LII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional
João Pessoa - PB, 3 a 5 de novembro de 2020

Empacotamentos de círculos usando otimização não linear

Juliano Cavalcante Bortolete
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
R. Primeiro de Maio, 500 - Estação, Itaquaquecetuba - SP
juliano.bortolete@ifsp.edu.br

Luís Felipe Cesar da Rocha Bueno
Universidade Federal de São Paulo
Av. Cesare Mansueto Giulio Lattes, 1201 - Eugênio de Mello, São José dos Campos - SP
lfelipebuenogmail.com

RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de discutir conceitos relacionados à otimização não linear para empacotamento de círculos. Especificamente, estudaremos técnicas conhecidas da literatura tanto para resolver problemas de empacotamento em contêineres simples quanto para abordar empacotamentos em regiões delimitadas por quádricas. Por fim, empreenderemos uma análise dos conceitos com o intuito de verificar a possibilidade de aplicar a técnica usada no caso do empacotamento em elipses e parábolas às regiões delimitadas por uma quártica. A falta de unicidade da parametrização que obtemos neste último caso acarreta que a adaptação não é direta e, portanto, não pode ser utilizadas sem futuros desenvolvimentos.

PALAVRAS CHAVE. Empacotamento de círculos, Contêineres definidos por quárticas, Otimização não linear.

PM - Programação Matemática, OA - Outras aplicações em PO, OC – Otimização Combinatória

ABSTRACT

This work aims to consider concepts related to nonlinear optimization for packaging circles. Precisely, we will examine techniques known from the literature both to solve packaging problems in simple containers and to solve packaging in regions delimited by quadrics. In conclusion, we will engage in analyzing concepts so as to verify the possibility of applying the technique used in the case of packaging in ellipses and parabolas to the regions delimited by a quartic. The lack of uniqueness of the parameterization that we obtain in the latter case means that the adaptation is not direct, and therefore cannot be used without future developments.

KEYWORDS. Packaging circles. Containers defined by quartic. Nonlinear optimization.

MP - Mathematical Programming, OA - Other applications in OR, CO - Combinatorial Optimization

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings

1. Introdução

Este trabalho é produto de pesquisa realizada no Mestrado Profissional em Matemática Aplicada e Computacional da Unicamp. Mais especificamente, neste artigo, serão discutidos alguns problemas de empacotamento de círculos em contêineres simples e em outros objetos mais complexos. A investigação foi desenvolvida com o objetivo de difundir o conhecimento sobre o problema, de modo a contemplar situações em que a região de empacotamento não é usualmente tratada na literatura. Desta maneira, pretendemos contribuir para aumentar o conhecimento sobre as possibilidades de modelagem neste tipo de problema. Isto é importante, por exemplo, para determinar como alocar pessoas dentro de uma sala, um escritório ou um restaurante, que não tenham um formato simples. Uma das principais dificuldades na formulação de um problema de empacotamento é determinar uma região, denominada r-Núcleo, onde devem estar o centro de um círculo de modo a garantir que este círculo esteja todo contido no contêiner. Sendo assim, os problemas mais diretos tratam de regiões em que seus r-Núcleo mantêm a mesma estrutura do contêiner original e, nos mais desafiadores, isto não ocorre.

Problemas de empacotamento são aqueles em que dado um objeto, chamado contêiner, deseja-se alocar nele k itens de modo que esse arranjo obedeça às restrições que garantem que eles estejam inteiramente contidos no objeto e que não se sobreponham. Há diversas variantes para esse tipo de problema. Duas delas, por exemplo, podem ser sintetizadas nas seguintes perguntas: dados k itens, qual é a menor dimensão de um objeto que possa contê-los? Ou, ainda, dado um objeto com determinadas dimensões, qual é a quantidade máxima de itens que ele pode conter? Estas abordagens envolvem problemas de otimização restrita, ou seja, aqueles em que o espaço de busca das soluções é um subconjunto do espaço em que a função objetiva está definida. Para resolvê-los, geralmente são usadas técnicas que incorporam processos algorítmicos iterativos, aqueles em que, a partir de um ponto inicial dado, caminha-se em direção a um ponto de mínimo da função, que pode ser local ou global. Como muitos desses problemas são modelados por funções não convexas, dado um ponto inicial do processo iterativo, há a possibilidade de o algoritmo encontrar um ponto de mínimo local e não global. Uma alternativa, para tentar se chegar a um ponto de mínimo global, é repetir o processo a partir de um ponto inicial mais adequado.

