LIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional
João Pessoa - PB, 3 a 5 de novembro de 2021

O problema de corte de estoque com modos alternativos de manufatura: uma comparação de modelos de fluxo em arcos

Heloisa Vasques da Silva
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Faculdade de Engenharia de Bauru, Bauru, SP
heloisa.vasques@unesp.br

Felipe Kesrouani Lemos
Universidade do Oeste Paulista (UNOESTE)
Presidente Prudente, SP
felipeklemos@gmail.com

Silvio Alexandre de Araujo
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto, SP
silvio.araujo@unesp.br

RESUMO

O problema de corte de estoque (PCE) apresenta importância reconhecida e crescente. Por estar imerso em diferentes processos produtivos, diversas características operacionais podem ser verificadas. Este artigo propõe-se a contribuir no estudo de uma característica operacional e suas integrações com processos de corte unidimensionais, motivado por um estudo anterior: o problema de minimização de custos com modos alternativos de produção. A possibilidade de um mesmo produto ser produzido com diferentes combinações de materiais caracteriza os modos alternativos. O objetivo desse artigo é reformular o problema de corte com modos alternativos de manufatura, proposto na literatura, e analisar o desempenho dos modelos por meio de testes computacionais, cujos resultados indicam que as novas formulações obtém melhores limitantes inferiores e menores tempos de solução comparados com a formulação existente.

PALAVRAS CHAVE. Modelagem matemática, Problema de corte de estoque, Fluxo em arcos.

OC - Otimização Combinatória, POI - PO na indústria, PM - programação matemática

ABSTRACT

The cutting stock problem (CSP) has a recognized and rising importance. Being present in differents productives process, several operational features can be noticed. In this paper we propose a contribuition to the study of an operational characteristic and its integration with one-dimensional cutting process, motivated by a previous work: the problem of minimizing the total raw material costs with alternatives production modes. The possibility of the same product being produced with different materials combinations characterizes the alternatives production modes. The aim of this paper is to reformulate the cutting stock problem with multiple manufacturing modes using others models found in the literature and execute a performance study in order to

analyze the proposed models. The results shows that these new formulations improve the lower bound and the solution time compared to the existing one.

KEYWORDS. Mathematical modeling, Cutting Stock Problem, Arc Flow.

OC - Combinatorial Optimization, POI - OR in the industry, PM - Mathematical Programming

1. Introdução

O Problema de Corte e Empacotamento consiste em determinar a melhor forma de cortar objetos de maneira a produzir um conjunto de itens, ou seja, um conjunto de unidades menores do objeto, de acordo com a necessidade [Delorme et al., 2016]. Este problema aparece em diversos processos industriais de corte, em que os objetos, em geral disponíveis em estoque, correspondem, por exemplo, a barras de aço, bobinas de papel, chapas metálicas ou de madeira, e os itens, com dimensões especificadas, são, em geral, encomendados. Este problema de simples compreensão e grande aplicabilidade prática é NP-difícil [Dyckhoff, 1990]. Nas últimas décadas, vários artigos de revisão bibliográfica relacionados ao problema de corte e empacotamento foram publicados: [Dyckhoff, 1990], [Wäscher et al., 2007], e [Delorme et al., 2016].

O interesse de pesquisa intenso e crescente neste tipo de problema pode ser explicado por (i) sua aplicabilidade, (ii) diversidade de problemas reais e (iii) complexidade combinatória [Santoro e Lemos, 2015]. O presente artigo tem como tema de estudo um caso particular dos problemas de corte denominado Problema de Corte de Estoque (PCE), em inglês, *Cutting Stock Problem*, em que se tem em estoque um conjunto de objetos de dimensões fixas, que devem ser cortados para satisfazer a demanda de um conjunto de itens fracamente heterogêneo e, tendo como objetivo, a minimização da quantidade de matéria-prima.

Enquanto as primeiras publicações do PCE se concentravam em modelos e métodos para problemas de minimizar perdas sujeito à restrições de atendimento à demanda, atualmente muita atenção tem sido voltada para a integração a outras condições operacionais encontradas em contextos produtivos [Wuttke e Heese, 2018], por exemplo, o problema de corte de estoque integrado ao problema de: sequenciamento da produção [Yanasse e Lamosa, 2007]; dimensionamento de lotes e sequenciamento de produção [Melega et al., 2020]; e modos alternativos de manufatura [Lemos et al., 2021]. Esse último pode ser encontrado em situações em que o mesmo produto final pode ser produzido com diferentes combinações de itens [Lemos et al., 2021], como, também, quando há um *trade-off* entre a duração e os requisitos de recursos de um projeto [Liu et al., 2017].

Esse trabalho se insere no contexto da tendência de integração dos PCE com condições operacionais; e escassez, na literatura, de estudos que integrem o PCE com o problema de modos alternativos de manufatura. Assim, o objetivo deste artigo consiste em: reformular o problema de corte de estoque com modos alternativos de manufatura utilizando outros modelos encontrados na literatura; implementar os modelos e realizar testes computacionais objetivando estudos de desempenho; e comparar os resultados dos testes.

Além desta introdução, na seção 2 o problema é descrito e na seção 3 são propostas duas novas formulações de fluxo em arcos para o mesmo. Na seção 4 os testes computacionais e seus resultados são discutidos. As conclusões e propostas futuras são apresentadas na seção 5.

2. Definição do problema e uma abordagem da literatura

Em [Lemos et al., 2021] os autores apresentam a integração entre o problema de corte de estoque unidimensional com modos alternativos de manufatura (PCEMA-1D), com objetivo de

minimizar o custo total de matérias-primas para um conjunto de produtos a serem produzidos. A motivação para o estudo foi o processo de corte de barras de ferro para montagem de armaduras estruturais na indústria de artefatos de concreto, onde existem diversas espessuras de barras de aço. A Figura 1 ilustra o problema: um determinado esforço projetado é representado como um diagrama de cisalhamento. Para atender ao mesmo requisito técnico, diferentes combinações de comprimentos e espessuras de barras de aço podem ser utilizadas, resultando em múltiplos modos de manufatura.

