

M-Particoes em Cografos

João Thompson

Motora Tecnologia SA

joao.thompson@motora.ai

Fábio Protti

Universidade Federal Fluminense

Raquel Bravo

Universidade Federal Fluminense

Loana Tito Nogueira

Universidade Federal Fluminense

RESUMO

O problema da *M-partição* foi inicialmente introduzido por Feder et al. da seguinte forma: seja M uma matriz simétrica $m \times m$ com valores $M_{ij} \in \{0, 1, *\}$. Uma *M-partição* de um grafo G é uma partição de G em m conjuntos, obedecendo as restrições impostas pelos índices da matriz M , tal que: dados dois vértices distintos, u e v de $V(G)$, alocados nos conjuntos i e j , respectivamente, temos: Se $M_{ij} = 0$, então $(u, v) \notin E(G)$; Se $M_{ij} = 1$, então $(u, v) \in E(G)$; e Se $M_{ij} = *$, não podemos afirmar nada sobre a existência ou não da aresta no grafo G . Neste trabalho vamos restringir nossas buscas na subclasse dos cografos e encontrar as obstruções para configurações em que todos os valores da diagonal principal da matriz M são iguais a 0, todas as restrições da última coluna são iguais a 1 e as demais restrições são $*$.

PALAVRAS CHAVE. M-Partição, Cografos, Coloração de Grafos.

TAG, OC

ABSTRACT

The *M-partition* problem was introduced by Feder et al. in this terms: let G be a graph and M be a symmetric matrix $m \times m$ with values in the range $M_{ij} \in \{0, 1, *\}$. A *M-partition* of G is m sets of $V(G)$, such as for each matrix index: let u and v be vertices of $V(G)$, in sets i e j , respectively, thus: if $M_{ij} = 0$, then $(u, v) \notin E(G)$; if $M_{ij} = 1$, then $(u, v) \in E(G)$; and if $M_{ij} = *$, we cannot affirm whether there exists the edge or not in $E(G)$. This paper will search and find cograph obstructions for a matrix M where all values in the main diagonal are 0, all the values in the last column are 1 and every other value is $*$.

KEYWORDS. M-Partition. Cographs. Graph Coloring.

TAG, OC

1. Introdução

O problema da M -partição foi inicialmente introduzido por Feder et al. em [Feder et al., 1999] da seguinte forma: seja M uma matriz simétrica $m \times m$ com valores $M_{ij} \in \{0, 1, *\}$. Uma M -partição de um grafo G é uma partição de G em m conjuntos, obedecendo as restrições impostas pelos índices da matriz M , tal que: dados dois vértices distintos, u e v de $V(G)$, alocados nos conjuntos i e j (possivelmente $i = j$), respectivamente, temos:

- Se $M_{ij} = 0$, então $(u, v) \notin E(G)$;
- Se $M_{ij} = 1$, então $(u, v) \in E(G)$; e
- Se $M_{ij} = *$, não podemos afirmar nada sobre a existência ou não da aresta no grafo G ;

Observe que os valores apresentados na diagonal definem a característica de cada parte de G ; essas características serão chamadas *restrições internas*, isto é, quando a parte i apresenta restrição interna $M_{ii} = 1$, isso implica dizer que a parte em questão é uma clique; quando a parte i apresenta restrição interna $M_{ii} = 0$, implica dizer que é um conjunto independente; e, por fim, quando a restrição interna da parte i é $M_{ii} = *$, então o conjunto i não apresenta restrições internas e pode possuir qualquer tipo de adjacência internamente. A Figura 1 apresenta a forma gráfica que utilizaremos para indicar a representação dos conjuntos.

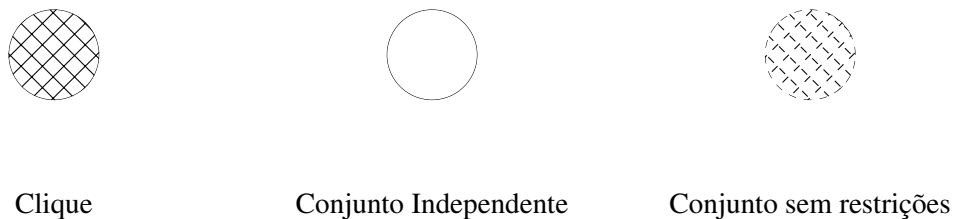


Figura 1: Exemplo de representação dos conjuntos.

Os valores fora da diagonal principal de M representam o que chamamos de *restrições externas*, pois regulam as adjacências entre as diferentes partes de G . Assim, quando a parte i é totalmente adjacente à parte j , temos $M_{ij} = 1$; simetricamente, quando $M_{ij} = 0$ as partes i e j não possuem nenhuma adjacência; e quando $M_{ij} = *$ não podemos afirmar nada sobre a adjacência entre os conjuntos i e j . A Figura 2 mostra a forma como indicaremos essas adjacências graficamente; nessa figura o conjunto A é completamente adjacente ao conjunto B ($M_{AB} = 1$); o conjunto B pode possuir arestas em relação ao conjunto C ($M_{BC} = *$); e os conjuntos A e C não possuem nenhum tipo de adjacência ($M_{AC} = 0$).

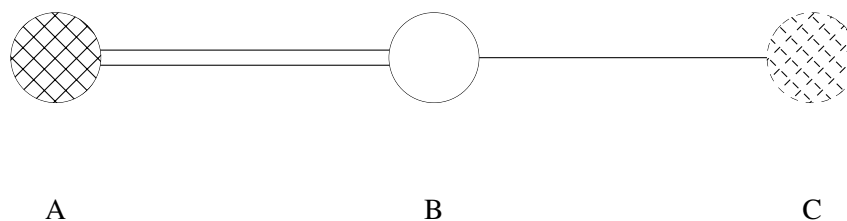


Figura 2: Exemplo de adjacências entre os conjuntos.

Uma instância do problema de M -partição é um grafo G e uma matriz M , e a solução são m conjuntos que respeitem as restrições de M (onde m é o posto de M). Quando encontramos tal partição, dizemos que o grafo G é M -particionável. Na matriz apresentada na Figura 3 mostramos: M , uma matriz que particiona o grafo em duas cliques e um conjunto independente e não possui restrições externas entre as partes (Figura 3).

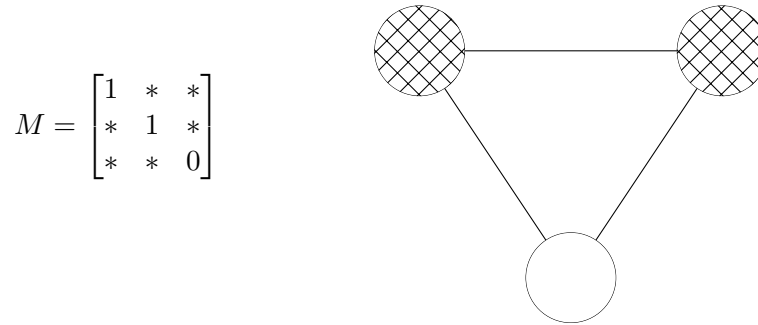


Figura 3: Exemplo de matriz, M , e sua representação gráfica.

Para facilitar a compreensão, daqui em diante usaremos a notação M_i para representar a i -ésima parte de um grafo G dada pela i -ésima linha (coluna) de M .

Na versão proposta por Feder et al. [Feder et al., 1999], as partes podem ser vazias. Assim, podemos observar que uma matriz que contenha $*$ em sua diagonal principal pode particionar qualquer grafo G . Pois poderíamos assumir que o conjunto M_i , tal que $M_{ii} = *$, contém todos os vértices de G , ou seja, $M_i = V(G)$; fazendo os outros conjuntos $M_j, j \neq i$, vazios, sabemos que as restrições externas também são cumpridas.

Uma outra classe importante para este artigo é a classe dos grafos- (k, l) , pois ela traz resultados importantes quanto à complexidade do problema de M -Partição. Esta classe foi definida em 1996, por Brandstädt [Brandstädt, 1996]. Um grafo G é (k, l) -particionável (ou apenas (k, l)), se pode ser particionado em k conjuntos independentes e l cliques. Observe que a M -Partição generaliza o problema de reconhecer os grafos- (k, l) e, portanto, reconhecer se um grafo é M -particionável para matrizes de ordem maior ou igual a 3 é um problema NP -completo (veja Tabela 1).

k/l	0	1	2	≥ 3
0	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	NPc
1	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	NPc
2	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	NPc
≥ 3	NPc	NPc	NPc	NPc

Tabela 1: Complexidade para reconhecer grafos- (k, l) .

Uma vez que o problema de reconhecer grafos- (k, l) é um problema NP -Completo para $k \geq 3$ ou $l \geq 3$, restringir o problema a classes de grafos faz-se necessário a fim de encontrar situações em que o problema seja tratável. Neste intuito, diversos trabalhos foram desenvolvidos para reconhecer se um dado grafo G é (k, l) quando o grafo de entrada G está restrito a uma classe de grafos específica. Em geral, esses estudos têm sido feitos em subclasses de grafos perfeitos:

cordais, cografos, P_4 -esparsos, etc. E os resultados são, normalmente, apresentados em forma de *obstruções minimais* (*subgrafos proibidos*), que são subgrafos induzidos que impedem um grafo de ser (k, l) -particionável, isto é, um grafo G é (k, l) -particionável se não possui $H_1, H_2, \dots$ como subgrafos induzidos.

Uma subclasse bastante estudada dos grafos perfeitos são os grafos *cordais*, por exemplo. Um grafo é cordal se, e somente se, todo ciclo C com quatro ou mais vértices possui corda. Os grafos cordais- (k, l) foram estudados e caracterizados em Hell et al. [Hell et al., 2004]. Os grafos cordais- (k, l) foram caracterizados por obstruções minimais como se segue:

Teorema 1 *Um grafo cordal G é (k, l) se, e somente se, não contém $(l + 1)$ cliques isoladas (mutuamente não adjacentes) de tamanho $k + 1$ como subgrafo induzido, isto é, $l + 1$ cópias isoladas de completos com $k + 1$ vértices.*

Outras classes que foram caracterizadas por obstruções minimais são as classes com poucos P_4 's: P_4 -esparsos e P_4 -redutíveis. A classe dos grafos P_4 -esparsos foi definida inicialmente por Hoàng em [Hoàng, 1983] como grafos G tais que para qualquer subconjunto $Q \subseteq V(G)$ com cinco vértices, $G[Q]$ induz no máximo um P_4 . Hoang ainda mostrou, no mesmo trabalho, que estes grafos são grafos perfeitos. Os P_4 -redutíveis foram introduzidos por Jamison e Olariu, em [Jamison e Olariu, 1989], como os grafos tais que cada vértice pertence a no máximo um P_4 . É fácil ver que a classe dos P_4 -redutíveis contém a classe dos cografos, pois os cografos não possuem P_4 's induzidos; da mesma forma é fácil ver que os grafos P_4 -redutíveis estão contidos nos grafos P_4 -esparsos, pois satisfazem a condição de que para qualquer conjunto com cinco vértices existe no máximo um P_4 . Logo:

$$\text{cografos} \subset P_4 - \text{redutíveis} \subset P_4 - \text{esparsos}.$$

Bravo et al., em [Bravo et al., 2011], provaram que os subgrafos proibidos para P_4 -esparsos- (k, l) são exatamente os mesmos proibidos para os cografos- (k, l) - os quais vamos citar na próxima seção.

Podemos observar que os trabalhos citados acima tratam o problema no âmbito de grafos- (k, l) , porém diversos trabalhos foram desenvolvidos no âmbito de M -Partição, apresentando diferentes variações de restrições internas e externas, entre os quais podemos citar: [Bravo et al., 2011][Bravo et al., 2012][Feder e Hell, 2006][Feder et al., 2006][Feder et al., 2005][Feder et al., 2014][Feder et al., 2007][Göbel et al., 2015][Hell et al., 2004].

1.1. M -Partição em cografos

Entre os diversos trabalhos em M -partição, destacamos alguns que propõem-se a estudar a M -partição em cografos.

O primeiro estudo relevante para este artigo trata das M -partições que não possuem restrições externas, e que consideram as partições com k conjuntos independentes e l cliques ($m = k + l$). Ou seja:

- $M_{ij} = 0, 1 \leq i \leq k, i = j;$

- $M_{ij} = 1, k + 1 \leq i \leq k + l, i = j$; e
- $M_{ij} = *, i \neq j$.

Este estudo foi apresentado por Bravo et al., em [Bravo et al., 2005], e teve por objetivo encontrar os subgrafos proibidos minimais que impossibilitam a M -partição. O conjunto de todas as obstruções minimais de M será denotado por $Ob(M)$. Assim, para cada matriz M , Bravo et al., em [Bravo et al., 2005], apresentaram um conjunto de obstruções minimais, tais que se um cografo G é M -particionável se, e somente se, não possui nenhuma destas obstruções como subgrafo induzido.

Vamos denotar as famílias de obstruções encontradas por Bravo et al. por $B(k, l)$, um subgrafo completo com n vértices como K_n e um conjunto independente com m vértices como I_m . Estes conjuntos de obstruções podem ser encontrados recursivamente da seguinte forma:

- $B(k, 0) = \{K_{k+1}\};$

- $B(0, l) = \{I_{l+1}\};$

- $$B(k, l) = \bigcup_{\substack{a=1, \\ B_1 \in B(a-1, l), \\ B_2 \in B(k-a, l)}}^k \{B_1 + B_2\} \cup \bigcup_{\substack{b=1, \\ B_1 \in B(k, b-1), \\ B_2 \in B(k, l-b)}}^l \{B_1 \cup B_2\}.$$

Para as provas na próxima seção note que as únicas obstruções minimais para as partições com $l = 0$ são as cliques que possuem $k + 1$ vértices.