Neste trabalho, resolveremos inicialmente problemas de empacotamento para alguns contêineres específicos: circular e quadrangular. Estas formas foram escolhidas por sua simplicidade e por que a resolução deles oferece uma base sólida para a resolução de outros mais complexos, tais como problema de empacotamento de círculos em regiões onde o r-Núcleo não é simples. Para estes últimos casos, apresentaremos os resultados da representação não tão natural de r-Núcleo, desenvolvida por [Callisaya, 2012], para empacotar itens circulares em contêineres delimitados por uma região elíptica ou por uma parábola e uma reta horizontal. Por fim, verificaremos a possibilidade de estender tais técnicas para o caso de empacotamento em um contêiner delimitado inferiormente pela quártica $y = x^4$ e superiormente pela reta $y = c$, para então discutirmos quais inconvenientes surgem neste caso, os quais podem apresentar resultados numéricos que não são plenamente satisfatórios.

Os processos iterativos necessários para se chegar a uma solução para esses problemas são operacionalizados por meio de métodos computacionais. Para tanto, faremos uso do ALGENCAN, pacote computacional desenvolvido pelos integrantes do projeto TANGO [1], utilizado para resol-

[1] TANGO: (TRUSTABLE ALGORITHMS FOR NONLINEAR GENERAL OPTIMIZATION) - projeto desenvolvido por uma parceria entre o Departamento de Matemática Aplicada da Universidade Estadual de Campinas e o Departamento de Computação Científica da Universidade de São Paulo, trata-se de um conjunto de rotinas para otimização codificadas em FORTRAN.

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings

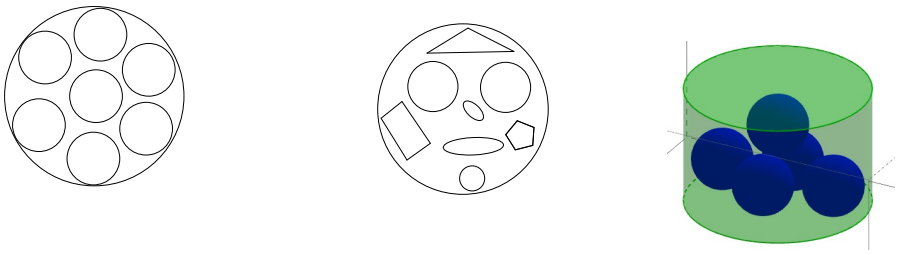
ver problemas de otimização. Esse software é um dos mais bem estabelecidos na literatura sobre otimização e baseia-se no Método do Lagrangeano Aumentado, que é uma evolução do Método de Penalidades, suportando um grande número de variáveis e restrições. Para mais detalhes, pode-se consultar [Birgin e Martínez, 2014].

2. Problemas de empacotamento de itens circulares em contêineres simples

Os problemas de empacotamento consistem em distribuir itens em um contêiner R, isto é, num subconjunto R do espaço. Embora existam diferentes possibilidades de empacotamentos, todas elas têm ao menos dois pontos em comum:

- dois itens quaisquer do arranjo não podem ocupar o mesmo espaço;
- todos os itens devem estar inteiramente contidos no interior de R.

Três exemplos de empacotamento estão ilustrados na Figura 1.



(a) Círculos de raio 1 em um contêiner circular.

(b) Itens diferentes em um contêiner circular.

(c) Esferas de raio 1 em um contêiner cilíndrico.

Figura 1: Formas de empacotamento.

Neste artigo, trabalharemos apenas com itens circulares de mesmo raio. Para modelar o encaixe de itens circulares no interior de um contêiner, definido por uma região R, cuja fronteira é dada por ∂R, executa-se uma tarefa simples que consiste em garantir que os centros dos itens estejam em uma região menor, com a mesma estrutura da original, chamada de r-Núcleo, conforme definida a seguir.

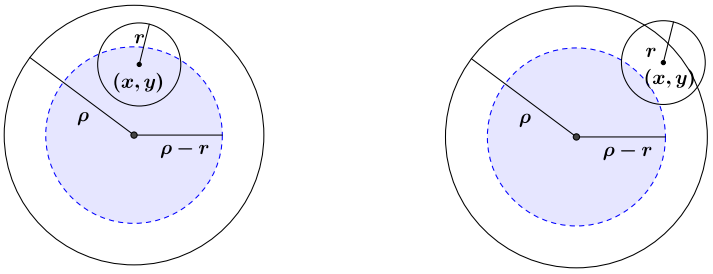
Definição 2.1 *Seja $R \in \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ uma região, chamamos de r-Núcleo de R ao conjunto*

$$K_r(R) = \{x \in R,\ d(x, \partial R) \geq r\}.$$

2.1. Contêiner circular de tamanho mínimo

Nesta subseção, vamos modelar o problema de alocar k itens circulares de raio r, em um contêiner circular, de modo que o raio ρ do contêiner seja o menor possível. Ao observar a Figura 2, constata-se que o r-Núcleo de um contêiner circular é também um círculo, concêntrico a ele, mas com raio $\rho - r$. Detalhes sobre a prova deste resultado podem ser encontrados em [Callisaya, 2012].