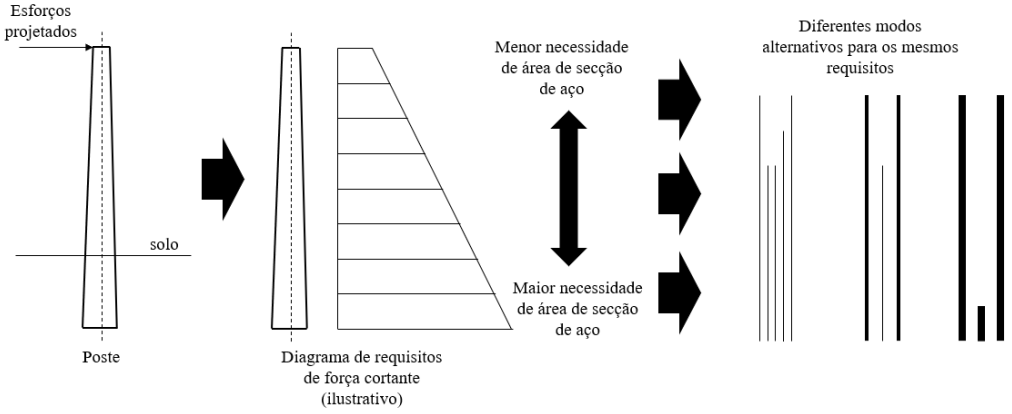

Figura 1: Representação de modos alternativos. Fonte: [Lemos et al., 2021].

A formulação proposta em [Lemos et al., 2021] faz uso da ideia de padrões de corte, que define a maneira que as peças são cortadas a partir do objeto. Para resolver a relaxação linear deste modelo, os autores utilizaram o método de geração de colunas proposto por [Gilmore e Gomory, 1961, 1963]. Posteriormente, as colunas geradas foram utilizadas para obter uma solução inteira com o solver CPLEX. Trata-se, portanto, de um método heurístico, pois a solução inteira é obtida utilizando somente as colunas geradas durante o processo de geração de colunas, ou seja, algumas colunas que possivelmente fariam parte da solução ótima não estão disponíveis. Este tipo de estratégia tem sido bastante utilizada (por exemplo, [do Nascimento et al., 2020] e [Melega et al., 2020]) e tem obtido bons resultados.

3. Modelos matemáticos baseados em fluxo em arcos

Com o objetivo de reformular o PCEMA-1D de modo que possa ser resolvido de maneira exata por pacotes computacionais, duas formulações de fluxo em arcos são propostas: uma baseada no modelo alternativo para o PCE unidimensional, apresentada por [Wolsey, 1977] e estudado em [Valério De Carvalho, 1999, 2002]; a outra baseada em [Delorme e Iori, 2020] que modela uma instância do PCE considerando somente metade da capacidade da mochila.

3.1. Um modelo de fluxo em arcos

O problema de encontrar um padrão de corte válido é modelado por [Valério De Carvalho, 1999] como um problema de encontrar um caminho em um grafo acíclico direcionado $G = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$, para o qual $\mathcal{V} = \{0, 1, ..., L\}$, é o conjunto de vértices, onde L é o comprimento do objeto, e a distância de um vértice ao outro representa uma unidade de comprimento do objeto. O conjunto de arcos no grafo é definido como $\mathcal{A} = \{(a, b) : a < b;\ b - a = l_i,\ i \in I;\ a, b \in \mathcal{V}\} \cup \{(a, a + 1) : min(l_i) \leq a,\ a \in \mathcal{V}\backslash\{L\}\}$, onde l_i é o tamanho do item i, sendo que as perdas no objeto geradas do processo de corte são representadas pelos arcos adicionais entre os vértices $(a, a + 1)$.

Como o modelo apresenta muitas soluções simétricas, [Valério De Carvalho, 2002] apresentou três critérios de redução para eliminar alguns arcos e reduzir o número de soluções alternativas sem eliminar padrões de cortes válidos do conjunto $\mathcal{A}$. O primeiro critério consiste em alocar os itens em ordem decrescente de comprimento, ou seja, um item de comprimento l_1 só pode ser alocado depois de um item l_2 se $l_1 \leq l_2$, ou no início do objeto. O segundo critério não permite iniciar um objeto com perda. O último critério determina que, em cada padrão de corte, não são necessários mais arcos do que a demanda do item.

A Figura 2 ilustra um exemplo de grafos associados à formulação de fluxo em arcos com os critérios de redução, onde o tamanho da barra é $L = 8$, os itens tem tamanho $l = (6, 5, 3, 2)$ e a demanda de cada item é $d = (1, 1, 2, 2)$. Os arcos de perda são ilustrados com as linhas pontilhadas.

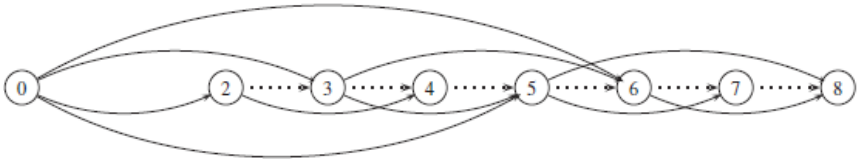

Figura 2: Representação da formulação de fluxo em arcos. Fonte: [Côté e Iori, 2018].

O modelo de fluxo em arcos para o PCEMA-1D é apresentado em (1) - (7) e a seguir estão os conjuntos, parâmetros e variáveis de decisão do modelo.

