LII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional
João Pessoa - PB, 3 a 5 de novembro de 2020

Limites para o Número Clique Orientado Relativo de Grades e Grades Cilíndricas

Mateus de Paula Ferreira
INF/UFG, Goiânia–GO, Brasil
mateus_ferreira@discente.ufg.br

Erika Morais Martins Coelho
INF/UFG, Goiânia–GO, Brasil
erikamorais@inf.ufg.br

Hebert Coelho da Silva
INF/UFG, Goiânia–GO, Brasil
hebert@inf.ufg.br

RESUMO

Seja $\overrightarrow{G} = (V, A)$ um grafo orientado. O número cromático orientado de $\overrightarrow{G}$ denotado por $\chi_o(\overrightarrow{G})$ é um parâmetro bem conhecido na literatura. Nos últimos anos o parâmetro número clique orientado relativo de $\overrightarrow{G}$ denotado por $\omega_{ro}(\overrightarrow{G})$ tem ganhado atenção por ser um limite inferior para o número cromático orientado, ou seja, $\omega_{ro}(\overrightarrow{G}) \leq \chi_o(\overrightarrow{G})$ para todo grafo $\overrightarrow{G}$. Uma clique orientada relativa de um grafo orientado $\overrightarrow{G}$ é um conjunto $R \in V(\overrightarrow{G})$ tal que quaisquer dois vértices $x, y \in R$ são vizinhos ou são conectados por um caminho de tamanho 2 de x para y ou de y para x em $\overrightarrow{G}$. O número clique orientado relativo $\omega_{ro}(\overrightarrow{G})$ é a ordem da maior clique orientada relativa de $\overrightarrow{G}$. Dada uma família $\mathcal{F}$ de grafos não orientados, temos que $\omega_{ro}(\mathcal{F}) = max\{\omega_{ro}(\overrightarrow{G})|\ \overrightarrow{G}$ é toda orientação de $G \in \mathcal{F}\}$. Neste trabalho demonstramos que as famílias das grades e das grades cilíndricas têm $\omega_{ro} \leq 5$.

PALAVRAS CHAVE. Número Clique Orientado Relativo, Grafo Orientado, Grades.

Teoria e Algoritmos em Grafos (TAG), Otimização Combinatória (OC), Outras aplicações em PO (OA)

ABSTRACT

Let $\overrightarrow{G} = (V, A)$ be an oriented graph. The oriented chromatic number of $\overrightarrow{G}$ denoted by $\chi_o(\overrightarrow{G})$ is a well know parameter in the literature. In the last few years the parameter relative oriented clique number of $\overrightarrow{G}$ denoted by $\omega_{ro}(\overrightarrow{G})$ has gained attention for being a lower bound for the oriented chromatic number, that is, $\omega_{ro}(\overrightarrow{G}) \leq \chi_o(\overrightarrow{G})$ for every graph $\overrightarrow{G}$. A relative oriented clique of an oriented graph $\overrightarrow{G}$ is a set $R \in V(\overrightarrow{G})$ such that any two vertices $x, y \in R$ are neighbours or are connected by a path of size 2 from x to y or from y to x in $\overrightarrow{G}$. The relative oriented clique number $\omega_{ro}(\overrightarrow{G})$ is the order of the largest relative oriented clique of $\overrightarrow{G}$. Given a family $\mathcal{F}$ of undirected graphs, we have $\omega_{ro}(\mathcal{F}) = max\{\omega_{ro}(\overrightarrow{G})|\ \overrightarrow{G}$ is every orientation of $G \in \mathcal{F}\}$. In this article we show that the families of grids and cilindric grids have $\omega_{ro} \leq 5$.

KEYWORDS. Relative Oriented Clique Number, Oriented Graph, Grids.

Theory and Algorithms in Graphs (TAG), Combinatorial Optimization (CO), Another applications in OR (AA)

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings

1. Introdução

O problema da coloração orientada foi introduzido independentemente na literatura por meio dos trabalhos [Raspaud e Sopena, 1994] e [Courcelle, 1994]. O trabalho de Sopena [Sopena, 2015] faz uma revisão dos principais resultados do problema. Nos últimos anos o parâmetro número clique orientado relativo de $\overrightarrow{G}$ denotado por $\omega_{ro}(\overrightarrow{G})$ tem ganhado atenção por ser um limite inferior para o número cromático orientado $\chi_o(\overrightarrow{G})$, ou seja, $\omega_{ro}(\overrightarrow{G}) \leq \chi_o(\overrightarrow{G})$ para todo grafo $\overrightarrow{G}$. O foco deste trabalho é o número clique orientado relativo que foi introduzido em [Nandy et al., 2015].

Nesta seção faremos uma pequena revisão sobre grafos e o número clique orientado relativo. O par $G = (V, E)$ é um *grafo simples*, onde $V(G)$ é um conjunto de *vértices* e $E(G)$ é um conjunto de chamados de *arestas*. Um *arco* é uma das duas orientações possíveis para uma aresta xy, sendo denotado respectivamente por xy ou yx. Um *grafo orientado* $\overrightarrow{G} = (V, A)$ é obtido a partir de G, contendo o mesmo conjunto de vértices de G, de tal modo que o conjunto A contém uma orientação para cada aresta de $E(G)$. O grafo G é chamado de grafo *subjacente* de $\overrightarrow{G}$.

Se $xy \in E(G)$ ou $xy \in A(\overrightarrow{G})$, então x é *adjacente* ou *vizinho* de y. Se xy é um arco em $\overrightarrow{G}$, dizemos que y é um *sucessor* de x e x é um *predecessor* de y. O conjunto dos *sucessores* de x é definido por $N^+(x) = \{y : xy \in A(\overrightarrow{G})\}$. O conjunto dos *predecessores* de x é definido por $N^-(x) = \{y : yx \in A(\overrightarrow{G})\}$. O conjunto de *adjacências* de x é definido por $N(x) = N^-(x) \cup N^+(x)$.