Sem perda de generalidade, podemos supor que o centro do contêiner esteja na origem. Considerando, ainda, as restrições de não sobreposição de itens e que eles devem estar inteiramente



(a) Centro do item contido no r-Núcleo.

(b) Centro do item fora do r-Núcleo.

Figura 2: r-Núcleo de um círculo de raio ρ.

na região R, o problema de minimizar o raio ρ deste contêiner, de modo a comportar em seu interior k itens circulares idênticos, pode ser formulado por:

$$\min\ \rho, \quad \text{sujeito a} \begin{cases} (c_i^x)^2 + (c_i^y)^2 \leq (\rho - r)^2, & \forall\, i \in \{1, 2, ..., k\} \\ d(c_i, c_j) \geq 2r, & \forall\, i < j, \quad i, j \in \{1, 2, ..., k\} \end{cases} . \tag{1}$$

O primeiro bloco de restrições indica que cada um dos k círculos está contido no contêiner. Já as demais restrições garantem a não sobreposição dos itens. Observe que, como $d(c_i, c_j) = d(c_j, c_i)$, podemos considerar apenas $i < j$ nas restrições de não sobreposição.

Exemplo 2.2 *Encontrar o menor raio para que um círculo (contêiner) possa conter seis círculos (itens) de raio 1.*

Modelagem:

$$\min \rho, \quad \text{sujeito a} \quad \begin{cases} (c_i^x)^2 + (c_i^y)^2 \leq (\rho - 1)^2, & \forall\, i \in \{1, ..., 6\} \\ (c_i^x - c_j^x)^2 + (c_i^y - c_j^y)^2 \geq 4, & \forall\, i < j, \quad i, j \in \{1, ..., 6\} \end{cases} .$$

Uma possível solução para este problema, encontrada com o auxílio do ALGENCAN, a partir do ponto inicial descrito na Tabela 1, é apresentada na Tabela 2. A ilustração da configuração do empacotamento para o ponto inicial, bem como para a solução obtida, é exibida nas Figuras 3(a) e 3(b), respectivamente.

2.2. Contêiner quadrado de tamanho mínimo

Nesta subseção, estudaremos o problema de encontrar a medida mínima do lado de um quadrado, de modo que nele possamos alocar um dado número de itens circulares idênticos. A função objetivo para este problema é a que busca minimizar o lado L do objeto. Supondo que o contêiner esteja centrado na origem do sistema cartesiano e que queremos empacotar k itens, teremos o modelo tal como descrito no Exemplo 2.3, em que adotamos $k = 10$. Em outras situações, basta atribuir o valor desejado para k.

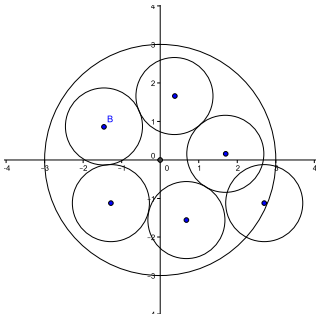
Exemplo 2.3 *Consideremos o problema de encontrar o menor lado de um quadrado, centrado na origem, para que caibam no seu interior 10 círculos de raio 1.*

Tabela 1: Coordenadas dos centros dos itens no ponto inicial e raio do contêiner

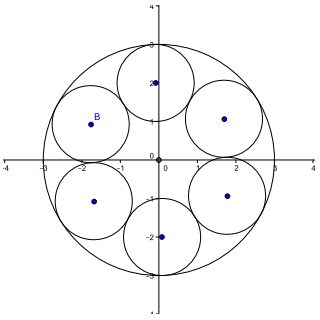
Raio do contêiner $\rho = 3,00000000$		
i	c_i^x	c_i^y
1	0,370000	1,660000
2	-1,460000	0,870000
3	0,680000	-1,560000
4	1,690000	0,160000
5	-1,280000	-1,120000
6	2,7000000	-1,120000

Tabela 2: Coordenadas dos centros dos itens na solução e raio do contêiner

Raio do contêiner $\rho = 3,00000000$		
i	c_i^x	c_i^y
1	-0,08365139	1,99824985
2	-1,77236083	0,92668069
3	0,08365139	-1,99824985
4	1,68870943	1,07156916
5	-1,68870943	-1,07156916
6	1,77236083	-0,92668068



(a) Configuração para o ponto inicial descrito na Tabela 1.



(b) Configuração para o ponto final descrito na Tabela 2.

Figura 3: Seis itens circulares de raio 1 no interior de um contêiner circular de raio mínimo.