Conjuntos:
J $(j \in J,\ j = 1, ..., NJ)$: conjunto de ordens de produção de produtos finais a serem fabricados;
K $(k \in K,\ k = 1, ..., NK)$: conjunto de espessuras das matérias-primas unidimensionais;
I $(i \in I,\ i = 1, ..., NI)$: conjunto de tamanhos de itens a serem cortados;
M_j $(m \in M_j)$: conjuntos de modos alternativos para o atendimento de uma ordem de produção j.

Parâmetros:
d_j: demanda do produto final j;
θ_k: custo da matéria-prima de espessura k;
b_{ikm}: quantidade de itens de tamanho l_i e de espessura k utilizadas no modo de produção m.

Variáveis de decisão:
F_k: fluxo total no grafo, isto é, a quantidade de objetos de espessura k utilizados para atender a demanda;
X_{abk}: número de vezes que a matéria-prima de espessura k é cortada nas posições a e b;
Z_{jm}: quantidade de produto tipo j produzido no modo de produção m.

$$\min \sum_{k \in K} \theta_k F_k \tag{1}$$

s. a.:

$$-\sum_{(0,b) \in A} X_{0bk} = -F_k, \qquad \forall\, k \in K \tag{2}$$

$$\sum_{(a,b) \in A} X_{abk} - \sum_{(b,c) \in A} X_{bck} = 0, \qquad b = 1, ..., L-1, \forall\, k \in K \tag{3}$$

$$\sum_{(a,L)\in A} X_{aLk} = F_k, \qquad \forall\, k \in K \quad (4)$$

$$\sum_{(a,a+l_i)\in A} X_{a,a+l_i,k} \geq \sum_{j\in J} \sum_{m\in M_j} b_{ikm} Z_{jm}, \qquad \forall\, i \in I,\ k \in K \quad (5)$$

$$\sum_{m\in M_j} Z_{jm} \geq d_j, \qquad \forall\, j \in J \quad (6)$$

$$X_{abk},\ F_k,\ Z_{jm} \in \mathbb{Z}_+, \qquad \forall\, (a,b) \in A,\ k \in K,\ j \in J,\ m \in M_j \quad (7)$$

A função objetivo (1) busca minimizar o custo total com matérias-primas. As restrições (2), (3), (4) são as restrições de conservação de fluxo, derivadas do modelo de [Valério De Carvalho, 2002]. As restrições (5) garantem o cumprimento da demanda total de cada item i de cada matéria-prima k. As restrições (6) fazem com que a soma de todos os produtos j manufaturados em seus possíveis modos m ($m \in M_j$) seja igual ou superior à demanda deste produto (d_j). As restrições (7) são de domínio das variáveis de decisão.

3.2. Um modelo de fluxo em arcos aprimorado

Em [Delorme e Iori, 2020] os autores propuseram uma nova formulação de fluxo em arcos, chamada *Reflect*, que requer apenas metade da capacidade do objeto. A formulação é construída em um multi-grafo $G = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$, sendo $\mathcal{V} = \{0, 1, ..., L/2\}$ o conjunto de vértices que compreende somente a metade do tamanho do objeto. Em termos de arcos, a *Reflect* considera os mesmos da formulação anterior, mas: (i) "reflete" cada arco de item (d, e) tendo $d < L/2$ e $e > L/2$ em um arco $(d, L - e)$; (ii) remove todos os arcos de itens e de perda (d, e) com $d \geq L/2$; (iii) cria um último arco de perda conectando o vértice mais à direita antes de $L/2$ com $L/2$. Essas características resultam, portanto, numa nítida diminuição do número de variáveis e restrições requisitadas. A Figura 3 exemplifica os arcos formados pelo modelo para uma instância com três itens de tamanho $l = (7, 4, 3)$ e demanda unitária, onde a largura do objeto é $L = 11$. Na figura, R representa o vértice correspondente a $L/2$.

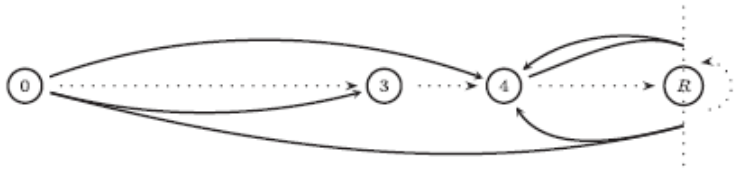

Figura 3: Representação da formulação *reflect*. Fonte: [Delorme e Iori, 2020].

Formalmente, o conjunto da arcos é dividido entre o conjunto de arcos padrões ($\mathcal{A}_s$) e o conjunto da arcos refletidos ($\mathcal{A}_r$). Os arcos padrões correspondem a todos aqueles itens e perdas que procedem da esquerda para a direita definidos como (d, e, s). Os arcos refletidos são os arcos de item $(d, L - e)$ definidos por $(d, L - e, r)$. Também incluí-se em $\mathcal{A}_r$ um arco $(L/2, L/2, r)$ para expressar pares de caminhos que colidem em $L/2$. Observa-se que pode haver um arco padrão e um arco refletido com os mesmos valores de início e fim, como é o caso dos arcos $(0, 4, s)$ e $(0, 4, r)$ da Figura 3. Usa-se (d, e, g) para indicar um arco genérico pertencente aos conjunto de arcos padrão ou refletidos. Para definir um subconjunto de arcos de itens associados ao tipo de item i, utiliza-se $\mathcal{A}_i = \{(d, d + l_i, s) \in \mathcal{A}_s \cup (d, L - (d + l_i), r) \in \mathcal{A}_r\}$. Usamos $\delta_s^-(e)$ e $\delta_r^-(e)$ para indicar os arcos padrões e refletidos, respectivamente, que entram no vértice e.

As equações (8) - (13) se referem ao PCEMA-1D baseado no modelo *Reflect*.

Variáveis de decisão:
ξ_{degk}: número de vezes que o arco (d, e, g) é escolhido na matéria-prima de espessura k.

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{(d,e,r) \in \mathcal{A}_r} \theta_k \xi_{derk} \tag{8}$$

s. a:

$$\sum_{(d,e,s) \in \delta_s^-(e)} \xi_{desk} = \sum_{(d,e,r) \in \delta_r^-(e)} \xi_{derk} + \sum_{(e,f,g) \in \delta^+(e)} \xi_{efgk} \qquad \forall\, k \in K,\ e \in \mathcal{V} \setminus \{0\} \tag{9}$$

$$\sum_{(0,e,g) \in \delta^+(0)} \xi_{0egk} = 2 \sum_{(d,e,r) \in \mathcal{A}_r} \xi_{derk} \qquad \forall\, k \in K \tag{10}$$

$$\sum_{(d,e,g) \in \mathcal{A}_i} \xi_{degk} \geq \sum_{j \in J} \sum_{m \in M_j} b_{imk} Z_{jm}, \qquad \forall\, i \in I,\ k \in K \tag{11}$$

$$\sum_{m \in M_j} Z_{jm} \geq d_j, \qquad \forall\, j \in J \tag{12}$$

$$\xi_{degk},\ Z_{jm} \in \mathbb{Z}_+ \qquad (d, e, g) \in \mathcal{A},\ k \in K,\ j \in J,\ m \in M_j \tag{13}$$

A função objetivo (8) minimiza o custo total com matérias-primas. As restrições (9) garantem que a quantidade de fluxo nos arcos padrão que entram em um nó e seja igual à quantidade de fluxo (nos arcos padrão e refletido) que sai de e somados à quantidade de fluxo dos arcos refletidos que entram em e para cada espessura de matéria-prima. As restrições (10) impõem condições de contorno ao forçar a quantidade de fluxo proveniente de 0 ser duas vezes a quantidade de objetos utilizados. As restrições (11) garantem o cumprimento da demanda total de cada item i de cada matéria-prima k. As restrições (12) fazem com que a soma de todos os produtos j manufaturados em seus possíveis modos m ($m \in M_j$) seja igual ou superior à demanda deste produto (d_j). As restrições (13) são de domínio das variáveis de decisão.

4. Experimentos computacionais

Um conjunto de 810 instâncias geradas aleatoriamente foi utilizado a fim de explorar o tempo e os limitantes de cada modelo de acordo com os parâmetros fornecidos. Todos os experimentos foram realizados em um computador com 16GB de memória RAM e processador i7, utilizando o CPLEX 12.8 para resolver o problema e linguagem OPL para codificar o modelo.

4.1. Descrição dos dados

As 810 instâncias utilizadas foram as mesmas geradas em [Lemos et al., 2021] com 30 produtos ($NJ = 30$), objetos de comprimento 1200 ($L = 1200$) e com 20, 30 e 40 tamanhos de itens diferentes (NI). O número de espessura das matérias-primas (NK) possui 2 cenários: 2 ou 8. O número de modos alternativos por produto (NM) tem três opções: 5, 10 ou 15. Os tamanhos de itens (l_i) variam em: *pequenos* ($l_i \in U[120,\ 360]$); *variados* ($l_i \in U[120,\ 840]$); *grandes* ($l_i \in U[360,\ 840]$). Por fim, o custo das matérias-primas tem três alternativas: *homogêneos* ($\theta_k \in U[1,\ 10]$); *heterogêneos* ($\theta_k \in U[1,\ 100]$); *idênticos* ($\theta_k = 1$). A notação U representa a distribuição uniforme em um conjunto discreto.

As demandas dos produtos finais foram geradas sempre entre 1 e 10 unidades ($d_j \in U[1,\ 10]$). As quantidades exigidas de um item i de determinada espessura k no modo alternativo m

(b_{ikm}) também foram geradas aleatoriamente, considerando 98% de chances de ser nulo ($b_{ikm} = 0$) e 2% seguindo uma distribuição uniforme entre 2 e 8 unidades ($b_{ikm} \in U[2,\ 8]$). O limite de 98% foi inspirado no exemplo industrial de [Lemos et al., 2021], onde 98% dos elementos b_{ikm} eram iguais a 0. A combinação desses cenários totalizam 162 conjuntos de parâmetros, para os quais 5 instâncias diferentes foram geradas aleatoriamente, totalizando 810 instâncias.

4.2. Resultados computacionais

Chamaremos de FA a formulação de fluxo em arcos proposta neste trabalho. No que se refere aos critérios de redução de arcos utilizados por [Valério De Carvalho, 2002], o modelo implementado neste artigo utilizou o critério de ordenação decrescente dos itens, e de eliminação dos arcos de perda. O critério relacionado à demanda, para o caso do problema aqui mostrado, não influenciou os resultados do modelo e aumentou o tempo para a geração da rede. Chamaremos de RE a formulação proposta neste trabalho baseada na *Reflect*. Chamaremos de GC o método de solução proposto em [Lemos et al., 2021], que é baseado em [Gilmore e Gomory, 1961] e numa heurística para obtenção de uma solução inteira.

Os dados foram submetidos aos modelos e o tempo limite de execução para encontrar a solução inteira foi limitado a 60 segundos, sendo o mesmo tempo utilizado para encontrar a solução inteira depois da geração de colunas na formulação de [Lemos et al., 2021]. Contudo, em FA, 9 das 810 instâncias não obtiveram solução viável nos 60 segundos. Para essas instâncias, aumentou-se o tempo gradativamente até alcançar uma solução.

Os limitantes superiores e o tempo de solução do modelo FA e do modelo RE são comparados com os do modelo GC. A comparação é feita utilizando o cálculo da variação percentual. A equação (14) foi utilizada para calcular a variação percentual dos limitantes superiores e dos tempos de solução entre as formulações para cada instância i. Dessa forma, as Tabelas 1 - 4 apresentam a comparação dessas características para um dado conjunto de parâmetros. Valores positivos indicam a porcentagem que os valores de FA e de RE melhoraram em relação a GC. Caso o valor seja negativo, isso significa que os atributos em FA e RE pioraram em relação ao modelo GC. As tabelas também utilizam uma escala de cores, sendo que tonalidades mais claras indicam os valores menores, e tonalidades escuras indicam os valores maiores.

$$\textit{variação percentual}_i = 1 - \frac{FA_i \textit{ ou } RE_i}{GC_i} \tag{14}$$

A Tabela 1 mostra que a média dos tempos de solução no modelo FA foi 38,4% menor comparado ao modelo da literatura. Ainda é possível notar que, nos itens com maiores quantidades de matérias-primas, o impacto da formulação no tempo de resolução é maior, enquanto que, para instâncias com menores quantidades de espessuras de matérias-primas (NK), a formulação, por vezes, precisou de mais tempo para encontrar a solução.

A Tabela 2 mostra a comparação dos tempos de solução para o modelo RE e GC. Em média, o tempo de solução diminuiu 61,2% no modelo RE, com destaque para as instâncias com itens grandes que apresentaram os maiores percentuais de melhoria.

As soluções encontradas pelo modelo de fluxo em arco melhoraram, em média, $0,02\%$ em relação ao modelo de geração de colunas. Na maioria das vezes, cerca de 56% das instâncias, as soluções foram as mesmas para ambas as formulações. Na Tabela 3, é possível observar que o modelo GC é superior, principalmente, nas instâncias de itens pequenos e NK maior.

A Tabela 4 mostra que a solução de RE melhorou, em média, 0,10% em relação a GC e na maioria das instâncias (59%) a solução dos dois modelos foram iguais. Instâncias com itens de

Tabela 1: Comparação dos tempos de solução de FA em relação à GC (em %).

			Itens de tamanho pequeno			Itens de tamanho variado			Itens de tamanho grande			
NK	NM	NI	Custos heterogêneos	Custos homogêneos	Custos idênticos	Custos heterogêneos	Custos homogêneos	Custos idênticos	Custos heterogêneos	Custos homogêneos	Custos idênticos	Média
2	5	20	-88,8	-6,5	93,5	-187,8	-85,3	-75,7	9,5	62,6	98,2	-20,0
		30	12,1	-20,6	23,6	-113,3	-62,5	81,2	-364,8	94,0	98,6	-28,0
		40	42,6	-8,2	94,8	-7,5	-44,1	97,0	-118,2	98,5	98,2	28,1
	10	20	39,9	61,5	94,7	-71,2	95,5	97,4	53,6	-256,5	99,1	23,8
		30	10,8	-22,0	86,1	-131,2	47,3	94,7	91,1	-21,5	99,0	28,3
		40	3,0	-24,2	29,0	-17,3	58,5	6,5	62,3	95,6	99,2	34,7
	15	20	78,6	-26,5	43,8	-125,3	71,5	97,8	80,7	98,8	98,8	46,5
		30	-30,3	-144,6	91,9	44,4	89,2	93,9	-188,3	89,4	96,4	15,8
		40	48,8	16,2	76,7	-18,7	63,9	89,8	-16,2	42,3	99,1	44,7
8	5	20	58,4	61,6	55,8	9,4	43,6	-7,7	82,7	-66,7	91,3	36,5
		30	80,3	83,1	77,9	55,4	30,1	57,9	-3,2	36,9	31,6	50,0
		40	89,4	71,0	56,0	78,0	81,8	76,3	64,9	73,4	75,5	74,0
	10	20	75,7	71,5	60,6	7,4	-65,0	-8,9	88,5	46,6	97,9	41,6
		30	79,7	81,2	83,2	69,9	77,7	52,6	-70,7	86,6	98,5	62,1
		40	92,9	91,6	89,5	74,2	87,0	75,7	58,1	58,7	99,0	80,7
	15	20	56,5	62,6	52,5	5,8	20,6	-23,6	-32,6	-34,5	96,9	22,7
		30	83,6	83,1	83,4	56,9	42,9	71,3	93,8	55,1	98,7	74,3
		40	90,9	91,4	89,8	76,1	80,4	79,1	46,6	42,8	77,1	74,9
Média			45,8	29,0	71,3	-10,8	35,2	53,1	-3,5	33,5	91,8	38,4

Tabela 2: Comparação dos tempos de solução de RE em relação à GC (em %).

			Itens de tamanho pequeno			Itens de tamanho variado			Itens de tamanho grande			
NK	NM	NI	Custos heterogêneos	Custos homogêneos	Custos idênticos	Custos heterogêneos	Custos homogêneos	Custos idênticos	Custos heterogêneos	Custos homogêneos	Custos idênticos	Média
2	5	20	-66,9	39,0	97,9	-187,8	-78,3	-71,4	98,1	94,8	97,6	2,6
		30	37,3	39,4	27,9	-198,8	-19,4	83,3	95,4	98,7	99,1	29,2
		40	45,9	64,7	98,5	-6,9	-41,9	99,1	99,1	99,4	99,1	61,9
	10	20	30,0	66,1	99,1	-71,1	98,6	99,2	52,5	98,6	98,7	63,5
		30	27,9	51,2	97,5	-130,8	53,0	98,5	99,1	98,3	99,6	54,9
		40	6,2	-9,3	89,5	43,8	62,2	53,0	99,3	99,6	99,7	60,4
	15	20	81,9	15,0	54,4	-125,1	96,3	99,5	99,5	99,0	99,3	57,7
		30	-30,0	-41,2	97,8	45,7	97,9	99,0	-74,3	98,7	97,6	43,5
		40	52,1	16,4	95,4	-18,3	75,8	98,7	-15,2	99,5	99,7	56,0
8	5	20	58,5	61,6	55,9	9,5	43,7	-12,5	99,7	99,0	99,3	57,2
		30	80,3	83,1	79,9	55,5	30,2	58,0	98,0	98,9	98,2	75,8
		40	89,5	88,5	92,2	78,1	81,9	76,4	98,7	95,8	79,8	86,8
	10	20	75,8	71,5	60,7	33,7	-64,7	0,1	99,2	99,2	99,5	52,8
		30	79,8	81,3	83,2	70,1	77,7	52,7	96,6	99,5	99,7	82,3
		40	92,9	91,6	93,2	74,3	87,1	75,9	99,2	98,7	99,8	90,3
	15	20	56,6	62,6	66,0	5,9	61,3	-19,6	98,6	98,5	99,0	58,8
		30	83,7	83,1	83,5	57,0	42,9	75,2	99,5	99,2	99,6	80,4
		40	90,9	92,1	92,8	76,2	80,5	78,5	91,1	89,9	99,7	88,0
Média			49,6	53,2	81,4	-10,5	43,6	58,0	79,7	98,1	98,1	61,2

tamanho pequeno e NK = 8 foram as que, em média, apresentaram as principais melhorias nesse índice.

Em relação aos limitantes inferiores, para todos os conjuntos de dados, a formulação de fluxo em arcos possui limitantes inferiores maiores ou iguais aos limitantes encontrados na formulação GC. Esse valor é, em média, 0,19% maior. Em geral, os limitantes inferiores do modelo de fluxo em arcos apresentaram maior vantagem nas instâncias com menores quantidades de espessura das barras (NK). Já formulação RE melhorou os limitantes inferiores das instâncias em 0,22%.

Tabela 3: Comparação dos limitantes superiores de FA em relação à GC (em %).

			Itens de tamanho pequeno			Itens de tamanho variado			Itens de tamanho grande			
NK	NM	NI	Custos heterogêneos	Custos homogêneos	Custos idênticos	Custos heterogêneos	Custos homogêneos	Custos idênticos	Custos heterogêneos	Custos homogêneos	Custos idênticos	Média
2	5	20	0,38	0,00	0,25	0,02	0,00	0,25	0,02	0,05	0,10	0,12
		30	0,17	-0,09	0,00	0,06	0,02	0,00	0,13	0,00	0,00	0,03
		40	0,09	-0,02	0,00	0,06	0,09	0,00	0,15	0,06	0,07	0,06
	10	20	0,23	0,20	0,00	0,04	0,25	0,00	0,11	0,03	0,00	0,10
		30	0,04	0,08	0,27	0,42	0,12	0,00	0,02	0,15	0,17	0,14
		40	0,17	-0,05	0,00	-0,02	0,14	0,00	0,10	0,03	0,43	0,09
	15	20	0,19	0,00	0,00	0,00	0,19	0,18	0,00	0,00	0,00	0,06
		30	-0,11	-0,09	0,00	0,38	0,00	0,22	0,07	0,11	0,10	0,07
		40	-0,12	-0,54	0,32	0,05	0,18	0,00	0,11	0,02	0,00	0,00
8	5	20	0,09	0,09	-0,16	0,05	0,06	0,00	0,03	0,01	0,09	0,03
		30	0,02	-0,21	-0,15	0,08	-0,02	-0,03	0,02	0,09	0,00	-0,02
		40	-0,66	-0,18	-0,22	0,04	0,03	0,02	0,00	0,03	0,01	-0,10
	10	20	-0,04	-0,35	-0,15	0,24	0,07	0,06	0,09	0,06	0,00	0,00
		30	-0,12	-0,18	-0,06	0,00	-0,02	0,00	0,02	0,11	0,03	-0,03
		40	-0,33	-0,28	-0,48	0,01	-0,02	-0,03	0,06	0,01	0,04	-0,11
	15	20	-0,31	0,42	-0,32	0,29	0,11	0,14	0,03	0,05	0,06	0,05
		30	-0,27	-0,26	0,25	0,00	0,10	0,02	0,02	0,00	0,12	0,00
		40	-0,24	-0,38	-0,18	-0,03	-0,02	0,07	0,04	0,03	0,04	-0,08
Média			-0,05	-0,10	-0,04	0,09	0,07	0,05	0,06	0,05	0,07	0,02

Tabela 4: Comparação dos limitantes superiores de RE em relação à GC (em %).

			Itens de tamanho pequeno			Itens de tamanho variado			Itens de tamanho grande			
NK	NM	NI	Custos heterogêneos	Custos homogêneos	Custos idênticos	Custos heterogêneos	Custos homogêneos	Custos idênticos	Custos heterogêneos	Custos homogêneos	Custos idênticos	Média
2	5	20	0,38	0,00	0,25	0,02	0,00	0,25	0,02	0,05	0,10	0,12
		30	0,17	0,04	0,00	0,06	0,02	0,00	0,13	0,00	0,00	0,05
		40	0,01	0,14	0,00	0,08	0,09	0,00	0,15	0,06	0,07	0,07
	10	20	0,22	0,15	0,00	0,10	0,25	0,00	0,11	0,03	0,00	0,10
		30	0,04	0,21	0,27	0,42	0,12	0,00	0,02	0,15	0,17	0,16
		40	0,22	0,10	0,00	0,08	0,14	0,00	0,10	0,03	0,43	0,12
	15	20	0,19	0,00	0,00	0,00	0,19	0,18	0,00	0,00	0,00	0,06
		30	0,08	0,05	0,00	0,42	0,00	0,22	0,07	0,11	0,10	0,12
		40	0,09	-0,11	0,32	0,11	0,18	0,00	0,11	0,02	0,00	0,08
8	5	20	0,25	0,09	0,02	0,05	0,14	0,05	0,03	0,01	0,09	0,08
		30	0,24	0,21	0,20	0,09	0,00	0,00	0,02	0,09	0,00	0,10
		40	0,04	0,18	0,09	0,07	0,05	0,04	0,00	0,03	0,01	0,06
	10	20	0,05	-0,02	0,35	0,24	0,07	-0,01	0,09	0,06	0,00	0,09
		30	0,41	0,31	0,00	0,10	0,01	0,05	0,02	0,11	0,03	0,11
		40	0,07	0,08	0,19	0,01	0,02	0,00	0,06	0,01	0,04	0,05
	15	20	0,17	0,89	0,14	0,37	0,11	0,08	0,03	0,05	0,06	0,21
		30	0,10	0,30	0,31	0,08	0,12	0,26	0,02	0,00	0,12	0,15
		40	0,24	0,15	0,24	0,02	0,06	0,08	0,04	0,03	0,04	0,10
Média			0,16	0,15	0,13	0,13	0,09	0,07	0,06	0,05	0,07	0,10