Outros dois estudos relevantes para este artigo são os trabalhos [Leite, 2013] e [Viana, 2013]. Ambos os trabalhos utilizam matrizes com tamanhos limitados, porém trabalham com diferentes conjuntos de restrições externas para os cografos- (k, l) .

Especificamente, o trabalho [Viana, 2013] apresenta principalmente problemas onde as matrizes possuem ordem 3, utilizando as diversas variações tais que $k + l = 3$ e variando as restrições externas. Este trabalho apresenta muitas reduções e equivalências entre matrizes, o que justifica resultados semelhantes para diferentes configurações. Dentre os diversos resultados obtidos para os cografos- (k, l) , devemos destacar aqueles que referem-se às matrizes com 3 conjuntos independentes e restrições externas diferentes de 0 na última linha/coluna.

A Figura 4 apresenta uma das matrizes do trabalho [Viana, 2013], que será importante para as provas nas próximas seções.

$$M^1 = \begin{bmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & 1 \\ * & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

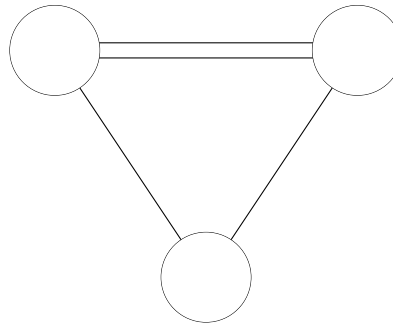


Figura 4: Matriz M^1 com três conjuntos independentes e uma restrição externa.

Teorema 2 ([Viana, 2013]) *Dado um cografo G , G é M^1 -particionável se, e somente se, não contém K_4 ou $K_3 \cup K_2$ como subgrafos induzidos.*

A Figura 5 apresenta mais uma das matrizes do trabalho [Viana, 2013], que será importante para as provas nas próximas seções.

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & * & 1 \\ * & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

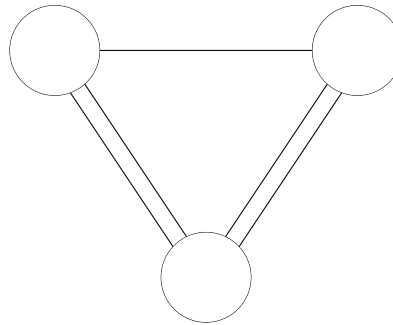


Figura 5: Matriz M^2 com três conjuntos independentes e duas restrições externas.

Teorema 3 ([Viana, 2013]) *Dado um cografo G , G é M^2 -particionável se, e somente se, não contém K_4 ou $K_3 \cup K_1$ como subgrafos induzidos.*

Outro resultado importante de [Viana, 2013] para este trabalho diz respeito à matriz de ordem 2 que apresenta a única restrição externa como 1.

Teorema 4 ([Viana, 2013]) *Dado um cografo G , G é M^3 -particionável se, e somente se, não contém K_3 ou $K_2 \cup K_2$ como subgrafos induzidos.*

Por sua vez, o trabalho [Leite, 2013] estuda as matrizes de ordem 4, porém restritas aos valores $k = 4$ e $l = 0$. Novamente, vamos destacar as configurações de matrizes que nos são convenientes, que são as matrizes que apresentam restrições externas diferentes de * apenas na última coluna; mais especificamente, estamos interessados em matrizes que possuem restrições do tipo 1 na última coluna, ou seja, que não possuem restrições externas iguais a 0 e apresentam restrições do tipo 1 apenas na última coluna. Desta forma M^4 , M^5 e M^6 representam respectivamente as matrizes com 1, 2 e 3 valores do tipo 1 na última coluna.

Teorema 5 ([Leite, 2013]) Dado um cografo G , G é M^4 -particionável se, e somente se, não contém K_5 ou $K_4 \cup K_3$ como subgrafos induzidos.

Teorema 6 ([Leite, 2013]) Dado um cografo G , G é M^5 -particionável se, e somente se, não contém K_5 ou $K_4 \cup K_2$ como subgrafos induzidos.

Teorema 7 ([Leite, 2013]) Dado um cografo G , G é M^6 -particionável se, e somente se, não contém K_5 ou $K_4 \cup K_1$ como subgrafos induzidos.

2. $(k, 0)^j$ -partição em cografos

Um dos problemas estudados que faz parte deste arquivo é o que chamamos de $(k, 0)^j$ -partição. Neste problema, generalizamos as soluções para o problema da $(k, 0)$ -partição com restrições externas na última coluna. O problema $(k, 0)^j$ -partição consiste em particionar o grafo em k conjuntos independentes $(M_1, M_2, \dots, M_k)$, de forma que o k -ésimo conjunto (M_k) seja completamente adjacente a j outros conjuntos, $j \geq 1$. Vamos assumir, sem perda de generalidade, que as partições $M_{k-j}, M_{k-j+1}, \dots, M_{k-1}$ são completamente adjacentes a M_k . Assim podemos escrever sua matriz da seguinte maneira:

- $M_{ij} = 0, 1 \leq i \leq k$;
- $M_{ij} = M_{ji} = 1, i = k, j \neq k, k - j < i < k$; e
- $M_{ij} = *$, caso contrário.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & * & * & * & \dots & * & * \\ * & 0 & * & * & \dots & * & \vdots \\ * & * & 0 & * & \dots & * & * \\ * & * & * & 0 & \dots & * & 1 \\ * & * & * & * & \ddots & * & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 1 \\ * & \dots & * & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_k$
 $\overbrace{\hspace{10em}}^j$

Vamos denotar a matriz M que representa a $(k, 0)^j$ -partição com j restrições externas (todas iguais a 1) na última coluna por $M : (k, 0)^j$.

Teorema 8 Dado um cografo G e uma matriz $M : (k, 0)^{k-1}$, G é M -particionável se, e somente se, G não contém K_{k+1} ou qualquer grafo da forma $(K_{a_1} \cup K_1) + (K_{a_2} \cup K_1) + \dots + (K_{a_p} \cup K_1)$, $1 < a_i \leq k$, $a_1 + a_2 + \dots + a_p = k$, como subgrafo induzido.

Prova.

A prova deste teorema baseia-se fortemente na forma que um cografo G pode ser escrito, como desconexo ou conexo, respectivamente:

$$G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_l \text{ ou } G = G_1 + G_2 + \dots + G_l.$$

Se G é desconexo, então G pode ser escrito como a união de l cografos $G_1, G_2, \dots, G_l$ (vide acima) onde cada G_i é um grafo trivial ou um cografo conexo [Corneil et al., 1985]. Para esta demonstração, porém, caso existam grafos triviais na decomposição, consideramos que G_1 é um conjunto independente consistindo da união de todos os grafos triviais da decomposição proposta em [Corneil et al., 1985]. Assim, $G_2, \dots, G_l$ são sempre cografos conexos não triviais. Da mesma forma, se G é conexo, caso existam grafos triviais na decomposição, consideramos que G_1 é uma clique e $G_2, \dots, G_l$ são cografos desconexos.

Vale ressaltar que as únicas obstruções minimais para que um cografo possa ser particionado em t conjuntos independentes, sem restrições externas, são as cliques de tamanho $t + 1$, isto é, K_{t+1} 's. Também vale lembrar que no particionamento M em questão, apenas um dos k conjuntos possui restrições externas em relação aos outros conjuntos – arbitrariamente, assuma que é M_k . Assim, durante a prova, vamos supor diversas vezes que $G - M_k$ não pode ser um grafo $(k - 1, 0)$ -particionável – caso contrário, G admitiria um M -particionamento.

($\Leftarrow$) Suponha que G seja minimalmente não- M -particionável. Vamos mostrar que G deve ser o grafo K_{k+1} ou um grafo da forma $(K_{a_1} \cup K_1) + (K_{a_2} \cup K_1) + \dots + (K_{a_p} \cup K_1)$, $1 < a_i \leq k$, $a_1 + a_2 + \dots + a_p = k$.

i) Suponha, inicialmente, que G é desconexo. Assim, temos $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_l$.

O grafo G deve possuir ao menos uma clique de tamanho k , caso contrário G seria M -particionável. Portanto, G deve conter ao menos um K_k em algum de seus subgrafos. Por conveniência, e sem perda de generalidade, vamos assumir que G_l possui K_k (a operação $\cup$ é comutativa e bastaria que renomeássemos os diversos subgrafos e trocássemos a ordem das operações).

Como G é minimalmente não- M -particionável, cada G_i , $1 \leq i \leq l$, tem que ser M -particionável. Além disso, como G_l contém K_k , todas as partes $M_1, M_2, \dots, M_k$ são não vazias, para que seja possível particionar G_l . Dessa forma nenhum vértice de algum G_i , para $i \neq l$, poderá ser incluído em qualquer M_j , $1 \leq j \leq k$, pois irá infringir as restrições externas do conjunto M_k . Desta forma, como supomos G minimal, podemos afirmar: $l = 2$, G_1 é trivial e $G_l = K_k$, fazendo com que $G = K_k \cup K_1$.

ii) Suponha agora que G é conexo. Portanto, $G = G_1 + G_2 + \dots + G_l$.

Vamos dividir esta parte da prova de acordo com o valor de l .

Caso 1: $l > k$.

Neste caso, como todos os vértices de cada G_i são vizinhos de todos os vértices dos outros G_j 's, $j \neq i$, então temos ao menos uma clique de tamanho $l \geq k + 1$; portanto, G possui K_{k+1} e, por minimalidade, G é o grafo K_{k+1} .

Caso 2: $l = k$.

Suponha que todo G_i , $1 \leq i \leq l$, seja um conjunto independente. Assim, poderíamos

atribuir cada G_i à respectiva M_i , e G seria M -particionável (absurdo). Portanto, existe algum G_i , $1 \leq i \leq l$, que não é um conjunto independente. Assim, também construímos uma clique de tamanho maior ou igual a $k + 1$. Logo, por minimalidade, G é o grafo K_{k+1} .

Caso 3: $l < k$.

Sejam $Q_1, Q_2, \dots, Q_l$, $n_i = |V(Q_i)|$, $1 \leq i \leq l$, cliques máximas de $G_1, G_2, \dots, G_l$, respectivamente. Se $n_1 + n_2 + \dots + n_l \leq k - 1$ então G é M -particionável, um absurdo. Se $n_1 + n_2 + \dots + n_l \geq k + 1$ então G é por minimalidade o grafo K_{k+1} . Assuma então $n_1 + n_2 + \dots + n_l = k$.

Para as considerações abaixo, seja $G'_1 = G - G_1 = G_2 + G_3 + \dots + G_l$. Como, pela minimalidade de G , G'_1 é M -particionável, segue que G'_1 é $(k - n_1, 0)$ -particionável. Observamos que os argumentos usados abaixo para G'_1 serão análogos para qualquer $G'_i = G - G_i$, $1 < i \leq l$. Assim, ao provarmos especificamente para o primeiro subgrafo G_1 , temos também uma prova extensível para todos os subgrafos G_i , simplesmente pelo fato de a operação *join* (+) ser comutativa.

Fato (a): Nenhum G_i , $1 \leq i \leq l$, é $(n_i, 0)^{n_i-1}$ -particionável.

Suponha que G_1 seja $(n_1, 0)^{n_1-1}$ -particionável. Sabemos que o subgrafo G_1 é completamente adjacente a G'_1 ; portanto, se G_1 admite um particionamento de forma que M_k é preenchida, então G admitiria uma M -partição (pois sabemos que G'_1 pode ser particionado nos outros $k - n_1$ conjuntos – sua maior clique possui tamanho $k - n_1$), dado que M possui apenas restrições do tipo 1 na última coluna, e G_1 é completamente adjacente a G'_1 , estando as restrições externas sendo satisfeitas. Logo, G_1 não é $(n_1, 0)^{n_1-1}$ -particionável (apesar de ser $(n_1, 0)$ -particionável).

Fato (b): Para $1 \leq i \leq l$, temos $n_i > 1$.

Suponha $n_1 = 1$. Então G_1 é um conjunto independente que é adjacente a todos os outros vértices de G'_1 . Mais especificamente, G'_1 é $(k - 1, 0)$ -particionável, pois sua maior clique possui tamanho $k - 1$. Logo poderíamos atribuir os vértices de G_1 para M_k e particionar G'_1 nos outros $k - 1$ conjuntos; assim, G seria M -particionável. Absurdo. Logo $n_1 > 1$.

Fato (c): Todo G_i , $1 \leq i \leq l$, é da forma $K_{n_i} \cup K_1$.

Suponha que G_1 seja uma clique. Assim, G_1 seria $(n_1, 0)^{n_1-1}$ -particionável, pois conteria apenas a clique Q_1 . Pelo Fato (a), G_1 não pode ser $(n_1, 0)^{n_1-1}$ -particionável; portanto, G_1 não é clique. Logo, pela estrutura de construção de G (retorne ao início da prova), G_1 é desconexo.

Assim, sabemos que cada G_i será da forma $K_{n_i} \cup K_1$, pois não há outra obstrução minimal desconexa, e $G = (K_{a_1} \cup K_1) + (K_{a_2} \cup K_1) + \dots + (K_{a_p} \cup K_1)$, $a_1 + a_2 + \dots + a_p = k$, $a_j > 1$, $1 \leq j \leq p$.

($\Rightarrow$) Vamos mostrar que K_{k+1} e $(K_{a_1} \cup K_1) + (K_{a_2} \cup K_1) + \dots + (K_{a_p} \cup K_1)$, $1 < a_i \leq k$, $a_1 + a_2 + \dots + a_p = k$ são obstruções minimais. Se H contém como subgrafo induzido K_{k+1} ou $(K_{a_1} \cup K_1) + (K_{a_2} \cup K_1) + \dots + (K_{a_p} \cup K_1)$, $1 < a_i \leq k$, $a_1 + a_2 + \dots + a_p = k$, então claramente H não é M -particionável.

Seja:

$$H = (K_{a_1} \cup K_1) + (K_{a_2} \cup K_1) + \dots + (K_{a_p} \cup K_1), a_1 + a_2 + \dots + a_p = k, a_j > 1, 1 \leq j \leq l.$$

Vamos provar por indução matemática que H é uma obstrução minimal para M . Podemos

verificar para $k = 3$ e $k = 2$, que as únicas soluções possíveis são $a_1 = 3$ e $a_1 = 2$, respectivamente. Assim,

$$H = (K_3 \cup K_1), \text{ para } k = 3, \text{ e}$$

$$H = (K_2 \cup K_1), \text{ para } k = 2.$$

Assim as obstruções para M_2 e M_3 são:

$$Ob(M_2) = \{K_4, K_3 \cup K_1\},$$

$$Ob(M_3) = \{K_3, K_2 \cup K_1\}.$$

Estes resultados já são conhecidos, e foram publicados no trabalho [Viana, 2013].

Suponha agora que, para qualquer valor $2 \leq i \leq p$, o grafo G seja uma obstrução minimal para $M : (i, 0)^{i-1}$:

$$G = (K_{a_1} \cup K_1) + (K_{a_2} \cup K_1) + \dots + (K_{a_l} \cup K_1), a_1 + a_2 + \dots + a_l = i, a_j > 1, 1 \leq j \leq l.$$

Vamos mostrar que o grafo H também é uma obstrução para $M : (p+1, 0)^p$.

$$H = (K_{a_1} \cup K_1) + (K_{a_2} \cup K_1) + \dots + (K_{a_l} \cup K_1), a_1 + a_2 + \dots + a_l = p+1, a_j > 1, 1 \leq j \leq l.$$

Para os casos em que $a_1 = p+1, l = 1$, a prova é trivial, pois é fácil verificar que $(K_{p+1} \cup K_1)$ não é M -particionável e é minimal. Assim, vamos supor que $l \geq 2$.

Seja $G' = (K_{a_2} \cup K_1) + \dots + (K_{a_l} \cup K_1)$, $A = a_2 + a_3 + \dots + a_l$. Pela hipótese de indução, G' é minimalmente não- $(A, 0)^{A-1}$ -particionável, pois $2 \leq A \leq p$. Da mesma maneira, sabemos que $H_1 = (K_{a_1} \cup K_1)$ é minimalmente não- $(a_1, 0)^{a_1-1}$ -particionável. Em particular, tanto G' quanto H_1 não podem atribuir vértices para a parte M_{p+1} , e como G possui uma clique K_{p+1} , não conseguimos particioná-lo em apenas p conjuntos $M_1, M_2, \dots, M_p$. Portanto, H é uma M -obstrução minimal. ■

Vale observar que os resultados obtidos geram um família de subgrafos proibidos para uma matriz $M : (k, 0)^{k-1}$ em cografos. O grafo completo de tamanho $k+1$ e os outros diversos grafos $(K_{a_1} \cup K_1) + (K_{a_2} \cup K_1) + \dots + (K_{a_l} \cup K_1)$, tais que $1 < a_i \leq k, a_1 + a_2 + \dots + a_l = k$.

Na teoria dos números, encontrar o número de diferentes somas de números inteiros positivos tal que o resultado é n é chamado de *particionamento de n* [Comtet, 1974].

Definição 9 ([Comtet, 1974]) *Seja n um inteiro positivo. Cada partição de n em m operandos pode ser considerada uma solução inteira, com $y_i \geq 1, 1 \leq i \leq m$, tal que:*

$$y_1 + y_2 + \dots + y_m = n, y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_m \geq 1. \quad (1)$$

Podemos reescrever da seguinte maneira:

Teorema 10 ([Comtet, 1974]) Encontrar uma partição de n (uma solução da Equação 1) é equivalente a encontrar uma solução inteira com $x_i \geq 0$ para:

$$x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = n. \quad (2)$$

Interpretando a Equação 2, podemos modificá-la de forma a satisfazer a restrição das obstruções dada no Teorema 8. Uma vez que não utilizaremos 1 como operando, pois cada $a_i \geq 2$, podemos reescrever a fórmula da seguinte maneira:

$$2x_2 + 3x_3 + \dots + kx_k = k, \quad (3)$$

onde cada solução dessa equação está associada a uma obstrução para $M : (k, 0)^{k-1}$. Porém, podemos perceber que a quantidade de soluções de 3 (vamos chamar de $p(k)$) cresce rapidamente e, portanto, também o número de obstruções para M . Por exemplo, existem 30701 diferentes soluções para $k = 50$, e para $k > 1000$ temos valores com mais de 30 dígitos decimais.

Por exemplo, quando escolhemos $k = 7$, temos 4 soluções diferentes. Podemos escrever $7 = 5 + 2 = 4 + 3 = 2 + 2 + 3$. Considere $M : (7, 0)^6$. Então:

$$\begin{aligned} ob(M) = \{ & K_8, \\ & K_7 \cup K_1, \\ & (K_5 \cup K_1) + (K_2 \cup K_1), \\ & (K_4 \cup K_1) + (K_3 \cup K_1), \\ & (K_2 \cup K_1) + (K_2 \cup K_1) + (K_3 \cup K_1) \}. \end{aligned}$$

3. Conclusões

Assim, conseguimos encontrar todas os subgrafos proibidos para toda a classe de cografos para que eles possam ser particionados em k conjuntos independentes e 0 cliques, observando as restrições externas do tipo 1 em toda a última coluna. Conseguimos perceber também que o número de obstruções encontradas cresce rapidamente, pois cada solução da equação diofantina em questão é traduzida em uma nova obstrução. Para os próximos trabalhos pretendemos generalizar a quantidade de valores 1 na última coluna e cobrir o intervalo desde a matriz $M : (k, 0)^0$ até $M : (k, 0)^{k-1}$.

Referências

- Brandstädt, A. (1996). Partitions of graphs into one or two independent sets and cliques. *Discrete Mathematics*, 152(1-3):47–54.
- Brandstädt, A. (1998). The complexity of some problems related to graph 3-colorability. *Discrete Applied Mathematics*, 89:59–73.
- Bravo, R. S. F., Klein, S., Nogueira, L. T., e Protti, F. (2011). Characterization and recognition of P_4 -sparse graphs partitionable into k independent sets and l cliques. *Discrete Applied Mathematics*, 159(5):165–173.

- Bravo, R. S. F., Klein, S., Nogueira, L. T., Protti, F., e Sampaio, R. M. (2012). Partitioning extended p_4 -laden graphs into cliques and stable sets. *Information Processing Letters*, 112(21):829–834.
- Bravo, R. S. F., Nogueira, L. T., e Klein, S. (2005). Obstruções de cografos- (k, l) . *Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, p. 2361–2369.
- Comtet, L. (1974). *Advanced Combinatorics*. D. Reidel Publishing Company, Paris.
- Corneil, D. G., Perl, Y., e Stewart, L. K. (1985). A linear recognition algorithm for cographs. *SIAM Journal on Computing*, 14(4):926–934.
- Feder, T. e Hell, P. (2006). Matrix partitions of perfect graphs. *Discrete Mathematics*, 306(19–20): 2450–2460.
- Feder, T., Hell, P., e Hochstättler, W. (2006). Generalized colouring (matrix partitions) of cographs. *Trends in Mathematics, in Memory of Claude Berger*, p. 149–167.
- Feder, T., Hell, P., Klein, S., e Motwani, R. (1999). Complexity of list partitions. *ACM symposium on Theory of computing*, p. 164–472.
- Feder, T., Hell, P., e Rizi, S. N. (2005). Chordal obstructions to M -partitions.
- Feder, T., Hell, P., e Shklarsky, O. (2014). Matrix partitions of split graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 166:91–96.
- Feder, T., Hell, P., e Xie, W. (2007). Matrix partitions with finitely many obstructions. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 28:371–378.
- Göbel, A., Goldberg, L. A., Richerby, D., Mcquillan, C., e Yamakami, T. (2015). Counting list matrix partitions of graphs. *SIAM Journal on Computing*, 44(4):1089–1118.
- Hell, P., Klein, S., Nogueira, L. T., e Protti, F. (2004). Partitioning chordal graphs into independent sets and cliques. *Discrete Applied Mathematics*, 141:185–194.
- Hoàng, C. T. (1983). A Class of Perfect Graphs. Master's thesis., School of Computer Science, McGill University, Montreal, Canada.
- Jamison, B. e Olariu, S. (1989). P_4 -reducible graphs, a class of uniquely tree representable graphs. *Studies in Applied Mathematics*, 81:79–87.
- Leite, J. S. S. (2013). *Caracterização dos Cografos- $(4,0)$ por Subgrafos Proibidos com Restrições Externas*. PhD thesis, Instituto de Computação, Universidade Federal Fluminense, Niterói, RJ, Brasil.
- Viana, C. C. (2013). *$M_{3,3}$ -obstrução minimal de cografos*. PhD thesis, Instituto de Computação, Universidade Federal Fluminense, Niterói, RJ, Brasil.