Modelagem:

$$\min L, \quad \text{sujeito a} \quad \begin{cases} c_i^x \leq \frac{L}{2} - r, & \forall\, i \in \{1, ..., 10\} \\ -c_i^x \leq \frac{L}{2} - r, & \forall\, i \in \{1, ..., 10\} \\ c_i^y \leq \frac{L}{2} - r, & \forall\, i \in \{1, ..., 10\} \\ -c_i^y \leq \frac{L}{2} - r, & \forall\, i \in \{1, ..., 10\} \\ (c_i^x - c_j^x)^2 + (c_i^y - c_j^y)^2 \geq 4r^2, & \forall i < j, \quad i, j \in \{1, ..., 10\} \end{cases} .$$

As quatro primeiras restrições do modelo garantem que os centros dos itens estejam no $r-$Núcleo. Neste caso, uma possível solução, encontrada com o auxílio do ALGENCAN, a partir do ponto inicial descrito na Tabela 3, é apresentada na Tabela 4. A ilustração da configuração do empacotamento para o ponto inicial, bem como para a solução obtida é exibida nas Figuras 4(a) e 4(b), respectivamente.

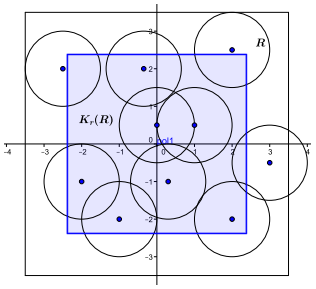
É importante ressaltar que, por estarmos tratando de um processo iterativo, com diversas soluções locais, a solução final é qualitativamente dependente dos dados iniciais fornecidos pelo usuário. Para ilustrar este fato, vejamos a solução fornecida pelo ALGENCAN caso o ponto inicial adotado seja aquele ilustrado na Figura 5(a). A solução está representada na Figura 5(b).

Tabela 3: Coordenadas iniciais dos centros dos itens e valor inicial do lado do contêiner

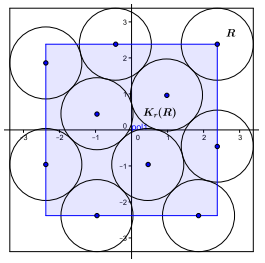
Lado do contêiner $L = 7$		
i	c_i^x	c_i^y
1	-0.3500000	2.0000000
2	0.3000000	-1.0000000
3	2.0000000	2.5000000
4	0.0000000	0.5000000
5	3.0000000	-0.5000000
6	2.0000000	-2.0000000
7	-2.0000000	-1.000000
8	-2.5000000	2.0000000
9	-1.0000000	-2.0000000
10	1.0000000	0.5000000

Tabela 4: Coordenadas dos centros dos itens e lado do contêiner na solução

Lado do contêiner $L = 6.7602787$		
i	c_i^x	c_i^y
1	-0.4482877	2.3801394
2	0.4482877	-0.9659258
3	2.3801394	2.3801394
4	-0.9659258	0.4482877
5	2.3801394	-0.4482877
6	1.8625013	-2.3801394
7	-2.3801394	-0.9659258
8	-2.3801394	1.8625013
9	-0.9659258	-2.3801394
10	0.9659258	0.9659258

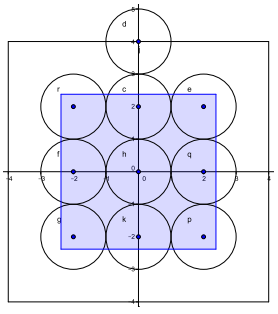


(a) Configuração para o ponto inicial descrito na Tabela 3.

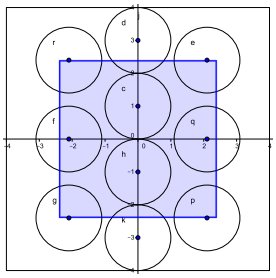


(b) Configuração para o ponto final descrito na Tabela 4.

Figura 4: Dez itens circulares de raio 1 no interior de um contêiner quadrangular de lado mínimo.



(a) Configuração para o novo ponto inicial.



(b) Configuração para o novo ponto final.

Figura 5: Dez itens circulares de raio 1 no interior de um contêiner quadrangular de lado mínimo.

3. Empacotamento de círculos em regiões determinadas por quadráticas

Nos dois problemas apresentados na seção anterior, empacotamento em contêineres circular e quadrangular, foi visto que os r-Núcleo dessas regiões têm a mesma estrutura que as originais, isto é, o núcleo de um círculo é um círculo, assim como o núcleo de um quadrado é, também, um quadrado. Portanto, estas regiões são denominadas simples. A seguir, veremos que, contudo, o r-Núcleo de uma elipse não é uma elipse, o que dificulta a descrição da restrição que garante que um objeto esteja integralmente dentro do contêiner. Situação semelhante acontece com uma região determinada por uma parábola. Para estes casos, apresentaremos uma técnica mais sofisticada para identificar a região onde os centros dos círculos devem estar. O estudo detalhado desta abordagem foi apresentado na tese de doutorado [Callisaya, 2012].