Da mesma forma que em FA, em RE nenhuma instância apresentou piora no valor do limitante inferior. As instâncias com itens pequenos e NK = 2 foram as que obtiveram as principais melhoras no parâmetro.

As Tabelas 5 e 6 apresentam as comparações do tempo de solução e limitantes superiores, entre os modelos RE e FA, respectivamente. Os valores nessas tabelas também são calculados pela equação (14), sendo RE o numerador e FA o denominador. Portanto, valores positivos favorecem RE e valores negativos ao modelo FA. Da mesma forma, as tabelas utilizam escalas de cores, onde

os maiores valores estão em tons mais escuros e os menores valores em tons mais claros.

A Tabela 5 mostra que o modelo RE encontrou as soluções, em média, em um tempo 32,1% menor do que o modelo FA. Instâncias com itens de tamanho grande e maior valor de NK apresentaram os melhores tempos.

Tabela 5: Comparação dos tempos de solução de RE em relação à FA (em %).

			Itens de tamanho pequeno			Itens de tamanho variado			Itens de tamanho grande			
NK	NM	NI	Custos heterogêneos	Custos homogêneos	Custos idênticos	Custos heterogêneos	Custos homogêneos	Custos idênticos	Custos heterogêneos	Custos homogêneos	Custos idênticos	Média
2	5	20	19,5	37,2	65,2	-17,6	52,6	58,7	71,0	-13,9	-72,8	22,2
		30	19,3	68,3	61,2	-458,7	28,9	53,3	53,6	37,8	39,5	-10,8
		40	16,6	52,3	69,8	16,2	34,0	70,8	70,9	51,2	36,6	46,5
	10	20	-34,5	43,2	80,9	6,4	72,5	67,4	21,8	13,6	-41,5	25,5
		30	24,8	56,2	34,9	16,9	67,1	71,1	66,1	64,7	50,4	50,3
		40	14,5	34,8	75,2	34,5	57,3	64,0	87,7	65,3	60,0	54,8
	15	20	52,8	63,6	68,5	-0,7	51,4	52,1	63,1	3,0	20,5	41,6
		30	0,2	53,8	70,1	26,7	73,4	74,2	54,5	47,4	-24,4	41,8
		40	17,0	0,2	80,8	0,2	53,9	79,2	53,3	63,0	38,8	42,9
8	5	20	0,2	0,1	0,3	0,2	0,2	-44,6	86,5	77,0	71,0	21,2
		30	0,4	0,3	6,9	0,2	0,2	0,3	88,7	90,6	84,7	30,3
		40	0,6	18,5	47,3	0,3	0,5	0,6	93,0	84,4	67,0	34,7
	10	20	0,2	0,1	0,2	30,7	0,2	-1,1	85,4	74,7	70,8	29,0
		30	0,4	0,4	0,4	0,5	0,3	0,4	98,4	89,3	75,6	29,5
		40	0,6	0,7	26,4	0,3	0,2	0,5	85,0	96,7	77,5	32,0
	15	20	0,1	0,0	29,9	0,2	31,3	16,2	73,3	72,9	53,8	30,9
		30	0,5	0,2	0,5	0,2	0,2	16,4	82,6	85,2	54,5	26,7
		40	0,7	7,2	13,9	0,3	0,4	-8,6	74,4	73,8	91,4	28,2
Média			7,4	24,3	40,7	-19,1	29,1	31,7	72,7	59,8	41,9	32,1

Tabela 6: Comparação dos limitantes superiores de RE em relação à FA (em %).

			Itens de tamanho pequeno			Itens de tamanho variado			Itens de tamanho grande			
NK	NM	NI	Custos heterogêneos	Custos homogêneos	Custos idênticos	Custos heterogêneos	Custos homogêneos	Custos idênticos	Custos heterogêneos	Custos homogêneos	Custos idênticos	Média
2	5	20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
		30	0,00	0,13	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01
		40	-0,08	0,16	0,00	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01
	10	20	-0,01	-0,06	0,00	0,06	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
		30	0,00	0,13	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01
		40	0,06	0,15	0,00	0,10	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,03
	15	20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
		30	0,19	0,14	0,00	0,04	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,04
		40	0,21	0,42	0,00	0,06	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,08
8	5	20	0,17	0,00	0,18	0,00	0,08	0,04	0,00	0,00	0,00	0,05
		30	0,22	0,42	0,35	0,01	0,02	0,03	0,00	0,00	0,00	0,12
		40	0,70	0,36	0,31	0,03	0,03	0,02	0,00	0,00	0,00	0,16
	10	20	0,09	0,32	0,50	0,00	0,00	-0,07	0,00	0,00	0,00	0,09
		30	0,52	0,48	0,06	0,10	0,03	0,05	0,00	0,00	0,00	0,14
		40	0,40	0,36	0,66	0,00	0,04	0,03	0,00	0,00	0,00	0,17
	15	20	0,47	0,46	0,46	0,08	0,00	-0,06	0,00	0,00	0,00	0,16
		30	0,36	0,56	0,07	0,08	0,02	0,24	0,00	0,00	0,00	0,15
		40	0,48	0,52	0,42	0,04	0,08	0,01	0,00	0,00	0,00	0,17
Média			0,21	0,25	0,17	0,03	0,02	0,02	0,00	0,00	0,00	0,08

Em relação aos limitantes superiores, a formulação RE se destaca nas instâncias com itens de tamanho pequeno e maior NK, onde se concentra os maiores valores da Tabela 6. Em média, RE melhorou a solução em 0,08%. Também é possível observar que, para a maioria dos conjuntos de

instâncias, o valor da solução não apresentou variação.

Para os limitantes inferiores houve pouca variação entre os modelos. Em geral, o modelo RE melhorou os limitantes inferiores em 0,03%. Também se destaca que em cerca de 25% dos conjuntos de instâncias os valores dos limitantes coincidiram.

5. Conclusões e propostas futuras

Neste artigo são realizados estudos de desempenho para dois novos modelos do problema de corte de estoque com modos alternativos de manufatura (PCEMA-1D) encontrado na literatura. Além de fornecer dois modelos alternativos baseados na formulação de fluxo em arcos, esse artigo também comparou essas novas formulações com os resultados de [Lemos et al., 2021], que primeiro introduziu a integração do problema de corte de estoque com diferentes modos de manufatura desenvolvendo um método de solução baseado no procedimento de geração de colunas.

Um total de 810 instâncias aleatórias foram utilizadas a fim de testar as influências dos parâmetros e comparar as formulações com o modelo da literatura. Os resultados apontam que o modelo de fluxo em arcos tradicional consegue obter soluções com redução de 38,4% no tempo, em média, e o modelo que utiliza arcos refletidos, melhora o tempo de solução em 61,2%, apesar de ambos não apresentarem melhoria significativa nos valores das soluções. Além disso, os novos modelos de fluxo em arcos alcançam maiores limitantes inferiores.

O modelo *reflect* proposto por [Delorme e Iori, 2020], que reduz o número de variáveis e restrições do modelo, conseguiu encontrar a solução de todas as instâncias dentro do tempo limite estipulado em 60 segundos, superando, então, a limitação do modelo de fluxo em arcos que em 9 instâncias não conseguiu encontrar soluções no tempo determinado.

Novos estudos do PCEMA-1D podem englobar a extensão do problema para o caso multi-período, onde há a possibilidade de estocar itens e produtos finais, ou ainda, o estudo de outras formulações para o problema, como por exemplo, a formulação proposta por [Côté e Iori, 2018], chamada *meet in the middle*, cuja ideia central é alinhar os itens no início ou no fim dos objetos, diminuindo a quantidade de arcos requisitados.

Agradecimentos

Os autores agradecem a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) (Processos 305261/2018-5 e 406335/2018-4) e Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) (Processos 2013/07375-0 e 2016/01860-1) pelo apoio financeiro.

Referências

Côté, J. F. e Iori, M. (2018). The meet-in-the-middle principle for cutting and packing problems. *INFORMS Journal on Computing*, 30(4):646–661.

Delorme, M. e Iori, M. (2020). Enhanced pseudo-polynomial formulations for bin packing and cutting stock problems. *INFORMS Journal on Computing*, 32(1):101–119.

Delorme, M., Iori, M., e Martello, S. (2016). Bin packing and cutting stock problems: Mathematical models and exact algorithms. *European Journal of Operational Research*, 255(1):1–20.

do Nascimento, D., de Araujo, S., e Cherri, A. (2020). Integrated lot-sizing and one-dimensional cutting stock problem with usable leftovers. *Annals of Operations Research*, p. 1–19.

Dyckhoff, H. (1990). A typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, 44:145–159.

Gilmore, P. C. e Gomory, R. E. (1961). A linear programming approach to the cutting-stock problem. *Operations Research*, 9(6):849–859.

Gilmore, P. C. e Gomory, R. E. (1963). A linear programming approach to the cutting stock problem—part ii. *Operations research*, 11(6):863–888.

Lemos, F. K., Cherri, A. C., e de Araujo, S. A. (2021). The cutting stock problem with multiple manufacturing modes applied to a construction industry. *International Journal of Production Research*, 59(4):1088–1106.

Liu, Q., Geng, X., Dong, M., Lv, W., e Ye, C. (2017). Scheduling optimization of design stream line for production research and development projects. *Engineering Optimization*, 49(5):896–914.

Melega, G. M., de Araujo, S. A., e Morabito, R. (2020). Mathematical model and solution approaches for integrated lot-sizing, scheduling and cutting stock problems. *Annals of Operations Research*, 295(2):695–736.

Santoro, M. C. e Lemos, F. K. (2015). Irregular packing: Milp model based on a polygonal enclosure. *Annals of Operations Research*, 235(1):693–707.

Valério De Carvalho, J. (1999). Exact solution of bin-packing problems using column generation and branch-and-bound. *Annals of Operations Research*, 86:629–659.

Valério De Carvalho, J. (2002). Lp models for bin packing and cutting stock problems. *European Journal of Operational Research*, 141(2):253–273.

Wäscher, G., Hauβner, H., e Schumann, H. (2007). An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, 183(3):1109–1130.

Wolsey, L. A. (1977). Valid inequalities, covering problems and discrete dynamic programs. In *Annals of Discrete Mathematics*, volume 1, p. 527–538. Elsevier.

Wuttke, D. A. e Heese, H. S. (2018). Two-dimensional cutting stock problem with sequence dependent setup times. *European Journal of Operational Research*, 265(1):303–315.

Yanasse, H. H. e Lamosa, M. J. P. (2007). An integrated cutting stock and sequencing problem. *European Journal of Operational Research*, 183(3):1353–1370.