O *grau de entrada* de um vértice $x \in V(\overrightarrow{G})$ é definido por $d^-_{\overrightarrow{G}} = |N^-(x)|$. O *grau de saída* de um vértice $x \in V(\overrightarrow{G})$ é definido por $d^+_{\overrightarrow{G}}(x) = |N^+(x)|$. O *grau* de um vértice $x \in V(\overrightarrow{G})$ é dado pela soma do seu grau de entrada com seu grau de saída, sendo denotado por $d_{\overrightarrow{G}}(x) = d^+_{\overrightarrow{G}}(x) + d^-_{\overrightarrow{G}}(x)$. Os graus máximo e mínimo de $\overrightarrow{G}$ são definidos respectivamente por $\Delta(\overrightarrow{G}) = max\{d_{\overrightarrow{G}}(x) : x \in V(\overrightarrow{G})\}$ e $\delta(\overrightarrow{G}) = min\{d_{\overrightarrow{G}}(x) : x \in V(\overrightarrow{G})\}$.

Um *passeio* de tamanho k em um grafo G é uma sequência de vértices $P = \{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$ onde $v_iv_{i+1} \in E(G)$, para todo $0 \leq i \leq k-1$. Um *caminho* é um passeio onde todos vértices são distintos. Um *passeio fechado* tem $v_0 = v_k$. Um *ciclo* é um passeio fechado de tamanho pelo menos três, com todos os vértices distintos com exceção de v_0 e v_k. A *cintura* de um grafo G, é o tamanho do menor ciclo em G.

Para um par de grafos G e H, o *produto cartesiano* $G\square H$ de G e H é o grafo com o conjunto de vértices $V(G\square H) = V(G) \times V(H)$ e $(x_1, x_2)(y_1, y_2) \in E(G\square H)$ sempre que $x_1 = y_1$ e $x_2y_2 \in E(H)$ ou $x_2 = y_2$ e $x_1y_1 \in E(G)$. Uma *grade* $\overrightarrow{H}_{m,n}$ de tamanho m, n é definida pelo produto cartesiano dos caminhos P_m de tamanho m e P_n de tamanho n. Uma *grade cilíndrica* $\overrightarrow{H}_{m,n}$ de tamanho m, n é definida pelo produto cartesiano do ciclo C_m de tamanho m e do caminho P_n de tamanho n.

Um vértice u *enxerga* ou *vê* um vértice v se eles são vizinhos ou se existe um caminho orientado de tamanho dois de u para v ou de v para u. Uma *clique orientada relativa* de um grafo orientado $\overrightarrow{G}$ é um conjunto $R \in V(\overrightarrow{G})$ tal que quaisquer dois vértices $x, y \in R$ ou x enxerga y ou y enxerga x, isto é, são vizinhos ou são conectados por um caminho de tamanho 2 de x para y ou de y para x em $\overrightarrow{G}$. O *número clique orientado relativo*, denotado por $\omega_{ro}(\overrightarrow{G})$, é a ordem da maior clique orientada relativa que é um subgrafo de $\overrightarrow{G}$. Dado uma família $\mathcal{F}$ de grafos não orientados, temos que $\omega_{ro}(\mathcal{F}) = max\{\omega_{ro}(\overrightarrow{G}) |\ \overrightarrow{G}$ é toda orientação de $G \in \mathcal{F}\}$.

O trabalho de [Das et al., 2018] apresenta o primeiro estudo sistemático sobre o número clique orientado relativo. Neste trabalho os autores provaram que se $\overrightarrow{G}$ é um grafo com grau

máximo 3, então $\omega_{ro} \leq 7$ e este limite é justo. Provaram resultados relacionados à cintura do grafo, mostrando que se $\overrightarrow{G}$ é um grafo periplanar com cintura pelo menos 3, 4 ou 5, ou 6, então $\omega_{ro} \leq 7, 5$ ou 3 e todos estes limites são justos. Se $\overrightarrow{G}$ é um grafo planar com cintura pelo menos 3, 4, 5, 6 ou 7, eles mostraram que $\omega_{ro} \leq 32, 14, 6, 4, 3$ e os limites para as cinturas 5, 6 e 7 são justos. Por fim, no mesmo trabalho os autores estabeleceram resultados de complexidade provando que determinar o número clique relativo de um grafo orientado bipartido é NP-difícil.

Um grafo $\overrightarrow{G}$ é *livre de triângulos* se tem cintura pelo menos 4. O trabalho de [Das et al., 2020] mostra que se $\overrightarrow{G}$ é um grafo planar e livre de triângulos, então $\omega_{ro}(\overrightarrow{G}) = 10$.

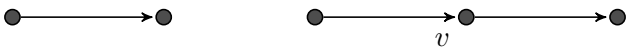
Vale observar que as grades e grades cilíndricas formam uma subclasse dos grafos bipartidos e também uma subclasse dos grafos livres de triângulo. Nesse sentido, na Seção 2, demonstramos que o número clique orientado relativo de grades e grades cilíndricas é no máximo 5. E por fim, na Seção 3, apresentamos nossas considerações finais.

2. Grades e Grades Cilíndricas

Nesta seção, estamos interessados em demonstrar que o número clique orientado relativo de grades e grades cilíndricas é no máximo 5. Definimos uma *configuração* como um conjunto de grafos. Para realizar esta demonstração provamos uma serie de lemas que definem as configurações das cliques orientadas relativas das grades e grades cilíndricas de acordo com o seu número de vértices.