3.1. Empacotamento de círculos em elipses

Modelar a pertinência de itens circulares em contêineres elípticos não é tão simples como nos casos anteriores, pelo fato já descrito de que o r-Núcleo de uma elipse não é uma elipse menor, como pode ser visto na Figura 6. Na Figura 6(a), é possível observar, por exemplo, que o círculo de raio r, centrado no ponto $(0, b - r)$, está inteiramente contido na elipse maior e que o mesmo não ocorre para outros itens de raios idênticos centrados em outros pontos da borda da elipse azul. Já a Figura 6(b), ilustra o r-Núcleo e nota-se que nos pontos $(-c, 0)$ e $(c, 0)$ temos uma falta de suavidade, o que o impede que seja uma elipse.



(a) Alguns itens não estão contidos no contêiner mesmo quando seu centros estão em uma região elíptica menor.

(b) Nos pontos $(-c, 0)$ e $(c, 0)$ a curva que define o r-Núcleo não é suave, portanto não é uma elipse.

Figura 6: Ilustração do porquê do r-Núcleo de uma elipse não ser uma elipse.

Pelo exposto, é possível afirmar que a dificuldade de modelar o empacotamento de itens circulares, de raio r, no interior de uma elipse, reside no fato de ser difícil determinar seu r-Núcleo. O ponto-chave para resolver este problema é descobrir qual é a região interna em que a distância de qualquer ponto nesta região à borda da elipse seja maior ou igual a r. A estratégia adotada para sanar esta dificuldade será, dado um ponto $p = (u, v)$, no interior da elipse, encontrar o ponto $q = (x, y) \in \partial E$, em que ∂E representa a borda da elipse, cuja distância ao ponto dado seja a menor possível. Para resolver esse problema, Callyssaia partiu de um ponto $p = (u, 0)$ localizado no eixo focal da elipse dada pela equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2}$$

em que $a \geq b$, conforme mostra a Figura 7, e constatou que um tal ponto q está na reta que passa por p e é perpendicular à ∂E. Após esta verificação, o autor concluiu que para todo ponto k, no segmento $\overline{pq}$, a menor distância entre ele e ∂E é dada pela sua distância em relação ao ponto q. O passo seguinte para resolver problemas de empacotamento em elipses foi desenvolver uma aplicação

para mapear os pontos no interior de E, a partir de um ponto de sua borda, que estão no segmento $\overline{pq}$. A aplicação $H : \partial E \times [0,1] \longrightarrow E$, definida por

$$H(x, y, s) = (\sigma(s)x, sy), \tag{3}$$

em que $\sigma(s) = \left(1 + (s-1)\frac{b^2}{a^2}\right)$, cumpre esse papel. Detalhes do desenvolvimento desta expressão podem ser encontrados em [Callisaya, 2012] e [Bortolete, 2016]. Nesta aplicação, cada ponto no interior da elipse é representado por três números reais (x, y, s), em que $(x, y) \in \partial E$ e $s \in [0, 1]$ é um parâmetro que indica o grau de proximidade do ponto (x, y) à fronteira ∂E, pois para $s = 1$ tem-se que $H(x, y, s) \in \partial E$.

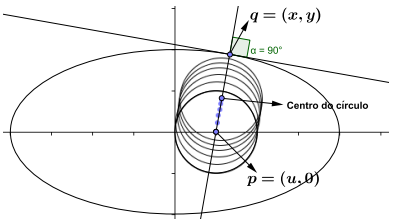


Figura 7: Círculos centrados no segmento $\overline{pq}$.

A representação H definida em (3) permite que a principal dificuldade de empacotamento em regiões elípticas seja superada, uma vez que para todo $k \in E$, $k = H(q, s)$ para algum $q \in \partial E$ e $s \in [0, 1]$ temos que:

$$d(k, \partial E) = d(H(q, s), q) = (s-1)\sqrt{x^2\left(\frac{b}{a}\right)^4 + y^2}.$$

Deste modo, obtém-se um método para calcular a distância à fronteira da região E, que permite encontrar o núcleo de E:

$$H(q, s) \in K_r(E) \Leftrightarrow \begin{cases} q \in \partial E \\ 0 \leq s \leq 1 \\ d(q, H(q, s)) \geq r \end{cases}. \tag{4}$$

O problema de empacotamento de k itens circulares de raio r em um contêiner elíptico pode, portanto, ser solucionado resolvendo-se o seguinte problema de viabilidade:

$$\begin{cases} b^2(x^i)^2 + a^2(y^i)^2 = a^2b^2, & \forall\, i \in \{1, ..., k\} \\ (s_i - 1)^2\left[(x^i)^2\left(\frac{b}{a}\right)^4 + (y^i)^2\right] \geq r^2, & \forall\, i \in \{1, ..., k\} \\ (\sigma(s_i)x^i - \sigma(s_j)x^j)^2 + (s_iy^i + s_jy^j)^2 \geq 4r^2, \quad \forall\, i < j & i, j \in \{1, ..., k\} \\ 0 \leq s_i \leq 1, & \forall\, i \in \{1, ..., k\} \\ b \leq a \end{cases}. \tag{5}$$

A seguir, no Exemplo 3.1, adotando este método, resolveremos uma das possíveis variações para o problema de empacotamento em elipse.

Exemplo 3.1 *Neste exemplo, desejamos encontrar a elipse de menor área que possa conter 6 discos de raio* $r = 1$*. Este problema pode ser formulado como sendo o seguinte problema de programação não linear:*

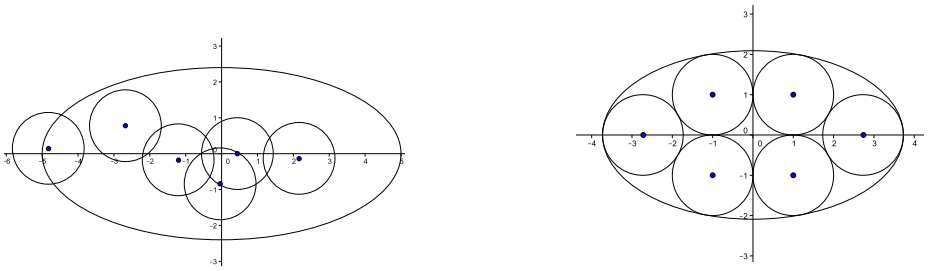
$$\min ab, \quad \textit{sujeito a} \quad \begin{cases} b^2(x^i)^2 q + a^2(y^i)^2 = a^2b^2, & \forall\, i \in \{1,...,6\} \\ (s_i - 1)^2 \left[(x^i)^2 \left(\frac{b}{a}\right)^4 + (y^i)^2\right] \geq 1, & \forall\, i \in \{1,...,6\} \\ (\sigma(s_i)x^i - \sigma(s_j)x^j)^2 + (s_i y^i + s_j y^j)^2 \geq 4, \quad \forall\, i < j & i,j \in \{1,...,6\} \\ s_i \leq 1, & \forall\, i \in \{1,...,6\} \\ 0 \leq s_i, & \forall\, i \in \{1,...,6\} \\ b \leq a \end{cases},$$

em que $\sigma(s) = \left(1 + (s-1)\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)$.

Neste problema, o número de variáveis é $n = 3k + 2 = 3 \cdot 6 + 2 = 20$ e o número de restrições é $m = 4k + \frac{k(k-1)}{2} + 1 = 40$.

A solução apresentada a seguir foi obtida por meio do ALGENCAN. O ponto inicial adotado está representado na Figura 8(a). A solução obtida a partir deste ponto está na ilustração do empacotamento na Figura 8(b). Aparentemente, a configuração obtida é a melhor possível. Pela aplicação definida em (3), as coordenadas dos centros (x_i, y_i), tanto na configuração inicial quanto na final, podem ser recuperadas usando:

$$(c_i^x, c_i^y) = (\sigma(s_i)x^i, s_i y^i).$$



(a) Configuração para o ponto inicial. (b) Configuração para a solução.

Figura 8: Ponto inicial e solução encontrada para o problema do Exemplo 3.1.

3.2. Empacotamento de círculos em uma região delimitada por uma parábola e pela reta $y = c$

De modo análogo ao caso anterior, interessa-nos, para esta modelagem, uma aplicação para mapear os pontos no interior de E, a partir de um ponto de sua borda. A aplicação $H : \partial E \times [0,1] \longrightarrow E$, definida por:

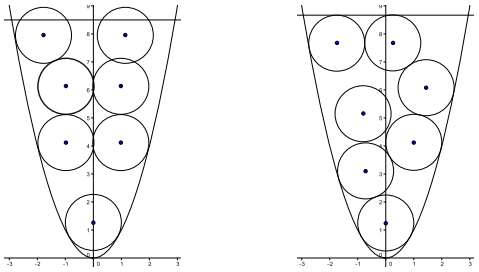
$$H(q,s) = \left(sx, y + \frac{1-s}{2}\right),\ 0 \leq s \leq 1, \tag{6}$$

faz esse mapeamento. Os detalhes sobre esse desenvolvimento podem ser encontrados em [Callisaya, 2012]. A partir dessa aplicação, temos o modelo, apresentado no Exemplo 3.2, para empacotar k círculos de raio 1 no interior desse contêiner de modo que ele seja o menor possível.

Exemplo 3.2 *Neste exemplo, desejamos encontrar o menor contêiner limitado inferiormente pela curva $y = x^2$ e superiormente pela reta $y = c$ de modo que possa conter em seu interior 7 discos de raio $r = 1$. Este problema pode ser formulado como sendo o seguinte problema de programação não linear:*

$$\min c, \quad \textit{sujeito a} \quad \begin{cases} \left(x^i\right)^4 = y^i,\ i \in \{1,...,7\} \\ \left(s_i x^i - x^i\right)^2 + \left(\frac{1-s_i}{4(x^i)^2}\right)^2 \geq 1,\ i \in \{1,...,7\} \\ \left(s_i x^i - s_j x^j\right)^2 + \left(\left(y^i + \frac{1-s_i}{4(x^i)^2}\right) - \left(y^j + \frac{1-s_j}{4(x^j)^2}\right)\right)^2 \geq 4,\ i < j \\ y^i + \frac{1-s_i}{4(x^i)^2} \leq c - 1,\ i \in \{1,...,7\} \\ s_i \leq 1,\ i \in \{1,...,7\} \\ 0 \leq s_i,\ i \in \{1,...,7\} \end{cases}.$$

A Figura 9 ilustra as configurações inicial e final para o empacotamento.



(a) Configuração para o ponto inicial.

(b) Configuração para o ponto final.

Figura 9: Ponto inicial e solução encontrada para o problema do Exemplo 3.2.

4. Empacotamento de círculos em regiões determinadas por quárticas

Nesta seção, teceremos algumas considerações sobre o problema de empacotar círculos idênticos em uma região E, limitada inferiormente pela curva $y = x^4$ e, superiormente, pela reta $y = c$. Assim como no contêiner elíptico, o ponto q mais próximo de p é o ponto (x, y) da borda que está na reta normal à curva em q e passa por p, uma vez que as curvas de nível da função que determina a distância a um ponto dado também são círculos e, portanto, a curva que passa pelo ponto de menor distância tangencia o contêiner. Entretanto, neste novo caso, para um dado ponto $p \in E$ podem existir, na fronteira ∂E, diferentes pontos q_i, tais que as retas pq_i são normais à curva e nem todos esses pontos realizam a menor distância, como mostra a Figura 10.

A exemplo do que foi feito nos dois casos anteriores, podemos obter uma aplicação sobrejetora $H : \partial E \times [0, 1] \longrightarrow E$ que mapeia cada ponto q da fronteira da quártica no segmento $\overline{pq}$, em que p está no eixo y, e que garanta que o segmento $\overline{pq}$ é normal à curva. Fazendo isto obtemos que H é definida por:

$$H(q, s) = \begin{cases} \left(sx, y + \frac{1-s}{4x^2}\right), & \text{se } x \neq 0, \\ (0, 0), & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{7}$$

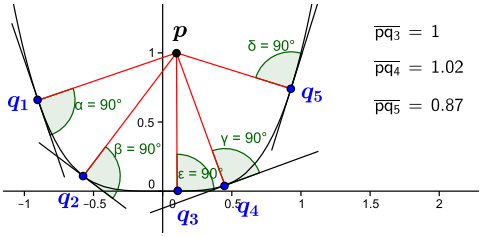


Figura 10: Dado ponto p, podem existir mais de um ponto q, na fronteira de uma quártica, tais que a reta que liga p a estes pontos são normais à curva. Neste exemplo, as coordenadas de p são $(0.1, 1)$.

A descontinuidade de H pode ser desconsiderada pois a origem é claramente inviável e valores de x próximos de zero também deve ser evitados por um algoritmo computacional pela dificuldade de respeitar o limitante superior do contêiner. Definida a aplicação H, a distância de p a q pode ser facilmente calculada. Desta maneira, caso queiramos empacotar k círculos de raio 1 no interior do menor contêiner delimitado pela curva $y = x^4$ e a tampa $y = c$, devemos resolver o seguinte problema de otimização:

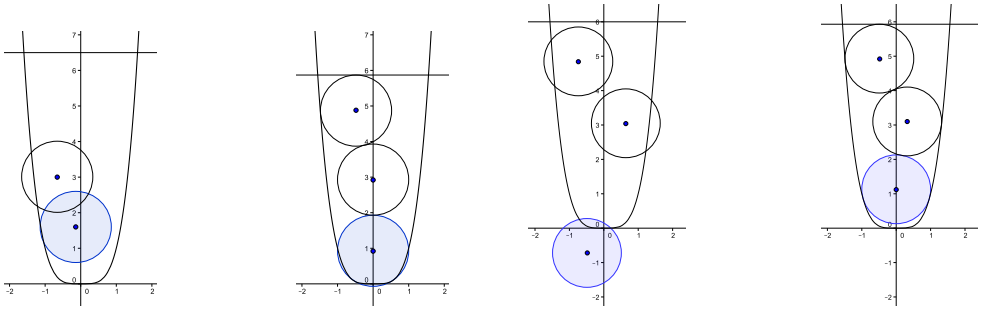
$$\min c,$$
$$\text{sujeito a } \begin{cases} \left(x^i\right)^4 = y^i, & \forall i \in \{1,...,k\} \\ \left(s_i x^i - x^i\right)^2 + \left(\frac{1-s_i}{4(x^i)^2}\right)^2 \geq 1 & \forall i \in \{1,...,k\} \\ \left(s_i x^i - s_j x^j\right)^2 + \left(\left(y^i + \frac{1-s_i}{4(x^i)^2}\right) - \left(y^j + \frac{1-s_j}{4(x^j)^2}\right)\right)^2 \geq 4 & \forall\, i < j; i,j \in \{1,...,k\} \\ y^i + \frac{1-s_i}{4(x^i)^2} \leq c - 1 & \forall i \in \{1,...,k\} \\ 0 \leq s_i \leq 1 & \forall i \in \{1,...,k\} \end{cases}.$$

Entretanto, a existência de diferentes retas que passam por p e são normais à curva gera alguns inconvenientes, já que, se não for considerada uma que realiza a menor distância à fronteira, a solução encontrada pode ser inviável. Ou seja, a equivalência entre o r-Núcleo da região de interesse e o conjunto viável do modelo de otimização só se daria se exigíssemos que o ponto $H(q, s)$ fosse representado pelo ponto q correto. Situações como estas são exibidas no Exemplo 4.1 a seguir.

Exemplo 4.1 *Neste exemplo, desejamos encontrar o menor contêiner, limitado inferiormente pela curva $y = x^4$ e, superiormente pela reta $y = c$, de modo que possa conter em seu interior 3 discos de raio $r = 1$.*

Apresentaremos duas soluções. A primeira delas, exibida na Figura 11(b), foi obtida a partir do ponto inicial ilustrado na Figura 11(a). Essa, na verdade não é uma solução aceitável, uma vez que como pode ser observado, o primeiro círculo, o azul, não está inteiramente no contêiner. Isso ocorreu, conforme alertado anteriormente, porque a reta normal à curva não realiza a menor distância entre p e a fronteira. A segunda solução, ilustrada na Figura 11(d), foi obtida a partir do ponto inicial representado na Figura 11(c).

Este último exemplo possibilitou entender que a modelagem para contêineres delimitados por quárticas não pode ser obtida, sem os devidos ajustes, a partir do modelo descrito para elipses. Além disso, foi possível constatar que sua solução é sensivelmente dependente do ponto inicial e que, para alguns casos, nem ao menos será viável, embora respeite as restrições do modelo. Para



(a) Configuração para o primeiro ponto inicial. (b) Primeira solução. (c) Configuração para o segundo ponto inicial. (d) Segunda solução.

Figura 11: Três círculos em um contêiner limitado pela curva $y = x^4$ e pela reta $y = c$.

maiores detalhes acerca dos problemas encontrados neste último contêiner e de outras possibilidades de modelagem, recomenda-se a leitura de [Bortolete, 2016].

4.1. Considerações Finais

Os problemas de empacotamento de círculos são, do ponto de vista matemático, instigantes e desafiadores, além de constituírem uma boa oportunidade para aplicar técnicas de otimização. No entanto, a motivação para o estudo destes problemas transcende os aspectos puramente teóricos da Matemática e encontra justificativa nas diversas aplicações que se desenvolvem a partir deles. Essas técnicas são de uso amplo em diversas situações, por exemplo, um problema atual de interesse social que consiste em encontrar o distanciamento ideal entre pessoas em um ambiente fechado, de modo a minimizar a possibilidade de contágio pelo Coronavírus. Para isso, pode-se, por exemplo, mudar a função objetivo do problema para maximizar a distância entre os centros dos itens que, neste caso, representariam a posição dos alunos na sala de aula.

Do ponto de vista da técnica aqui apresentada, que se baseia em processos iterativos, é necessário enfatizar a importância de uma escolha adequada do ponto inicial, uma vez que as funções não convexas podem possuir diversos pontos estacionários e alguns deles não são mínimos globais, os quais nos interessam. Assim, em algumas situações, a depender do ponto inicial adotado, teremos uma solução de melhor ou pior qualidade.

Por fim, apresentamos uma nova parametrização para descrever pontos no interior de um contêiner limitado inferiormente por uma quártica. Entretanto, mostramos que esta parametrização não é única e, portanto, não é trivial a extensão do modelo proposto em Callisaya [2012] às curvas que não são descritas por equações quádricas.

Referências

Birgin, E. G. e Martínez, J. M. (2014). *Practical augmented lagrangian methods for constrained optimization*. SIAM, Philadelphia.

Bortolete, J. C. (2016). Empacotamento de círculos usando otimização não linear. Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas.

Callisaya, H. F. (2012). *Empacotamento em Quadráticas*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas.