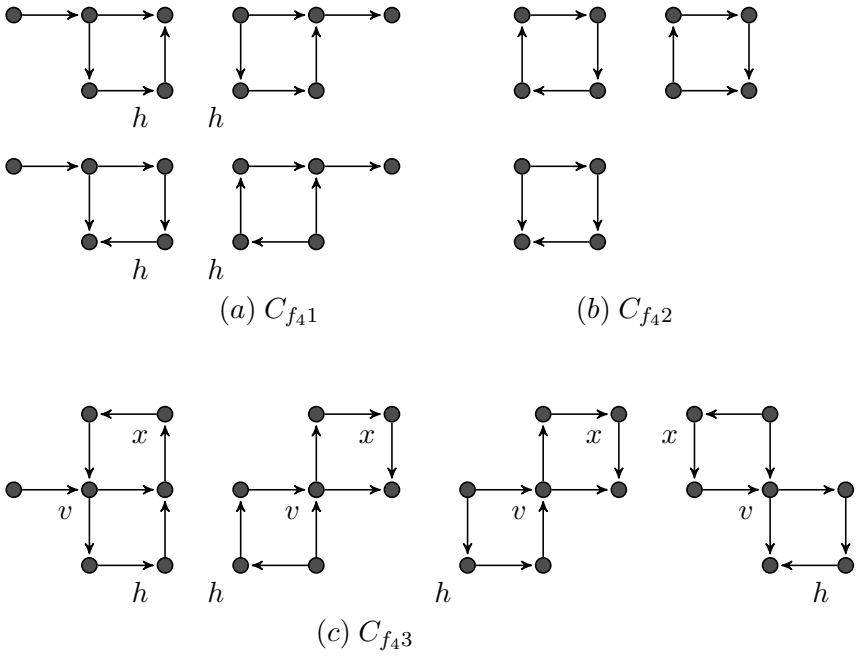


Figura 6: As configurações $C_{f_4 1}$ em (a), $C_{f_4 2}$ em (b) e $C_{f_4 3}$ em (c).

Lema 2 ([Ferreira *et al.*, 2020])**.** *Seja $\overrightarrow{H}_{m,n}$ uma grade com $m, n \geq 2$ ou uma grade cilíndrica com $m \geq 4,\ m \neq 5$ e $n \geq 2$. Se $\omega_{ro}(\overrightarrow{H}_{m,n}) \geq 5$, então toda clique orientada de ordem 5 em $\overrightarrow{H}_{m,n}$ tem a configuração $C_{f_5 1}$ da Figura 7.*

Lema 3 ([Ferreira *et al.*, 2020])**.** *Seja $\overrightarrow{H}_{5,n}$ uma grade cilíndrica com $n \geq 2$. Se $\omega_{ro}(\overrightarrow{H}_{5,n}) \geq 5$, então toda clique orientada relativa de ordem 5 em $\overrightarrow{H}_{5,n}$ tem a configuração $C_{f_5 1}$ ou $C_{f_5 2}$, das Figuras 7 e 8.*

Assim, pelo Teorema 1 e os Lemas 1, 2 e 3, obtemos os Corolários 3 e 4.

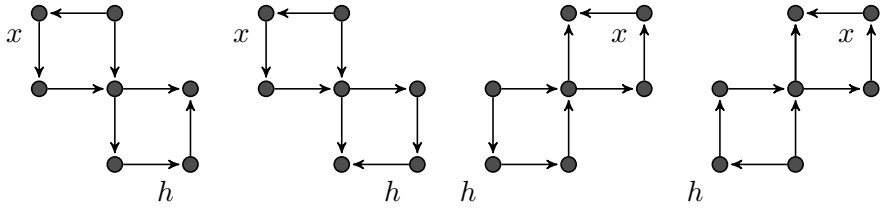


Figura 7: A configuração $C_{f_5 1}$.

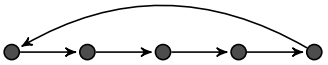


Figura 8: A configuração $C_{f_5 2}$.

Corolário 3. *Para a família* $\overrightarrow{H}_{m,n}$ *das grades de ordem* $m, n \geq 2$*, temos* $\omega_{ao}(\overrightarrow{H}_{m,n}) \leq 4$.

Corolário 4. *Para a família* $\overrightarrow{H}_{m,n}$ *das grades cilíndricas de ordem* $m \geq 4$ *e* $n \geq 2$*, temos* $\omega_{ao}(\overrightarrow{H}_{m,n}) \leq 5$.

Dado uma grade tensor $H^t_{m,n}$, sabemos que a mesma é formada pelo produto tensor dos caminhos P_m e P_n, onde $V(P_m) = \{v_{m_1}, v_{m_2}, v_{m_3}, \ldots, v_{m_m}\}$ e $V(P_n) = \{v_{n_1}, v_{n_2}, v_{n_3}, \ldots, v_{n_n}\}$, e que seu conjunto de vértices é definida pelo produto cartesiano dos vértices de P_m e P_n, sendo $V(H^t_{m,n}) = \{(v_{m_1}, v_{n_1}), (v_{m_1}, v_{n_2}), \ldots, (v_{m_1}, v_{n_n})\} \cup \{(v_{m_2}, v_{n_1}), (v_{m_2}, v_{n_2}), \ldots, (v_{m_2}, v_{n_n})\} \cup \cdots \cup \{(v_{m_m}, v_{n_1}), (v_{m_m}, v_{n_2}), \ldots, (v_{m_m}, v_{n_n})\}$.

Considere $X = \{(v_{m_i}, v_{n_j}) \in V(H^t_{m,n}) : i$ é ímpar e j é par$\}$ e $Y = \{(v_{m_i}, v_{n_j}) \in V(H^t_{m,n}) : i$ é par ej é ímpar$\}$. Observe que a grade tensor $H^t_{m,n}$ é um grafo desconexo e possui duas componentes conexas $H^t_{m,n}[X]$ e $H^t_{m,n}[Y]$. É fácil perceber que $H^t_{m,n}[X]$ e $H^t_{m,n}[Y]$ são subgrafos de uma grade.

Pelos Teoremas 3 e 4 sabemos que as cliques orientadas relativas e absolutas são conexas. Assim os limites para os números clique orientado relativo e absoluto das grades tensor pode ser inferido dos limites das grades, ou seja, a partir do Teorema 11 e do Corolário 3 podemos definir os Corolários 5 e 6.

Teorema 11 ([Ferreira *et al.*, 2020])**.** *Para a família* $\overrightarrow{H}_{m,n}$ *das grades de ordem* $m, n \geq 2$*, temos* $\omega_{ro}(\overrightarrow{H}_{m,n}) \leq 5$.

Corolário 5. *Para a família* $\overrightarrow{H}^t_{m,n}$ *das grades tensor de ordem* $m, n \geq 2$*, temos* $\omega_{ro}(\overrightarrow{H}^t_{m,n}) \leq 5$.

Corolário 6. *Para a família* $\overrightarrow{H}^t_{m,n}$ *das grades tensor de ordem* $m, n \geq 2$*, temos* $\omega_{ao}(\overrightarrow{H}^t_{m,n}) \leq 4$.

4. Conclusões

Inicialmente demonstramos que toda clique orientada absoluta pode ser definida por uma clique orientada relativa que não tem vértices auxiliares. Consequentemente, o número clique orientado absoluto de um grafo $\overrightarrow{G}$ pode ser definido pela maior clique orientada relativa de $\overrightarrow{G}$ que não tem vértices auxiliares. Também demonstramos que dado um grafo $\overrightarrow{G}$ toda clique orientada relativa ou absoluta de $\overrightarrow{G}$ é conexa.

Definimos uma nova classe de grafos chamada k-Trevos, que generalizam os grafos Roda e grafos da amizade e demonstramos os limites de seus números clique orientado relativo e absoluto. Também, demonstramos limites para uma serie de classes de grafos sumarizados na Tabela 1.

Tabela 1: Tabela de resultados sobre os limites do número clique orientado relativo e absoluto.

Classe	ω_{ro}	ω_{ao}
k-Trevos	≤ 5, se $k = 2$, ≤ 7. se $k \geq 3$.	≤ 5, se $k = 2$, ≤ 7. se $k \geq 3$.
Roda	≤ 7	≤ 7
Estrela	$= 3$	$= 3$
Bipartido Completo $K_{m,n}$	$= m + n$	$= m + n$
Grades	≤ 5 ([Ferreira *et al.*, 2020])	≤ 4
Grades Cilíndricas	≤ 5 ([Ferreira *et al.*, 2020])	≤ 5
Grades Tensor	≤ 5	≤ 4

5. Agradecimentos

Este trabalho foi realizado com o apoio da CAPES e do CNPq.

Referências

Albina, A. e Mary, U. (2018). A study on dominator coloring of friendship and barbell graphs. *rn*, 55:7.

Courcelle, B. (1994). The monadic second order logic of graphs vi: On several representations of graphs by relational structures. *Discrete Applied Mathematics*, 54(2-3):117–149.

da Silva, H. C. (2013). *Coloração Orientada: Uma Abordagem Estrutural e De Complexidade*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Das, S., Prabhu, S., e Sen, S. (2018). A study on oriented relative clique number. *Discrete Mathematics*, 341 (7):2049–2057.

Das, S. S., Nandi, S., e Sen, S. (2020). The relative oriented clique number of triangle-free planar graphs is 10. In *Conference on Algorithms and Discrete Applied Mathematics*, p. 260–266. Springer.

Dybizbański, J., Ochem, P., Pinlou, A., e Szepietowski, A. (2020). Oriented cliques and colorings of graphs with low maximum degree. *Discrete Mathematics*, 343(5):111829.

Feofiloff, P., Kohayakawa, Y., e Wakabayashi, Y. (2011). Uma introdução sucinta à teoria dos grafos. *Disponıvel em http://www. ime. usp. br/˜ pf/teoriadosgrafos*.

Ferreira, M., Coelho, E. M. M., e Coelho, H. (2020). Limites para o número clique orientado relativo de grades e grades cilíndricas. In *LII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, João Pessoa, Brasil.

Klostermeyer, W. e MacGillivray, G. (2004). Analogues of cliques for oriented coloring. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 24(3):373–387.

Nandy, A., Sen, S., e Sopena, É. (2016). Outerplanar and planar oriented cliques. *Journal of Graph Theory*, 82(2):165–193.

Raspaud, A. e Sopena, E. (1994). Good and semi-strong colorings of oriented planar graphs. *Information Processing Letters*, 51(4):171–174.

Rohini, A. e Venkatachalam, M. (2020). Irregular colorings of friendship graph families. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, 23(4):913–924.

Salindeho, B. M., Assiyatun, H., e Baskoro, E. T. (2020). On the locating-chromatic numbers of subdivisions of friendship graph. *Journal of the Indonesian Mathematical Society*, 26(2):175–184.

Sopena, E. (2015). Homomorphisms and colourings of oriented graphs: An updated survey. *Discrete Mathematics*.