Lema 1. *Seja $\overrightarrow{H}_{m,n}$ uma grade com $m, n \geq 2$ ou uma grade cilíndrica com $m \geq 3$ e $n \geq 2$. Se $\omega_{ro}(\overrightarrow{H}_{m,n}) \geq 2$, então toda clique orientada relativa de tamanho 2 em $\overrightarrow{H}_{m,n}$ tem a configuração C_{f_21} ou C_{f_22} da Figura 1.*

Demonstração. Seja R uma clique orientada relativa qualquer em $\overrightarrow{H}_{m,n}$, tal que $|R| = 2$. Pela definição de clique orientada relativa temos que os vértices de R são vizinhos ou não. No primeiro caso obtemos a configuração C_{f_21} da Figura 1 (a). No segundo caso, os vértices se veem por um caminho de tamanho 2 através de vértice $v \notin R$ e obtemos a configuração C_{f_22} da Figura 1 (b). É fácil verificar que ambos C_{f_21} e C_{f_22} são subgrafos de $\overrightarrow{H}_{m,n}$. □



$(a)\ C_{f_21}$ $(b)\ C_{f_22}$

Figura 1: Configurações para clique orientada relativa de tamanho 2, (a) C_{f_21} e (b) C_{f_22} em que $v \notin R$.

Lema 2. *Seja $\overrightarrow{H}_{m,n}$ uma grade com $m, n \geq 2$ ou uma grade cilíndrica com $m \geq 4$, $m \neq 5$ e $n \geq 2$. Se $\omega_{ro}(\overrightarrow{H}_{m,n}) \geq 3$, então toda clique orientada relativa de tamanho 3 em $\overrightarrow{H}_{m,n}$ tem uma dentre as configurações C_{f_3i}, $1 \leq i \leq 3$, da Figura 2.*

Demonstração. Por definição, se $\overrightarrow{H}_{m,n}$ admite uma clique orientada relativa R de tamanho 3 então $\overrightarrow{H}_{m,n}$ tem uma das duas configurações apresentadas no Lema 1 como subgrafo, tal que $|R \cap V(C_{f_2i})| = 2, i \in \{1, 2\}$. Analisamos todas as possibilidades a partir de C_{f_21} e C_{f_22} para obter novas configurações possíveis ao adicionar o terceiro vértice em R, usando a estrutura de $\overrightarrow{H}_{m,n}$.

Sem perda de generalidade, seja $R = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $R \cap V(C_{f_2i}) = \{v_1, v_2\}, i \in \{1, 2\}$. Iniciamos com a configuração C_{f_21}, considerando $v_1v_2 \in E(\overrightarrow{H}_{m,n})$. Como $\overrightarrow{H}_{m,n}$ é livre de

triângulos temos que $v_3 \notin N(v_1) \cap N(v_2)$. Se v_3 é vizinho de v_2 (resp. v_1) tal que exista o caminho v_1, v_2, v_3 (resp. v_3, v_1, v_2), então obtemos a configuração $C_{f_3 1}$ (Figura 2 (a)). Agora, se v_3 é vizinho de v_2 (resp. v_1) e $v_1v_2, v_3v_2 \in E(\overrightarrow{H}_{m,n})$ (resp. $v_1v_2, v_1v_3 \in E(\overrightarrow{H}_{m,n})$), então deve existir um vértice $v \notin R$ tal que $v_1v, vv_3 \in E(\overrightarrow{H}_{m,n})$ ou $vv_1, v_3v \in E(\overrightarrow{H}_{m,n})$ (resp. $v_3v, vv_2 \in E(\overrightarrow{H}_{m,n})$ ou $v_2v, vv_3 \in E(\overrightarrow{H}_{m,n})$). Logo, obtemos a configuração $C_{f_3 2}$ (Figura 2 (b)).

Vamos analisar a configuração $C_{f_2 2}$. Considere que $v_1, v_2, v_3 \in R$, e sem perda de generalidade, considere $v \notin R$ e $v_1v, vv_2 \in E(\overrightarrow{H}_{m,n})$, de modo que R contenha a configuração $C_{f_2 2}$. Vamos incluir v_3 para determinar as configurações de R. Pela estrutura de $\overrightarrow{H}_{m,n}$ sabemos que $v_3 \notin N(v_1) \cap N(v) \cap N(v_2)$. Se v_3 é vizinho somente de v_1 (resp. v_2), então v_3 não vê v_2 (resp. v_1) e R não é uma clique relativa orientada. Considere v_3 vizinho somente de v. Se $vv_3 \in E(\overrightarrow{H}_{m,n})$ (resp. $v_3v \in E(\overrightarrow{H}_{m,n})$) então v_3 vê v_2 (resp. v_1) por um caminho de tamanho 2 passando por um vértice $h \notin R$. Logo, obtemos a configuração $C_{f_3 3}$ (Figura 2 (c)). Se v_3 é vizinho de v_1 e v_2, então obtemos subgrafos isomórficos às configurações $C_{f_3 1}$ ou $C_{f_3 2}$ (Figura 2). □

