LIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional
João Pessoa - PB, 3 a 5 de novembro de 2021

Multicriteria decision making: Dealing with criteria interactions by means of latent variable analysis

Guilherme Dean Pelegrina, João Marcos Travassos Romano
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - Universidade Estadual de Campinas
Av. Albert Einstein, 400, Distrito Barão Geraldo, Campinas - SP, Brasil, CEP 13083-852
pelegrina@decom.fee.unicamp.br, romano@dmo.fee.unicamp.br

Leonardo Tomazeli Duarte
Faculdade de Ciências Aplicadas - Universidade Estadual de Campinas
Rua Pedro Zaccaria, 1300, Limeira - SP, Brasil, CEP 13484-350
leonardo.duarte@fca.unicamp.br

Michel Grabisch
Centre d'Économie de la Sorbonne - Université Paris I Panthéon-Sorbonne
106-112 boulevard de l'Hôpital, 75647 Paris Cedex 13, França
Michel.Grabisch@univ-paris1.fr

RESUMO

Um problema típico em tomada de decisão multicritério (MCDM) consiste em ordenar um conjunto de alternativas com base em um conjunto de critérios de decisão. Uma propriedade esperada sobre os critérios é que eles não sejam redundantes, o que, muitas vezes, não acontece em situações práticas. No entanto, a maioria dos métodos não leva em consideração as informações estruturais dos dados e, portanto, o ordenamento pode ser enviesado para alternativas com bom desempenho apenas nos critérios redundantes. Nesse contexto, o objetivo principal desta tese é lidar com critérios redundantes em problemas de MCDM. Para tanto, estudamos a aplicação de funções de agregação que modelam interações entre critérios. Além disso, também consideramos a aplicação de métodos de análise de variáveis latentes a fim de extrair informações relevantes dos dados de decisão, os quais podem levar a um ordenamento mais justo das alternativas.

PALAVRAS CHAVE. Tomada de decisão, Estimação de parâmetros, Variáveis latentes.

ADM – Apoio à Decisão Multicritério

ABSTRACT

A typical problem in multicriteria decision making (MCDM) consists in ranking a set of alternatives based on a set of decision criteria. An expected property about the criteria is that they are not redundant, which very often does not happen in practical situations. However, most methods do not take into account the structural information of the data and, therefore, the ranking can be biased towards alternatives with good performance only in the redundant criteria. In this context, the main objective of this thesis is to deal with redundant criteria in MCDM problems. For this purpose, we investigate the application of aggregation functions that model interactions between criteria. Moreover, we also consider the application of latent variables analysis methods in order to extract relevant information from the decision data, which can lead to a fairer ranking of the alternatives.

KEYWORDS. Decision making, Parameters estimation, Latent variables.

ADM - Multicriteria decision aiding

1. Introdução

Via de regra, os métodos usados para lidar com prolemas de Tomada de Decisão Multicritério (MCDM) [Greco et al., 2016] não levam em consideração as informações contidas no conjunto de dados de decisão e, portanto, redundâncias entre os critérios são frequentemente negligenciadas. Por exemplo, ao usar a média aritmética ponderada, se não forem consideradas as relações intercritérios, a classificação pode ser enviesada para alternativas com bom desempenho apenas nos critérios redundantes. Portanto, é importante estar atento às informações estruturais dos dados a fim de adotar parâmetros decisórios que possam evitar resultados injustos.

Na literatura, podem ser encontrados alguns métodos que foram concebidos para lidar com critérios dependentes. Um exemplo é o método TOPSIS-M [Vega et al., 2014], que extrai estatísticas de segunda ordem dos dados de decisão e usa essas informações para mitigar os efeitos enviesados. Embora tenha sido aplicada em várias situações, o uso de estatísticas de segunda ordem para lidar com dependências nos dados de decisão é questionável, uma vez que não garante que lidamos com a dependência estatística. Portanto, uma abordagem baseada em estatísticas de ordem superior poderia ser usada para extrair informações relevantes que levam a dados independentes.

Além disso, também existem os métodos baseados em coeficientes de capacidade, como a integral de Choquet e o modelo multilinear [Grabisch, 2016]. No caso de uma correlação positiva, eles podem ser usados para modelar um efeito redundante entre os critérios. No entanto, essas funções de agregação exigem a definição de um conjunto de parâmetros cujo número aumenta exponencialmente com o número de critérios, o que pode trazer uma dificuldade na sua aplicação.

Com base nas motivações mencionadas acima, o objetivo principal desta tese de doutorado consiste em lidar com redundâncias em problemas de MCDM. Visto que a literatura sobre o uso do modelo multilinear é menos abundante em comparação com a integral de Choquet, investigamos o uso da primeira função. Além disso, verificamos a aplicação de métodos de Análise de Variáveis Latente (LVA) para extrair as informações relevantes dos dados coletados. Essas informações serão usadas para definir os parâmetros de decisão que podem levar a classificações mais justas das alternativas. Na sequência, apresentamos uma lista das contribuições resultantes desta tese de doutorado e, em seguida, um resumo das nossas principais contribuições.

2. Publicações

Artigos publicados em periódicos internacionais $[1, 2]$ e anais de eventos $[3, 4, 5, 6]$:

- [1] Pelegrina, G. D., Duarte, L. T., and Romano, J. M. T. Application of independent component analysis and TOPSIS to deal with dependent criteria in multicriteria decision problems. *Expert Systems with Applications*, 122:262–280, 2019.

- [2] Pelegrina, G. D., Duarte, L. T., Grabisch, M., and Romano, J. M. T. The multilinear model in multicriteria decision making: The case of 2-additive capacities and contributions to parameter identification. *European Journal of Operational Research*, 282:945–956, 2020.

- [3] Pelegrina, G. D., Duarte, L. T., and Romano, J. M. T. Multicriteria decision making based on independent component analysis: A preliminary investigation considering the TOPSIS approach. In Deville Y., Gannot S., Mason R., Plumbley M., and Ward D., editors, *Latent Variable Analysis and Signal Separation (LVA/ICA 2018). Lecture Notes in Computer Science*, volume 10891, pages 568–577. Springer, Cham, 2018.

- [4] Pelegrina, G. D., Duarte, L. T., and Romano, J. M. T. Análise de componentes independentes para ajuste não supervisionado dos pesos em decisão multicritério. In *LI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (SBPO 2019)*. Galoá, Limeira, Brazil, 2019.

- [5] Pelegrina, G. D., Duarte, L. T., Grabisch, M., and Romano, J. M. T. Multilinear model: New issues in capacity identification. In *From Multiple Criteria Decision Aid to Preference Learning (DA2PL'2018) Workshop*. Poznan, Poland, 2018.

- [6] Pelegrina, G. D., Duarte, L. T., Grabisch, M., and Romano, J. M. T. An unsupervised capacity identification approach based on Sobol' indices. In Torra V., Narukawa Y., Nin J., Agell N., editors, *Modeling Decisions for Artificial Intelligence (MDAI 2020). Lecture Notes in Computer Science*, volume 12256, pages 66–77. Springer, Cham, 2020.

3. Contribuições

3.1. Aplicação da ICA e do TOPSIS para lidar com critérios dependentes

Na primeira contribuição, apresentamos uma discussão teórica sobre o método TOPSIS-M. Além disso, propomos uma abordagem baseada em Análise de Componentes Independentes (ICA) [Comon e Jutten, 2010] para lidar com dependências nos dados de decisão. Os detalhes dessa proposta foram apresentados nos artigos $[1, 3]$.

3.1.1. Análise teórica sobre o método TOPSIS-M

É comum a versão clássica do método TOPSIS ser aplicada em problemas de MCDM nos quais os critérios de decisão são independentes. No entanto, uma versão estendida, chamada TOPSIS-M [Vega et al., 2014] foi concebida para lidar com cenários em que os dados de decisão são dependentes. Para isso, o TOPSIS-M se baseia no cálculo da distância de Mahalonobis, o qual considera informações sobre a matriz de covariância $\mathbf{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{M}}}$ dos dados de decisão $\tilde{\mathbf{M}}$ (normalizados). Portanto, este método não busca a independência dos dados, mas a descorrelação dos mesmos. Provamos essa característica no seguinte teorema:

Teorema 1 *Assumindo a mesma importância para todos os critérios observados (ou seja, pesos $w_i = w_{i'}$ para todos i e i') e que $\mathbf{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{M}}}$ é uma matriz definida positiva, a distância de Mahalanobis calculada no TOPSIS-M é equivalente à distância Euclidiana em um espaço transformado no qual os dados são descorrelacionados.*

Sendo assim, uma abordagem que busque a independência estatística dos dados poderia levar a ordenamentos menos enviesados. Discutimos nossa proposta na próxima seção.

3.1.2. Formulação do problema baseado na ICA

Seja $\hat{\mathbf{M}} = (u_{j,i})$ a matriz de decisão cujos elementos $u_{j,i}$ representam as avaliações das alternativas a_j, $j = 1, \ldots, n$, em relação aos critérios c_i, $i = 1, \ldots, m$. Geralmente, o método de MCDM é aplicado diretamente sobre $\hat{\mathbf{M}}$. No entanto, uma vez que estamos interessados em problemas de MCDM nos quais $\hat{\mathbf{M}}$ pode ser visto como um conjunto de critérios dependentes, consideramos que uma representação alternativa dos dados de decisão, em que os critérios são independentes, deveria ser usada como entrada do método TOPSIS. O procedimento de extrair essa nova representação de $\hat{\mathbf{M}}$ pode ser visto como um problema de separação (ou extração) de fatores latentes independentes $\mathbf{L}$ de um conjunto de misturas desses fatores [Comon e Jutten, 2010]. Considerando uma formulação adotada em processamento de sinais, $\hat{\mathbf{M}}$ pode ser modelada como

$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{AL} + \mathbf{G}, \tag{1}$$

onde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é a matriz de mistura e $\mathbf{G} = (g_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é a matriz de ruído gaussiano branco aditivo. Neste cenário, cada avaliação $u_{j,i}$ compreende uma combinação linear das avaliações da alternativa a_j em relação ao conjunto de critérios latentes independentes. Ao assumir que $\mathbf{L}$ é a

representação alternativa dos dados que deve ser usada para derivar o ordenamento das alternativas, a aplicação do TOPSIS diretamente nos critérios dependentes $\hat{\mathbf{M}}$ pode levar a resultados enveisados. Portanto, nosso objetivo é ajustar uma matriz de transformação $\mathbf{B}$ que forneça as estimativas

$$\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{M}} \tag{2}$$

para os dados independentes $\mathbf{L}$, ou seja, a representação alternativa dos critérios de decisão em que os dados são independentes. Neste cenário, $\mathbf{B}$ pode ser obtido usando uma técnica ICA. Portanto, propusemos dois métodos baseados em ICA (ICA-TOPSIS e ICA-TOPSIS-M) para lidar com os critérios dependentes. A ideia principal é aplicar uma técnica ICA nos dados de decisão $\hat{\mathbf{M}}$ e usar as informações contidas na matriz de mistura estimada $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{B}^{-1}$ em métodos TOPSIS ou TOPSIS-M.

Verificamos nossa proposta tanto em conjuntos de dados sintéticos quanto reais. Em problemas de decisão com critérios dependentes, o TOPSIS clássico levou a ordenamentos nos quais as alternativas com bom desempenho apenas em critérios redundantes alcançaram as primeiras posições. No entanto, nossa proposta conseguiu mitigar esses resultados enviesados.

3.2. Uma abordagem automática para ajustar os pesos da média aritmética ponderada

Como segunda contribuição, propomos uma abordagem automática que permite ajustar os pesos usados na média aritmética ponderada (WAM) de forma a mitigar os efeitos enviesados proporcionados por critérios redundantes. Para tanto, formulamos o problema como mencionado na contribuição anterior e investigamos se a informação obtida por uma técnica de análise de variáveis latentes pode ser utilizada para realizar os ajustes. O artigo [4] discorre sobre essa contribuição.

3.2.1. Abordagem proposta

Neste estudo, assumimos que as redundâncias que observamos nos dados de decisão $\hat{\mathbf{M}}$ vieram de uma mistura de variáveis latentes $\mathbf{L}$, ou seja, $\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{A}\mathbf{L}$. Como não há redundâncias entre $\mathbf{L}$, consideramos que essas variáveis são as corretas para aplicar a WAM. Portanto, o vetor $\mathbf{r}$ que contém as avaliações globais das alternativas pode ser obtido por

$$\mathbf{r} = \mathbf{w}^T\mathbf{L} = \mathbf{w}^T\mathbf{A}^{-1}\hat{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{w}}^T\hat{\mathbf{M}}, \tag{3}$$

onde $\mathbf{w}$ é o vetor de pesos iniciais fornecido pelo tomador de decisão (por meio de um método de elicitação, por exemplo) e $\hat{\mathbf{w}} = \left(\mathbf{w}^T\mathbf{A}^{-1}\right)^T$ é o vetor de pesos ajustados que carrega a informação usada para mitigar o viés introduzido pelas correlações nos dados de decisão. Portanto, ao considerar $\mathbf{w}$ no cálculo das avaliações globais, permitimos que o tomador de decisão expresse sua preferência sobre o conjunto de critérios sem levar em conta as redundâncias entre eles. Além disso, é importante garantir que $\hat{\mathbf{w}}$ seja normalizado de maneira que $\sum_i^m \hat{w}_i = 1$.

Da mesma forma que na contribuição anterior, o objetivo aqui é estimar a matriz de mistura $\mathbf{A}$. Portanto, uma técnica de ICA, que se baseia em estatísticas de ordem superior, é uma boa candidata para essa tarefa. No entanto, também investigamos se as informações fornecidas pelas estatísticas de segunda ordem são suficientes para ajustar os pesos. Para este propósito, além da aplicação da ICA, também consideramos em nossos experimentos a matriz de branqueamento [Comon e Jutten, 2010] que pode ser obtida na etapa de pré-processamento da ICA.

3.2.2. Resultados para problemas de decisão com diferentes níveis de correlação

Um dos experimentos conduzidos nesta contribuição avaliou nossa proposta em problemas de decisão com diferentes níveis de correlação $\rho_{2,3}$ entre os critérios 2 e 3. Para tanto, geramos problemas de decisão com 500 alternativas e $\rho_{2,3}$ no intervalo $[-0,9, 0,9]$. A fim de ilustrar os resultados obtidos, a Tabela 1 apresenta os pesos ajustados (valor médio, com base em 1000 simulações) para a aplicação do branqueamento (o qual gerou resultados melhores que a ICA). Pode-se notar que os ajustes nos pesos foram proporcionais à intensidade da correlação entre os critérios 2 e 3. Quanto maior a correlação, maiores são os ajustes nos pesos dos critérios.

Tabela 1: Pesos ajustados pelo branqueamento.

	$\rho_{2,3}$								
	-0,9	-0,7	-0,5	-0,3	0	0,3	0,5	0,7	0,9
$\hat{w}_1$	0,16	0,24	0,27	0,30	0,34	0,36	0,38	0,41	0,45
$\hat{w}_2$	0,42	0,38	0,37	0,35	0,33	0,32	0,31	0,29	0,28
$\hat{w}_3$	0,42	0,38	0,36	0,35	0,33	0,32	0,31	0,30	0,27

3.3. Estudos sobre o modelo multilinear

Esta contribuição apresenta análises tanto teóricas quanto experimentais sobre o uso do modelo multilinear em problemas de MCDM. Nesse sentido, formulamos a expressão do modelo multilinear 2-aditivo e abordamos o problema de identificação supervisionada da capacidade com regularização. Os artigos [2, 5] apresentam as nossas propostas. Vale ressaltar que a literatura existente aborda esses tópicos no contexto da integral de Choquet [Grabisch et al., 2008]. No entanto, até onde sabemos, havia uma lacuna na literatura a respeito do modelo multilinear.

Seja $\mu : 2^C \to \mathbb{R}$ uma capacidade (a qual satisfaz os axiomas de monotonicidade e normalização) [Choquet, 1954], onde $C = \{1, \ldots, m\}$ é o conjunto de todos os critérios. O modelo multilinear [Grabisch, 2016] é dado pela expressão

$$F_{ML}(u(\mathbf{x})) = \sum_{A \subseteq C} \mu(A) \prod_{i \in A} u_i(x_i) \prod_{i \in \overline{A}} (1 - u_i(x_i)), \tag{4}$$

onde $u_i(x_i) \in [0, 1]$ e $\overline{A}$ é o complemento do subconjunto A. Um aspecto interessante é que há uma representação alternativa de μ, chamada de índice de interação de Banzhaf, a qual podemos atribuir interpretações acerca dos parâmetros do modelo. Para um subconjunto A, ele é dado por:

$$I^{\mathcal{B}}(A) = \frac{1}{2^{|C|-|A|}} \sum_{B \subseteq C \setminus A} \sum_{B' \subseteq A} (-1)^{|A|-|B'|} \mu(B' \cup B), \forall A \subseteq C. \tag{5}$$

Em particular, para um par de critérios i, i', temos a seguinte interpretação: se $I^{\mathcal{B}}_{i,i'} < 0$, modelamos uma interação negativa (redundância) entre os critérios i, i'; se $I^{\mathcal{B}}_{i,i'} > 0$, modelamos uma interação positiva (complementariedade) entre os critérios i, i'; se $I^{\mathcal{B}}_{i,i'} = 0$, nenhuma interação é modelada entre os critérios i, i'. Portanto, $I^{\mathcal{B}}_{i,i'} < 0$ pode ser usado para penalizar critérios redundantes.

3.3.1. O modelo multilinear 2-aditivo

Problemas de decisão com muitos critérios traz dificuldades na definição da capacidade, uma vez que o número de parâmetros aumenta exponencialmente com o número de critérios. A fim de reduzir esse número, podemos adotar uma capacidade 2-aditiva, a qual consiste em um modelo tal que $I^{\mathcal{B}}(A) = 0$ para todo A tal que $|A| \geq 3$. Nesta tese, apresentamos uma definição formal do modelo multilinear 2-aditivo:

$$F_{ML}(u(\mathbf{x})) = \sum_i u_i \left(I^{\mathcal{B}}_i - \tfrac{1}{2} \sum_{i'} \left| I^{\mathcal{B}}_{i,i'} \right| \right) + \sum_{I^{\mathcal{B}}_{i,i'} < 0} (u_i + u_{i'} - u_i u_{i'}) \left| I^{\mathcal{B}}_{i,i'} \right| + \sum_{I^{\mathcal{B}}_{i,i'} > 0} (u_i u_{i'}) \, I^{\mathcal{B}}_{i,i'}. \tag{6}$$

Um aspecto interessante é que a Equação (6) é similar à integral de Choquet 2-aditivo, dada por

$$F_{CI}(u(\mathbf{x})) = \sum_i u_i \left(I^{\mathcal{S}}_i - \tfrac{1}{2} \sum_{i'} \left| I^{\mathcal{S}}_{i,i'} \right| \right) + \sum_{I^{\mathcal{S}}_{i,i'} < 0} (u_i \vee u_{i'}) \left| I^{\mathcal{S}}_{i,i'} \right| + \sum_{I^{\mathcal{S}}_{i,i'} > 0} (u_i \wedge u_{i'}) I^{\mathcal{S}}_{i,i'}, \tag{7}$$

onde $I^{\mathcal{S}}_i$ e $I^{\mathcal{S}}_{i,i'}$ são os índices de interação baseados na valor de Shapley [Grabisch, 2016] e $\vee$ e $\wedge$ representam os operadores de máximo e mínimo, respectivamente. Uma vez que, para uma capacidade 2-aditiva, $I^{\mathcal{B}}_i = I^{\mathcal{S}}_i =: I_i$ e $I^{\mathcal{B}}_{i,i'} = I^{\mathcal{S}}_{i,i'} =: I_{i,i'}$ [Marichal e Roubens, 2000], podemos generalizar as Equações (6) e (7) de acordo com uma t-conorma $\mathbf{N}$ e uma t-norma pela $\mathbf{T}$:

$$F_{\mathbf{N},\mathbf{T}}(u(\mathbf{x})) = \sum_i u_i \left(I_i - \tfrac{1}{2} \sum_{i'} \left| I_{i,i'} \right| \right) + \sum_{I_{i,i'} < 0} \mathbf{N}(u_i, u_{i'}) \left| I_{i,i'} \right| + \sum_{I_{i,i'} > 0} \mathbf{T}(u_i, u_{i'}) I_{i,i'}. \tag{8}$$

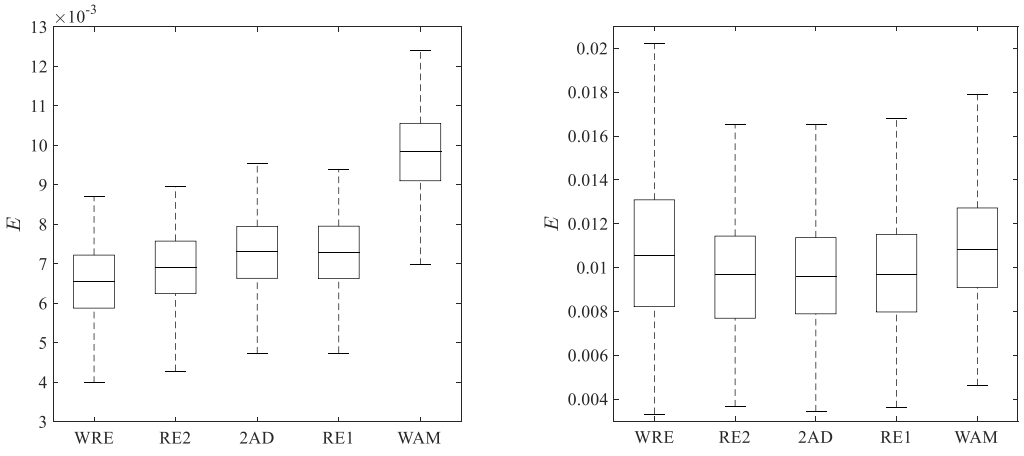
3.3.2. Identificação da capacidade: Uma abordagem supervisionada com regularização

Outra contribuição no contexto do modelo multilinear foi a formulação do problema de identificação de capacidade com a inclusão de um termo de regularização. Ele é dado por:

$$\begin{array}{ll} \min_{\mathbf{I}^{\mathcal{B}}} & \frac{1}{2}\left(\mathbf{I}^{\mathcal{B}}\right)^{T}\mathbf{Q}'\mathbf{I}^{\mathcal{B}} + \left(\mathbf{v}'\right)^{T}\mathbf{I}^{\mathcal{B}} + \lambda\left\|\mathbf{I}^{\mathcal{B}}\right\|_{1} \\ \text{s.t.} & \mathbf{S}'\mathbf{I}^{\mathcal{B}} = [0,1]^{T} \\ & \mathbf{O}'\mathbf{I}^{\mathcal{B}} \leq \mathbf{0} \end{array} \tag{9}$$

onde $\left\|\mathbf{I}^{\mathcal{B}}\right\|_1$ indica a norma-ℓ_1 de $\mathbf{I}^{\mathcal{B}} = \left[I^{\mathcal{B}}(\emptyset), I^{\mathcal{B}}(\{1\}), \ldots, I^{\mathcal{B}}(\{1,\ldots\}), \ldots, I^{\mathcal{B}}(C)\right]^{T}$, λ é uma constante que controla a regularização, $\mathbf{S}'$ e $\mathbf{O}'$ garantem que os axiomas da capacidade sejam satisfeitos, e $\mathbf{Q}'$ e $\mathbf{v}'$ são a matriz e o vetor, respectivamente, usados para construir o erro de representação $E = \sum_{j=1}^{n}\left(F_{ML}(u(\mathbf{x}_j)) - y(u(\mathbf{x}_j))\right)^2$ a ser minimizado[1]. A racionalidade por trás dessa abordagem é encontrar um modelo mais simples em termos da redução dos parâmetros que assumem valores diferentes de zero. Portanto, não se impõe que o modelo seja k-aditivo, mas reduz sua flexibilidade para ajustar arbitrariamente o conjunto de parâmetros no problema de identificação. O preço que se paga é que, ao diminuir a flexibilidade, pode-se aumentar o erro de representação entre as avaliações obtidas e as desejadas. Porém, embora um modelo mais simples possa atingir um erro de representação maior na etapa de treinamento, podemos encontrar parâmetros que levam a uma melhor generalização quando a capacidade é aplicada em um conjunto de dados diferente daquele usado na etapa de treinamento.

A fim de ilustrar um dos resultados obtidos, as Figuras 1a e 1b apresentam os *box-plots* dos erros de representação E obtidos nas etapas de treinamento e teste (com base em 1001 simulações), respectivamente, para um conjunto de dados reais e diferentes modelos de identificação supervisionada: WRE (sem regularização), RE2 (com a regularização associada aos $I^{\mathcal{B}}(A)$ tal que $|A| \geq 3$), 2AD (modelo multilinear 2-aditivo), RE1 (com a regularização associada aos $I^{\mathcal{B}}(A)$ tal que $|A| \geq 2$) e WAM (média aritmética ponderada). Embora o método WRE forneça o menor valor de E no treinamento, obtivemos maiores níveis de generalização com o modelo 2AD e ambos os modelos propostos RE1 e RE2, os quais empregam a regularização.



(a) Treinamento. (b) Teste.

Figura 1: Erro de representação E - Dados reais.

[1]Tanto os dados de decisão $u(\mathbf{x}_j)$ e as avaliações globais $y(u(\mathbf{x}_j))$ são fornecidos como dados de aprendizagem.

3.4. Abordagem não-supervisionada para a identificação da capacidade

Da mesma forma que na contribuição anterior, esta seção também aborda o problema da identificação da capacidade. No entanto, consideramos o caso não-supervisionado, no qual temos apenas a matriz de decisão como dados de aprendizagem. Portanto, ao assumir uma característica nos dados de decisão que pretendemos tratar, como redundâncias entre critérios, propomos abordagens que podem ser utilizadas para estimar uma capacidade que leva a um ordenamento mais justo das alternativas. Neste resumo da tese, discutimos a abordagem baseada nos índices de Sobol. Maiores detalhes podem ser vistos no artigo [6].

3.4.1. Uma abordagem não-supervisionada baseda nos índices de Sobol

Esta abordagem parte da análise da incerteza sobre a saída do modelo Y de acordo com as incertezas associadas às entradas. Para tanto, é usual realizar uma decomposição de Y em termos associados a diferentes variáveis de entrada Z_i, $i = 1, \ldots, m$. Por exemplo, considere a decomposição $Y = f_\emptyset + \sum_{i=1}^{m} f_i(Z_i) + \sum_{i<i'}^{m} f_{i,i'}(Z_i, Z_{i'}) + \ldots + f_C(Z_C)$, com $f_A(Z_A) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A \setminus B|} \mathbb{E}\left[Y|Z_B\right]$, onde $\mathbb{E}\left[Y|Z_B\right]$ denota a esperança condicional de Y dadas as variáveis $Z_i, \forall i \in B$. De posse dessa decomposição, definimos o índice de Sobol como [Saltelli et al., 2004]:

$$S_A = \frac{\text{Var}[f_A(Z_A)]}{\text{Var}[Y]}. \tag{10}$$

Quanto maior o valor de S_A, maior é o " impacto " que a coalizão de variáveis Z_A tem na saída do modelo Y. A proposta desta contribuição tem como base o resultado obtido por Grabisch e Labreuche [2017], o qual associa o modelo multilinear ao índice de Sobol através da seguinte expressão:

$$\text{Var}[(F_{ML})_A] = \frac{1}{12^{|A|}} \left(I^{\mathcal{B}}(A)\right)^2. \tag{11}$$

Na Equação (11) pode-se notar que os índices de Sobol para coalizões de critérios com a mesma cardinalidade dependem, exclusivamente, dos valores dos índices de interação. Por exemplo, se temos $I^{\mathcal{B}}(A) = I^{\mathcal{B}}(D)$ para todos os subconjuntos $A, D \subseteq C$ com a mesma cardinalidade, os índices de Sobol associados deveriam ser os mesmos. No entanto, esse resultado assume que os critérios são independentes. Em um cenário com critérios redundantes, os índices de Sobol calculados nas Equações (10) e (11) podem divergir.

Suponha um problema de decisão com 3 critérios e com os critérios 1 e 2 correlacionados positivamente. Ao adotar uma capacidade aditiva e, portanto, $I_1^{\mathcal{B}} = I_2^{\mathcal{B}} = I_3^{\mathcal{B}} = 1/3$), temos que $\text{Var}[(F_{ML})_1] = \text{Var}[(F_{ML})_3] = (1/12)\left(I_i^{\mathcal{B}}\right)^2$. No entanto, se considerarmos a Equação (10) (sem normalização), obtemos $\text{Var}[\mathbb{E}[F_{ML}|\mathbf{u}_1]] > \text{Var}[\mathbb{E}[F_{ML}|\mathbf{u}_3]]$. Essa diferença se dá devido à correlação entre os critérios 1 e 2, uma vez que $\text{Var}[(F_{ML})_1]$ também é influenciado pelo critério 2, o que aumenta o impacto do critério 1 na saída do modelo.

Nesse contexto, nossa hipótese é que o viés proporcionado pelas correlações nos dados de decisão pode ser mitigado pela adoção de uma capacidade cujas coalizões de critérios com a mesma cardinalidade tenham impactos semelhantes nas avaliações globais obtidas. Por exemplo, para lidar com a correlação no exemplo acima mencionado, pode-se definir uma capacidade μ tal que o impacto do critério 3 é o mesmo que o impacto dos critérios 1 e 2. Ao estender esta ideia a qualquer $A \subseteq C$, evita-se disparidades nos impactos de todas as coalizões possíveis de critérios com a mesma cardinalidade. Como esses impactos podem ser medidos pela Equação (10), o objetivo aqui é ajustar uma capacidade μ que minimize a diferença entre os índices de Sobol para subconjuntos de critérios com a mesma cardinalidade. Matematicamente, o problema de otimização é dado por

$$\min_\mu \quad \sum_{\substack{A \subset C, \\ A \neq \emptyset}} \sum_{\substack{B \subset C, \\ |B| = |A|}} \left(S_A - S_B\right)^2. \tag{12}$$

Os experimentos conduzidos nesta tese atestaram que tal proposta poderia estimar um conjunto de parâmetros que podem atenuar as disparidades introduzidas por critérios redundantes. Mais especificamente, obtivemos uma interação negativa entre os critérios dependentes, que modelou um efeito redundante entre eles.

3.5. Considerações finais

A tese em questão caracteriza-se especialmente pela originalidade na abordagem do tema de pesquisa e pela relevância dos resultados obtidos, o que pode ser confirmado pelas publicações obtidas durante os anos de doutorado. Um aspecto que merece especial destaque é a proposta de considerar em conjunto – e, no que é de nosso conhecimento, de forma inédita – duas áreas bastante distintas: a de apoio à decisão multicritério e a de análise de variáveis latentes. Via de regra, os métodos usados em MCDM são estabelecidos com base na opinião, subjetiva, dos tomadores de decisão, o que pode conduzir a resultados enviesados que não levem em conta características importantes presentes nos dados. Para superar este problema, a tese aqui indicada propõe o uso de técnicas de LVA para extrair informações não explícitas nos dados disponíveis, incorporando-as ao método de decisão multicritério. Em termos de resultados, do ponto de vista do tomador de decisão, ressalta-se a redução da subjetividade ao construir o modelo e a consequente obtenção de soluções mais imparciais. Tais resultados são corroborados por um grande número de simulações apresentadas, abordando exemplos típicos de MCDM.

Cabe mencionar que a tese, defendida em 27 de novembro de 2020, foi desenvolvida em cotutela com o Centre d'Économie de la Sorbonne (CES) da Université Paris I Panthéon-Sorbonne, sob a supervisão do Prof. Dr. Michel Grabisch. Na ocasião, o candidato apresentou seminários tanto no CES quanto no Gipsa-Lab da Université Grenoble-Alpes, divulgando seu trabalho em outras instituições. Os autores gostariam de agradecer aos processos n. 2016/21571-4 e 2017/23879-9, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelo apoio financeiro.

Referências

Choquet, G. (1954). Theory of capacities. *Annales de l'Institut Fourier*, 5:131–295.

Comon, P. e Jutten, C. (2010). *Handbook of blind source separation: Independent component analysis and applications*. Academic Press, Oxford, UK, 1 edition.

Grabisch, M. (2016). *Set Functions, games and capacities in decision making*. Berlin: Springer.

Grabisch, M., Kojadinovic, I., e Meyer, P. (2008). A review of methods for capacity identification in Choquet integral based multi-attribute utility theory: Applications of the Kappalab R package. *European Journal of Operational Research*, 186:766–785.

Grabisch, M. e Labreuche, C. (2017). A note on the Sobol' indices and interactive criteria. *Fuzzy Sets and Systems*, 315:99–108.

Greco, S., Ehrgott, M., e Figueira, J. R., editors (2016). *Multiple criteria decision analysis: State of the art surveys*. Springer, New York, 2 edition.

Marichal, J.-L. e Roubens, M. (2000). Determination of weights of interacting criteria from a reference set. *European Journal of Operational Research*, 124:641–650.

Saltelli, A., Tarantola, S., Campolongo, F., e Ratto, M. (2004). *Sensitivity analysis in practice: A guide toassessing scientific models*. John Wiley & Sons Ltd, Chichester, UK.

Vega, A., Aguarón, J., García-Alcaraz, J., e Moreno-Jiménez, J. M. (2014). Notes on dependent attributes in TOPSIS. *Procedia Computer Science*, 31:308–317.