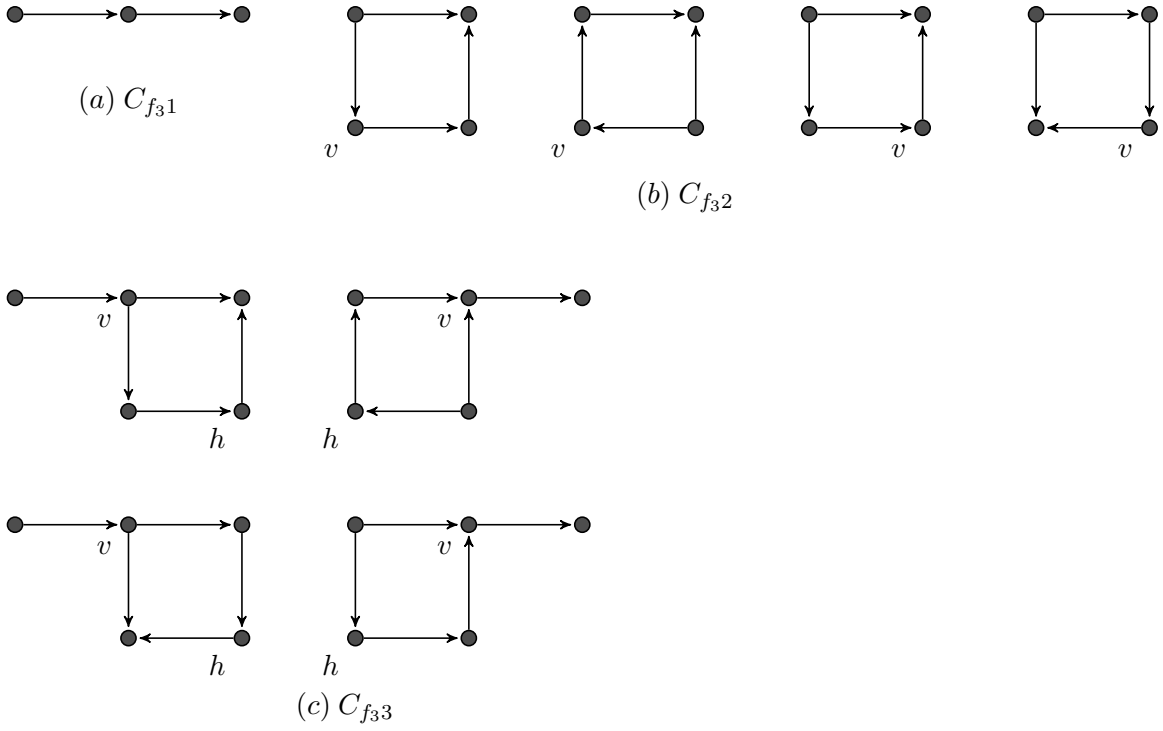


Figura 2: Configurações para clique orientada relativa de tamanho 3, (a) $C_{f_3 1}$, (b) $C_{f_3 2}$ e (c) $C_{f_3 3}$ em que $v, h \notin R$.

Lema 3. *Seja $\overrightarrow{H}_{m,n}$ uma grade com $m, n \geq 2$ ou uma grade cilíndrica com $m \geq 4$, $m \neq 5$ e $n \geq 2$. Se $\omega_{ro}(\overrightarrow{H}_{m,n}) \geq 4$, então toda clique orientada relativa de tamanho 4 em $\overrightarrow{H}_{m,n}$ tem uma das configurações $C_{f_4 i}$, $1 \leq i \leq 3$, da Figura 3.*

Demonstração. Seja R uma clique orientada relativa qualquer em $\overrightarrow{H}_{m,n}$ de tamanho 4. Por definição, $\overrightarrow{H}_{m,n}$ tem uma das configurações definidas no Lema 2 como subgrafo da forma $R \cap V(C_{f_3 i})$ tal que

$|R \cap V(C_{f_3 i})| = 3$, $1 \leq i \leq 3$. Considere $R = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e que cada uma das configurações $C_{f_3 1}$, $C_{f_3 2}$ e $C_{f_3 3}$ contém os vértices v_1, v_2 e v_3. Vamos analisar as possibilidades para adicionarmos o vértice v_4 em R. Sem perda de generalidade, vamos considerar que $v, h \notin R$.

Vamos iniciar por $C_{f_3 1}$. Para a configuração $C_{f_3 1}$ consideramos $v_1v_2, v_2v_3 \in E(\overrightarrow{H}_{m,n})$. Pela estrutura de $\overrightarrow{H}_{m,n}$ temos que $v_4 \notin N(v_1) \cap N(v_2) \cap N(v_3)$. Se v_4 é vizinho somente de v_1 (resp. v_3), então v_4 não vê v_3 (resp. v_1), assim R não é uma clique relativa orientada. Se v_4 é vizinho somente de v_2, então ou v_4 vê v_1, ou v_4 vê v_3 por um vértice $h \notin R$, criando a configuração $C_{f_4 1}$ (Figura 3 (a)). Se v_4 é vizinho de v_1 e v_3, criamos a configuração $C_{f_4 2}$ (Figura 3 (b)).

Analisando a configuração $C_{f_3 2}$. Se $v_4 = v$, voltamos a obter configuração $C_{f_4 2}$. Se $v_4 \neq v$, pela estrutura de $\overrightarrow{H}_{m,n}$ temos que $|N(v_4) \cap \{v_1, v_2, v_3, v\}| = 1$ e que v_4 deve ser vizinho do vértice não adjacente a v. Considere um dos grafos da configuração $C_{f_3 2}$. Considere uma configuração $C_{f_3 2}$ tal que $v_1v_2, v_3v_2, v_1v, v_3 \in E(\overrightarrow{H}_{m,n})$. Então v_4 deve ser vizinho de v_2 e para que R seja uma clique orientada relativa devemos ter $v_2v_4 \in E(\overrightarrow{H}_{m,n})$. O mesmo raciocínio pode ser utilizado para os outros vértices da configuração $C_{f_3 2}$ verificando que formamos a configuração $C_{f_4 1}$ (Figura 3 (a)).

Por fim a configuração $C_{f_3 3}$. Se $v_4 = v$, voltamos a configuração $C_{f_4 1}$. Se $v_4 = h$, então v_4 não vê o vértice de grau um e R não é uma clique relativa orientada. Para que v_4 tenha distância 2 dos outros vértices de R, v_4 precisa ser adjacente a v. E pela estrutura de $\overrightarrow{H}_{m,n}$, temos que $|N(v_4) \cap \{v_1, v_2, v_3, h\}| = \emptyset$. Assim, v_4 é vizinho somente de v. Considere uma configuração $C_{f_3 3}$ tal que $v_1v, vv_2, v_1h, hv_3, v_3v \in E(\overrightarrow{H}_{m,n})$. Para v_4 enxergar v_2 é preciso considerar ou o caminho v_2, x, v_4 ou o caminho v_4, x, v_2. E assim, obtemos duas configurações em $C_{f_4 3}$. O mesmo raciocínio pode ser utilizado para as outras configuração de $C_{f_3 3}$ verificando que formamos o restante da configuração $C_{f_4 3}$ (Figura 3 (c)). Note que a (Figura 3 (c)) está considerando apenas um dos caminhos passando pelo vértice x. □

Lema 4. *Seja $\overrightarrow{H}_{m,n}$ uma grade com $m, n \geq 2$ ou uma grade cilíndrica com $m \geq 4$, $m \neq 5$ e $n \geq 2$. Se $\omega_{ro}(\overrightarrow{H}_{m,n}) \geq 5$, então toda clique orientada de tamanho 5 em $\overrightarrow{H}_{m,n}$ tem a configuração $C_{f_5 1}$ da Figura 4.*

Demonstração. Suponha que $\overrightarrow{H}_{m,n}$ admita uma clique orientada relativa R, tal que $|R| = 5$. Por definição, $\overrightarrow{H}_{m,n}$ tem uma das configurações definidas no Lema 3 como subgrafo tal que $|R \cap V(C_{f_4 i})| = 4$, $1 \leq i \leq 3$. Sem perda de generalidade considere $R = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $R \cap V(C_{f_4 i}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $1 \leq i \leq 3$. Agora analisamos de acordo com a estrutura de $\overrightarrow{H}_{m,n}$ todas as possibilidades para a adição do vértice v_5 em R usando as configurações $C_{f_4 1}$, $C_{f_4 2}$ e $C_{f_4 3}$ para, como resultado, construir a configuração $C_{f_5 1}$.

Iniciando por $C_{f_4 1}$. Se $v_5 = h$, então v_5 não vê o vértice de grau um na configuração e logo R não é uma clique orientada relativa. Considere uma configuração $C_{f_4 1}$ tal que v_1v_2, v_2v_3, v_2v_4 $, v_4h, hv_3 \in E(\overrightarrow{H}_{m,n})$. Se $|N(v_5) \cap \{v_1, v_2, v_3, v_4, h\}| = 1$ então pela estrutura de $\overrightarrow{H}_{m,n}$ e para R ser uma clique orientada relativa v_5 é adjacente somente a v_2. E nesse caso deve existir a aresta v_5v_2 e ou o caminho v_1, v, v_5 ou o caminho v_5, v, v_1, onde $v \notin R$. Agora, se $|N(v_5) \cap \{v_1, v_2, v_3, v_4, h\}| = 2$ então pela estrutura de $\overrightarrow{H}_{m,n}$ o vértice v_5 deve ser adjacente somente a v_1 e v_4 e nesse caso v_5 enxerga v_3 e R não é uma clique orientada relativa. Pela estrutura de $\overrightarrow{H}_{m,n}$ $v_5 \notin N(v_1) \cap N(v_2) \cap N(v_3) \cap N(v_4)$ e também $v_5 \notin N(v_1) \cap N(v_2) \cap N(v_3)$. O mesmo raciocínio pode ser usado para os outros grafos da configuração $C_{f_4 1}$ obtendo a configuração $C_{f_5 1}$ (Figura 4).

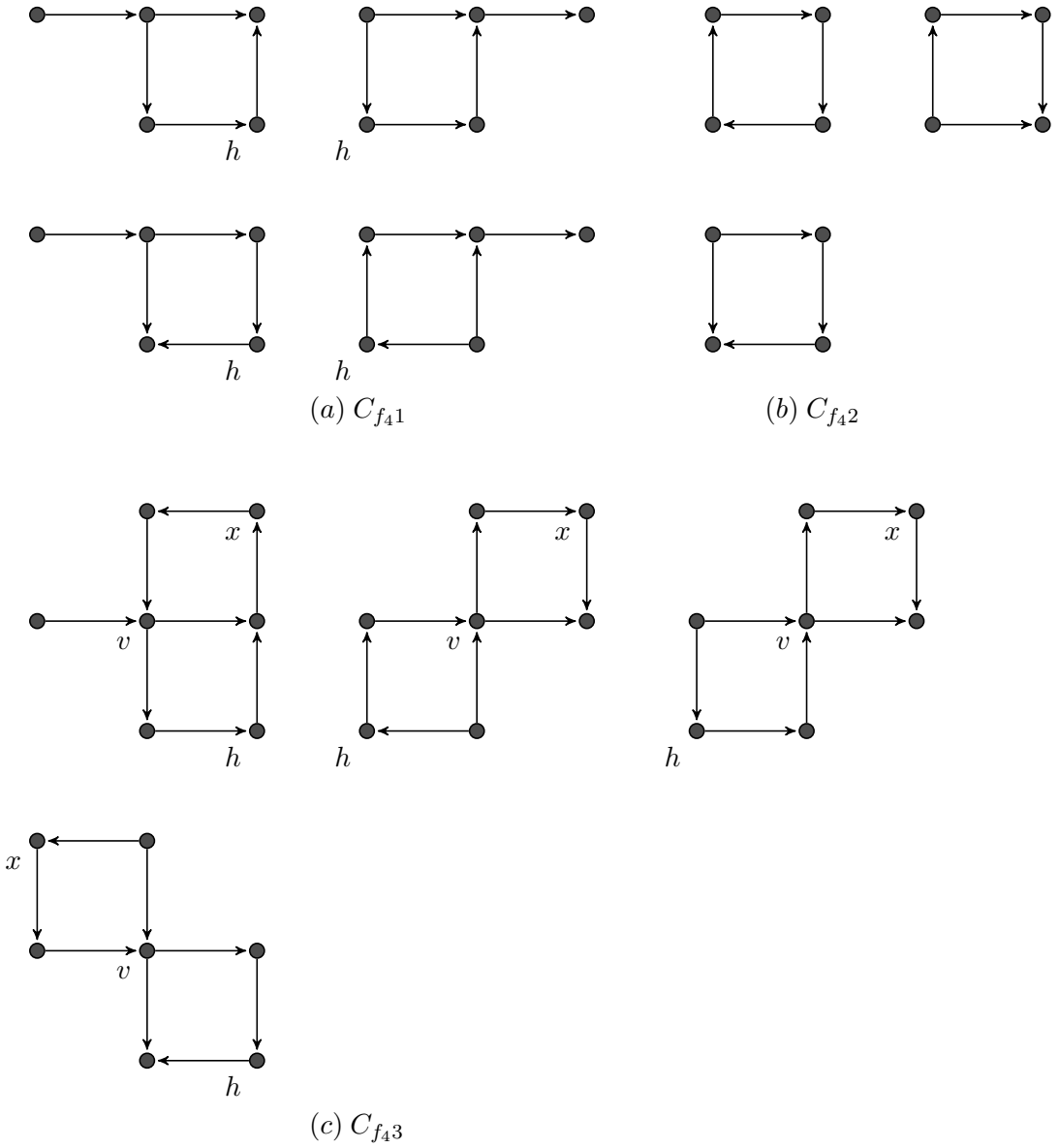


Figura 3: As configurações $C_{f_4 1}$ em (a), $C_{f_4 2}$ em (b) e $C_{f_4 3}$ em (c).

Analisando $C_{f_4 2}$. Pela estrutura de $\overrightarrow{H}_{m,n}$ não é possível que v_5 veja 3 ou 4 vértices em $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ por caminhos de tamanho 2. Se v_5 é adjacente a um dos vértices da configuração, digamos v_i, então v_5 não enxerga o vértice que é não adjacente v_i e R não é uma clique orientada relativa.

Por fim analisamos $C_{f_4 3}$. Se $v_5 = x$ ou $v_5 = h$, pela estrutura de $\overrightarrow{H}_{m,n}$, v_5 não enxerga um dos vértices em $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e R não é uma clique orientada relativa. Ainda, pela estrutura de $\overrightarrow{H}_{m,n}$, v_5 é adjacente a no máximo 2 vértices da configuração. Considere uma configuração $C_{f_4 3}$ tal que $v_1 v, v v_2, v_2 x, h v_2, x v_4, v_4 v, v v_3, v_3 h \in E(\overrightarrow{H}_{m,n})$. Se v_5 é adjacente a somente um dos vértices em $\{v_1, v_2, v_3, v_4, x, h\}$ então v_5 não enxerga pelo menos um dos outros vértices de R

e R não é uma clique orientada relativa. Se v_5 é adjacente a v_1 e v_4 (resp. v_3), então v_5 não enxerga v_2 e novamente R não é uma clique orientada relativa. O mesmo raciocínio pode ser usado para os outros grafos da configuração C_{f_43} verificando que não temos clique orientada relativa de tamanho 5 contendo as configurações em C_{f_43}.

Note que a (Figura 4) está considerando apenas um dos caminhos passando pelo vértice x. □

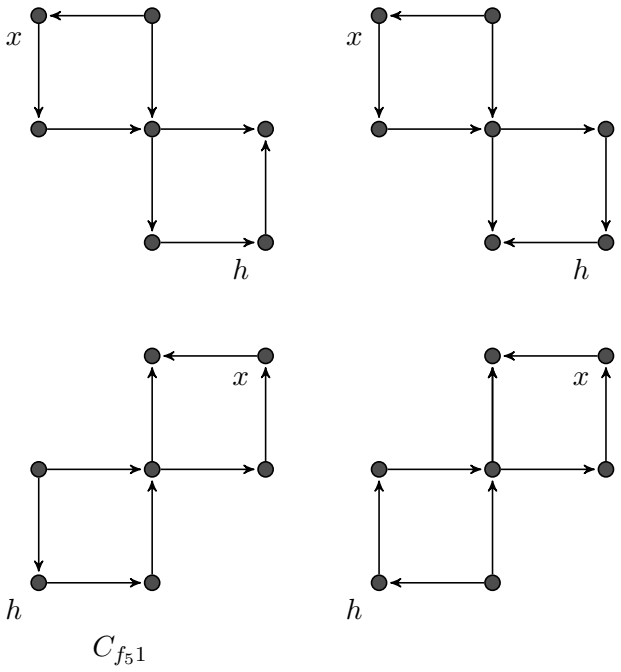


Figura 4: A configuração C_{f_51}.

Teorema 1. *Para a família $\overrightarrow{H}_{m,n}$ das grades de tamanho $m, n \geq 2$, temos $\omega_{ro}(\overrightarrow{H}_{m,n}) \leq 5$.*

Demonstração. Por contradição, suponha que $\omega_{ro}(\overrightarrow{H}_{m,n}) > 5$. Considere R qualquer clique orientada relativa de $\overrightarrow{H}_{m,n}$, tal que $|R| = 6$. Pela definição da clique orientada relativa e pelo Lema 4 temos que a configuração C_{f_51} é um subgrafo de $\overrightarrow{H}_{m,n}$ tal que $|R \cap V(C_{f_51})| = 5$. Sem perda de generalidade, assuma $R = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ com $v_6 \notin V(C_{f_51})$. Analisamos de acordo com a estrutura de $\overrightarrow{H}_{m,n}$ todas as possibilidades para a adição do vértice v_6 em R a partir de C_{f_51}.

Se $v_6 = h$ ou $v_6 = x$, então v_6 não vê ao menos dois vértices de R e R não é uma clique orientada relativa. Pela estrutura de $\overrightarrow{H}_{m,n}$ v_6 só pode ser adjacente a no máximo dois vértices de $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, x, h\}$. Considere uma configuração C_{f_51} tal que $v_1v_2, v_2v_3, v_5v_2, v_5x, xv_1, v_2v_4, v_4h, hv_3 \in E(\overrightarrow{H}_{m,n})$. Se v_6 é adjacente a somente um dos vértices em $\{v_1, v_3, v_4, v_5, x, h\}$ então v_6 não enxerga pelo menos um dos outros vértices de R e R não é uma clique orientada relativa. Se v_6 é adjacente a v_3 e v_5 (resp. v_1 e v_3), então v_6 não enxerga v_1 (resp. v_3) e novamente R não é uma clique orientada relativa. O mesmo raciocínio pode ser usado para os outros grafos da configuração C_{f_51} verificando que não temos clique orientada relativa de tamanho 6 contendo as configurações em C_{f_51}.

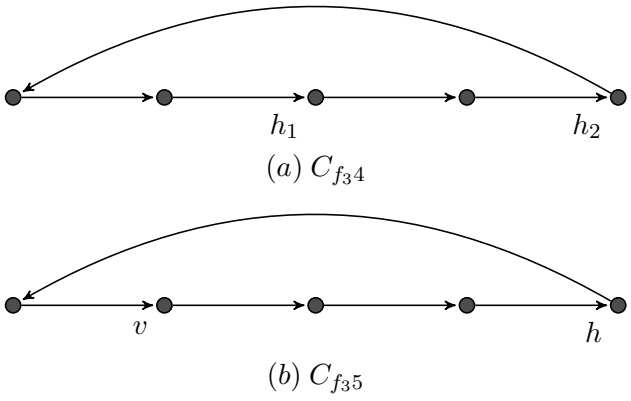
Concluímos que não existe clique orientada relativa R em $\overrightarrow{H}_{m,n}$ com $|R| = 6$, e da definição do problema não existe R tal que $|R| \geq 6$. □

Observe que nos resultados anteriores não consideramos as grades cilíndricas $\overrightarrow{H}_{5,n}$, com $n \geq 2$, pois o ciclo C_5 permite uma configuração diferente das listadas. Os próximos resultados caracterizam as configurações necessárias para contemplar esse caso.

Lema 5. *Seja $\overrightarrow{H}_{5,n}$ uma grade cilíndrica com $n \geq 2$. Se $\omega_{ro}(\overrightarrow{H}_{5,n}) \geq 3$, então toda clique orientada relativa de tamanho 3 em $\overrightarrow{H}_{5,n}$ tem uma das configurações $C_{f_3 i}$, $1 \leq i \leq 5$, das Figuras 2 e 5.*

Demonstração. Por definição, se $\overrightarrow{H}_{5,n}$ admite uma clique orientada relativa R de tamanho 3, então uma das configurações $C_{f_2 i}$ do Lema 1 é subgrafo de $\overrightarrow{H}_{5,n}$ e $|R \cap V(C_{f_2 i})| = 2$, $i \in \{1, 2\}$. Sem perda de generalidade, assumimos $R = \{v_1, v_2, v_3\}$ com $v_3 \notin C_{f_2 i}$, $i \in \{1, 2\}$. A partir de $C_{f_2 2}$ e usando a estrutura de $\overrightarrow{H}_{5,n}$ construímos as configurações $C_{f_3 1}$, $C_{f_3 2}$, $C_{f_3 3}$, $C_{f_3 4}$ e $C_{f_3 5}$ tal que $|R| = 3$.

As configurações $C_{f_3 1}$, $C_{f_3 2}$ e $C_{f_3 3}$ são obtidas pelo Lema 2. Como $\overrightarrow{H}_{5,n}$ contém C_5 como subgrafo induzido, o vértice v_3 não precisa ser adjacente nem a v_1 nem a v_2, logo v_3 enxerga v_1 e v_2 através de vértice que não pertença a R. Assim, obtemos as configurações $C_{f_3 4}$ (Figura 5 (a)) e $C_{f_3 5}$ (Figura 5 (b)). □



(a) $C_{f_3 4}$

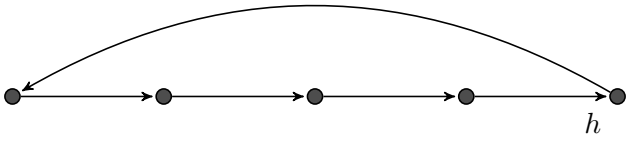
(b) $C_{f_3 5}$

Figura 5: As configurações $C_{f_3 4}$ em (a) e $C_{f_3 5}$ em (b).

Lema 6. *Seja $\overrightarrow{H}_{5,n}$ uma grade cilíndrica com $n \geq 2$. Se $\omega_{ro}(\overrightarrow{H}_{5,n}) \geq 4$, então toda clique orientada relativa de tamanho 4 em $\overrightarrow{H}_{5,n}$ tem uma das configurações $C_{f_4 i}$, $1 \leq i \leq 4$, das Figuras 3 e 6.*

Demonstração. Seja R uma clique orientada relativa qualquer em $\overrightarrow{H}_{5,n}$, tal que $|R| = 4$. Por definição $\overrightarrow{H}_{5,n}$ tem uma das configurações do Lema 5 como subgrafo com $|R \cap C_{f_3 i}| = 3$. Vamos considerar $R = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e $v_4 \notin C_{f_3 i}$, $1 \leq i \leq 5$. Analisamos todas as possibilidades que a estrutura de $\overrightarrow{H}_{5,n}$ oferece para adicionarmos o vértice v_4 em R a partir de $C_{f_3 1}$, $C_{f_3 2}$, $C_{f_3 3}$, $C_{f_3 4}$ e $C_{f_3 5}$, e obtemos as configurações $C_{f_4 1}$, $C_{f_4 2}$, $C_{f_4 3}$, $C_{f_4 4}$ e $C_{f_4 5}$.

As configurações C_{f_41}, C_{f_42} e C_{f_43} são obtidas pelo Lema 3. Utilizando as configurações C_{f_34} e C_{f_35} é possível verificar que v_4 não pode ser um vértice acrescido nas configurações, porque o mesmo não veria algum outro vértice de R. Assim obtemos a configuração C_{f_44} (Figura 6). □



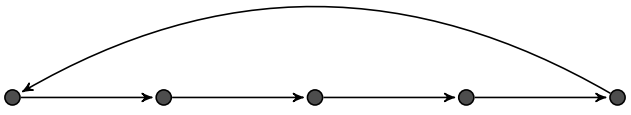
(a) C_{f_44}

Figura 6: As configuração C_{f_44}.

Lema 7. *Seja $\overrightarrow{H}_{5,n}$ uma grade cilíndrica com $n \geq 2$. Se $\omega_{ro}(\overrightarrow{H}_{5,n}) \geq 5$, então toda clique orientada relativa de tamanho 5 em $\overrightarrow{H}_{5,n}$ tem a configuração C_{f_51} ou C_{f_52}, das Figuras 4 e 7.*

Demonstração. Seja $1 \leq i \leq 5$. Se $\overrightarrow{H}_{5,n}$ admite uma clique orientada relativa R de tamanho 5, então $\overrightarrow{H}_{5,n}$ tem uma das configurações do Lema 6 como subgrafo com $|R \cap C_{f_4i}| = 4$. Considere $R = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ com $v_5 \notin C_{f_4i}$. Analisamos todas as possibilidades que a estrutura de $\overrightarrow{H}_{5,n}$ oferece para adicionarmos o vértice v_5 em R a partir de C_{f_41}, C_{f_42}, C_{f_43} e C_{f_44} e construirmos as configurações C_{f_51} e C_{f_52}.

A configuração C_{f_51} é obtida do Lema 4. Utilizando a configuração C_{f_44} é possível verificar que v_5 não pode ser um vértice acrescido na configuração, porque o mesmo não veria algum outro vértice de R. Assim obtemos a configuração C_{f_52} (Figura 6). □



C_{f_52}

Figura 7: A configuração C_{f_52}.

Teorema 2. *Para a família $\overrightarrow{H}_{m,n}$ das grades cilíndricas de tamanho $m \geq 4$ e $n \geq 2$, temos $\omega_{ro}(\overrightarrow{H}_{m,n}) \leq 5$.*

Demonstração. Por contradição, suponha que $\omega_{ro}(\overrightarrow{H}_{m,n}) > 5$. Considere R qualquer clique orientada relativa de $\overrightarrow{H}_{m,n}$, tal que $|R| = 6$. Por definição e pelos Lemas 4 e 7 temos que C_{f_51} ou C_{f_52} é um subgrafo de $\overrightarrow{H}_{m,n}$ tal que $|R \cap V(C_{f_51})| = 5$ ou $|R \cap V(C_{f_52})| = 5$. Sem perda de generalidade, assuma $R = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ com $v_6 \notin V(C_{f_51})$ e $v_6 \notin V(C_{f_52})$.

As possibilidades de adicionar v_6 em R a partir de C_{f_51} são as mesmas apresentadas no Teorema 1, com isso omitimos a análise para essa configuração. Analisando a configuração C_{f_52}. Pelo grau máximo da grade cilíndrica temos que v_6 não pode ser vizinho de todos os outros vértices

de R. Se v_6 é vizinho de algum vértice em $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, ou se enxerga algum por um caminho de tamanho 2, então v_6 está à distância 3 de pelo menos um deles. Se v_6 vê 2 vértices em $R - \{v_6\}$ por caminhos de tamanho 2, então v_6 não vê pelo menos 1 vértice em $R - \{v_6\}$. Pela estrutura de $\overrightarrow{H}_{m,n}$ não é possível que v_6 veja 3, 4 ou 5 vértices em $R - \{v_6\}$ por caminhos de tamanho 2. Concluímos que não existe clique orientada relativa R em $\overrightarrow{H}_{m,n}$ com $|R| = 6$, e da definição do problema não existe R tal que $|R| \geq 6$. □

3. Conclusões

Neste trabalho demonstramos que o número clique orientado relativo das famílias das grades e grades cilíndricas é no máximo 5, tais classes são subclasses do produto cartesiano. Esse resultado foi obtido fazendo uma caracterização das cliques orientadas relativas de tamanho 2 a 5 nessas classes de grafos. Esse resultado também garante que o problema do número clique orientado relativo é polinomial para as classes das grades e grades cilíndricas, sendo que através das configurações para cada tamanho de clique orientada relativa podemos formular um algoritmo de tempo polinomial para essas classes.

Observamos também que os resultados além de determinarem um limite superior justo, exibem o formato das cliques orientadas relativas para cada tamanho possível.

Um problema em aberto é encontrar um algoritmo polinomial para o número clique orientado relativo do produto cartesiano em geral ou decidir se o mesmo é NP-completo. Outro problema em aberto é reduzir o limite superior para o número clique orientado relativo para a classe dos grafos bipartidos e planares, que no momento de escrita desse artigo é 10.

4. Agradecimentos

Este trabalho foi realizado com o apoio da CAPES e do CNPq.

Referências

Courcelle, B. (1994). The monadic second order logic of graphs vi: On several representations of graphs by relational structures. *Discrete Applied Mathematics*, 54(2-3):117–149.

Das, S., Prabhu, S., e Sen, S. (2018). A study on oriented relative clique number. *Discrete Mathematics*, 341(7):2049–2057.

Das, S. S., Nandi, S., e Sen, S. (2020). The relative oriented clique number of triangle-free planar graphs is 10. In *Conference on Algorithms and Discrete Applied Mathematics*, p. 260–266. Springer.

Nandy, A., Sen, S., e Sopena, E. (2015). Outerplanar and planar oriented cliques. *Journal of Graph Theory*.

Raspaud, A. e Sopena, E. (1994). Good and semi-strong colorings of oriented planar graphs. *Information Processing Letters*, 51(4):171–174.

Sopena, E. (2015). Homomorphisms and colourings of oriented graphs: An updated survey. *Discrete Mathematics*.

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings