Uma abordagem exata do problema p-*hub* Centro

Jardell Fillipe da Silva[1,2]
jardell.jfs@gmail.com

Maria Amélia Lopes Silva[1]
mamelia@ufv.br

Elisangela Martins de Sá[2]
elisangela.martinss@gmail.com

Sérgio Ricardo de Souza[2]
sergio@dppg.cefetmg.br

Marcone Jamilson Freitas Souza[3]
marcone@edu.ufop.br

[1] Universidade Federal de Viçosa - *Campus* Florestal - UFV
Rodovia LMG 818, Km 6, S/N - CEDAF - Florestal - MG - Brasil
[2] Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais - CEFET - MG
Av. Amazonas, 7675, CEP: 30510-000, Belo Horizonte, MG, Brasil
[3]Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP
Campus Universitário - Morro do Cruzeiro - Ouro Preto - MG - Brasil

RESUMO

Este artigo aborda duas variantes do Problema p-*hub* Centro (p-HCP): (i) p-*hub* Centro não Capacitado de Múltiplas Alocações (UMApHCP); e (ii) p-*hub* Centro Capacitado de Múltiplas Alocações (CMApHCP). O Problema p-*hub* Centro consiste em definir p *hubs* em um grafo completo e alocar clientes a eles, em uma topologia eixo-raio, tendo como objetivo minimizar o custo máximo incorrido pelo sistema. Os nós não *hubs* conectam-se a pelo menos um *hub*. Dois modelos matemáticos distintos, em relação à forma de atribuição de capacidade aos nós *hubs*, são apresentados para o problema capacitado. Uma programação matemática exata para cada modelo é desenvolvida utilizando-se do Solver CPLEX para solucionar o problema. Testes computacionais são realizados utilizando o conjunto de instâncias AP (*Australian Post*), a fim de validar os modelos apresentados e analisar características do problema.

PALAVRAS CHAVE. Localização de *hubs*. p-*hub* Centro. Otimização Combinatória.
Tópicos: Logística e Transportes. Programação Matemática.

ABSTRACT

This article addresses two variants of the p Hub Center Problem (p-HCP): the UnCapacitated Multiple Allocation p-Hub Center Problem (UMApHCP), and the Capacitated Multiple Allocation p-Hub Center Problem (CMApHCP). This problem consists of defining p hubs in a complete graph and allocating customers to them, in a radius-axis topology, aiming to minimize the maximum cost incurred by the system. Non-hubs nodes connect to at least one hub. Two different mathematical models, concerning the way of allocating capacity to the hub nodes, are presented for the capacitated problem. For each proposed model, exact mathematical programming is developed, using Solver CPLEX to solve instances of the problem. Computational tests were performed using the set of AP instances (Australian Post), to validate the models presented and analyze the characteristics of the problem.

KEYWORDS. Hub Location. p-hub Center. Combinatorial Optimization.
Paper Topics: Logistics and Transport. Mathematical Programming.

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings

1. Introdução

Sistemas com grande demanda de fluxo origem-destino entre todos os nós necessitam de uma boa programação logística para que todo o fluxo seja atendido da forma mais eficiente. Partindo de um sistema no qual todos os nós estão conectados e possuem demanda entre si, uma topologia ponto-a-ponto pode ser ineficiente e custosa para o sistema. Topologias eixo-raio são mais eficientes e geram economia tanto do ponto de vista financeiro quanto em numero de conexões. Estas topologias caracterizam-se pela existência de centros de conexão (*hubs*), que podem ser utilizados para triagem, distribuição e transbordo dessas mercadorias. Em um sistema constituído de um grande numero de nós, definir centros de distribuição e definir o fluxo de operação é uma tarefa onerosa e, desta necessidade, surge a proposição do Problema de Localização de *Hubs*. Farahani et al. [2013] apresentam este problema como uma nova e prospera área na teoria de localização. Alumur e Kara [2008] e Farahani et al. [2013] apresentam o estado da arte, modelos, classificação, técnicas de solução e aplicações das variantes dos problemas de localização de *hubs*.

Este trabalho aborda o Problema p-*hub* Centro (em inglês, p-*hub Center Problem*) que consiste em localizar p *hubs* de forma a minimizar o custo máximo do percurso. Este tipo de problema, que é uma das mais importantes variantes do problema de localização de *hubs*, é aplicado em casos práticos que priorizam a rapidez na coleta/entrega. Casos reais com esta característica podem ser encontrados em sistemas de urgência e emergência e sistemas de entrega de alimentos perecíveis, que têm, como característica intrínseca, a limitação do tempo de entrega.

O presente artigo tem como objetivo solucionar esta variante do problema de Localização de *hubs*, o Problema p-*hub* Centro, abrangendo as versões sem restrições de capacidade e com restrições de capacidade. Adicionalmente, de forma a apresentar modelos matemáticos com diferentes características e solucioná-los de forma exata, é utilizado o Solver CPLEX. Visando o objetivo pretendido, é realizado também um levantamento bibliográfico sobre o problema p-*hub* Centro. Desta forma, deseja-se que os resultados computacionais demonstrem as características do problema, além de validar e apresentar semelhanças e/ou diferenças entre os modelos.

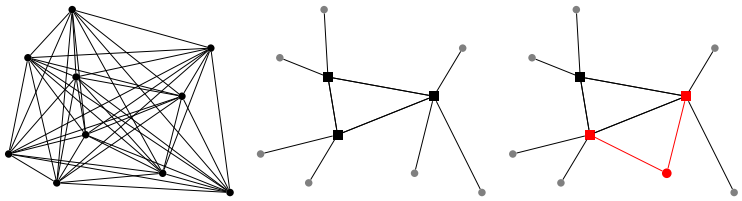
Este trabalho está estruturado da seguinte forma. Na Seção 2, uma revisão sobre o Problema p-*hub* Centro é apresentada. A seguir, na Seção 3, as variante do problema são explanadas e seus modelos são apresentados. Os experimentos computacionais e seus resultados são descritos na Seção 4. Por fim, na Seção 5, são apresentadas as considerações finais e as direções futuras.

2. Problema p-*hub* Centro

O Problema de Localização de *hubs* (em inglês, *hub Location Problem* - *HLP*) consiste em definir nós intermediários em um grafo completo, no qual estes nós são considerados pontos de roteamento, concentração, distribuição e/ou triagem de fluxo, afim de gerar economicidade do sistema. Entretanto, definir quais nós serão *hubs* e quais clientes alocar a estes não é uma tarefa trivial. Originado em sistemas de telecomunicação, *hubs* são frequentemente utilizados em sistemas logísticos, de transportes, de aviação civil, de remessas expressas, de serviços postais, dentre outros. Boas revisões de problemas de localização de *hubs* podem ser encontradas em Alumur e Kara [2008] e Farahani et al. [2013].

A Figura 1(a) representa uma topologia de conexão ponto a ponto em um grafo completo, de forma que todos os nós do grafo estão ligados diretamente entre-si. Já a Figura 1(b) apresenta uma topologia eixo-raio de simples alocação (SA). Nesta segunda topologia, a conexão entre os nós possui nós centrais (*hubs*) e cada nó que não é central conecta-se apenas a um nó central. Por fim, a Figura 1(c) apresenta um topologia eixo-raio, que diferi da Figura 1(b) apenas na forma de conexão entre os nós não centrais aos nós centrais. Os nós desta última topologia podem conectar-se

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o Galoá proceedings



(a) Ponto a Ponto (b) Eixo-Raio-SA (c) Eixo-Raio-MA

Figura 1: Conexão entre pares de origem-destino.

a mais de um nó central (múltipla alocação - MA). Problemas de localização de *hubs* possuem diversas variantes e são classificadas segundo as seguintes propriedades: **Domínio da solução** (Rede, Discreto e Contínuo); **Função objetivo** (Critério $\min$-$\sum$, Critério $\min$-$\max$); **Determinação do número de *hubs*** (Exógena, Endógeno); **Número de *hubs*** (*hub* único, Vários *hubs*); **Capacidade do *hub*** (Não-capacitado, Capacitado); **Custo de localização do *hub*** (Sem custo, Custo fixo, Custo variável); **Alocação** (Simples alocação, Múltipla alocação); **Custo de conexão com o *hub*** (Sem custo, Custo fixo, Custo variável).

Farahani et al. [2013] apresentam uma revisão detalhada em relação aos problemas de localização de *hubs*. A partir desta revisão, é possível observar que os modelos nos quais a forma de avaliação da solução é o critério min-max são pouco investigados, uma vez que apenas 9% de todas as pesquisas apresentadas em Farahani et al. [2013] abordam este tipo de problema. Já Zabihi e Gharakhani [2018] apresentam uma revisão de literatura acerca de problemas de localização de *hubs*, em que são apresentadas as direções das pesquisas nos período 2013-2015. Os resultados encontrados por Zabihi e Gharakhani [2018] apontam que apenas 13% das publicações trabalham problemas de localização de centro de *hubs*. Pode-se assim observar um crescimento, ainda que pequeno, das pesquisas que se concentram em solucionar problemas de localização de centro de *hubs*. Isso se deve à sua aplicação em problemas de urgência e emergência e sistemas restritos ao tempo de entrega/percurso.

O Problema p-*hub* Centro (*em inglês, p-hub Center Problem - p-HCP*) consiste em minimizar o custo máximo entre os pares origem-destino (critério $\min$-$\max$) em um sistema com demanda origem-destino entre todos os nós. O p-HCP foi proposto em Campbell [1994], no qual são apresentadas as formulações de otimização linear inteira de 4 problemas de localização de *hubs* discretos. Um novo modelo para o problema p-*hub* Centro de Simples Alocação é proposto em Kara e Tansel [2000] e comparado com o modelo básico apresentado anteriormente em Campbell [1994], incluindo estudos sobre aspectos computacionais e sua complexidade, mostrando que este problema é NP-Difícil, bem como demonstram que o modelo por eles proposto é mais eficiente computacionalmente. Campbell et al. [2007] apresentam uma melhoria nas formulações, além de introduzir o problema de alocação do p-HCP como um subproblema do p-HCP. Campbell et al. [2007] determinam também que, em alguns casos especiais, o problema de alocação do p-HCP é polinomialmente solúvel.

Ernst et al. [2009] apresenta novas formulações matemáticas, bem como testes computacionais que comprovam a ineficiência das modelagens com 3 e 4 índices para ambos os problemas. Já Meyer et al. [2009] introduz um algoritmo de resolução em duas fases para o problema de alocação única não capacitado. Na primeira fase, um conjunto de combinações possíveis de *hubs* ótimos é construído. A segunda fase consiste em resolver o problema de alocação com uma formulação de tamanho reduzido. Adicionalmente, o algoritmo ACO (Otimização de Colônia de Formigas) é im-

Tabela 1: Artigos p-*hub* Centro

Artigo	Alocação	Capacitado	Nº Nós	Método de Solução
Ernst et al. [2009]	SA/MA	Não	250	Exato/Heurístico
Calik et al. [2009]	SA	Não	81	Heurístico
Gavriliouk [2009]	SA	Não	1000	Heurístico
Meyer et al. [2009]	SA	Não	1000	Heurístico
Sim et al. [2009]	SA	Não	40	Heurístico
Kara e Tansel [2000]	MA	Não	25	Exato
Yaman e Elloumi [2012]	SA	Não	70	Exato
Bashiri et al. [2013]	SA	Sim	25	Heurístico
Brimberg et al. [2017a]	MA	Não	1000	Exato/Heurístico
Brimberg et al. [2017b]	SA	Não	1000	Exato/Heurístico
Silva et al. [2019a]	MA	Não	400	Heurístico
Silva et al. [2019b]	MA	Não	400	Heurístico

plementado, para encontrar um bom limite superior. Testes computacionais comprovam a eficiência em problemas para até 400 nós. Yaman e Elloumi [2012] também propõem novas formulações para o problema, e utilizam-se de um algoritmo baseado em Relaxação Lagrangeana e Busca Local para resolução do problema.

Brimberg et al. [2017b] propõem uma heurística para resolução do problema de alocação simples não capacitado (USApHCP), baseada na metaheurística *General Variable Neighborhood Search* (GVNS). O algoritmo GVNS possui, como ferramenta de busca local, a heurística *Variable Neighborhood Descent* (VND). Brimberg et al. [2017b] adotam duas estruturas de vizinhança para a busca no espaço de soluções. Testes computacionais foram realizados para verificar a eficiência do método e os resultados mostram sua eficiência em relação aos métodos anteriores. Brimberg et al. [2017a] apresentam uma implementação da metaheurística *Basic Variable Neighborhood Search* (BVNS) para resolução do problema de alocação múltipla não capacitado do p-*hub* Centro (UMApHCP). Dois modelos matemáticos de 3 e 4 índices e uma heurística *Multi-Start* foram desenvolvidos como base para os testes. Após toda a configuração de *hubs*, gerada pelo BVNS, é realizada a alocação do p-*hub* Centro através de uma adaptação do algoritmo de caminho mínimo de Floyd-Warshall.

Silva et al. [2019a] apresentam a resolução do UMApHCP de forma heurística, que utiliza a estrutura multiagente proporcionada pelo *Framework* AMAM [Silva et al., 2019b]. Nesta estrutura multiagente, uma metaheurística híbrida é instanciada como agente autônomo na resolução do problema. Silva et al. [2019b] também solucionam o UMApHCP, utilizando o algoritmo genético e técnicas de aprendizado, que são aplicadas na escolha dos operadores de cruzamento do algoritmo.

A Tabela 1 resume os estudos relacionados ao problema p-*hub* Centro encontrados na literatura. Esta Tabela inclui artigos que abordam o problema e suas características, como a forma de alocação, se o problema tratado apresenta restrições de capacidade ou não, o numero de nós, e a forma de resolução dos problemas utilizada nos estudos. Analisando esta Tabela, verifica-se que problemas p-*hub* Centro que possuem características de múltiplas alocações (MA) são menos tratados que os problemas de simples alocação (SA). Além disso, observa-se que problemas que possuem restrições de capacidade também são pouco abordados. Dentro deste contexto, este artigo direciona seus esforços para solucionar variantes do Problema p-*hub* Centro voltadas para estas lacunas. Estas variantes serão melhor descritas na Seção seguinte.

3. Caracterização do Problema

Este artigo trata três variantes do Problema p-*hub* Centro. A primeira variante tratada é o Problema p-*hub* Centro não Capacitado de Múltiplas Alocações (*Uncapacitated Multiple Allocation p-hub Center Problem - UMApHCP*). Em seguida, são tratadas 2 formulações do Problema p-*hub*

Centro Capacitado de Múltiplas Alocações (*Capacitated Multiple Allocation p-hub Center Problem - CMApHCP*). Estas formulações se diferem pela forma na qual a capacidade do nó *hub* é atribuída.

3.1. UMApHCP

O UMApHCP consiste em definir quais nós serão *hubs* e quais clientes serão alocados a eles, de forma que o custo máximo de transporte entre todos os pares origem-destino seja minimizado. Os nós não *hubs* não possuem restrições de alocação (múltipla alocação) e os nós *hubs* não possuem restrições de capacidade (não capacitado). O UMApHCP é descrito da seguinte forma: dado um grafo $E = (N, A)$, em que $N = \{1, 2, \ldots, i, \ldots, n\}$ representa o conjunto de nós e $A = \{(i,j) \mid i,j \in N\}$ representa o conjunto de arcos, defina o conjunto H de nós *hub*, de modo que $H \subset N$ e $|H| = p$. Assim, todo nó $i \in N$ é um candidato a entrar no conjunto H; todo nó $i \in N$ é alocado a pelo menos um *hub* pertencente ao conjunto H; todo nó $i \in N$ não *hub* pode se conectar a qualquer *hub* em H; os *hubs* em H não apresentam restrições de capacidade; o transporte direto entre nós não *hub* não é permitido; e o custo de transporte d_{ij} é calculado por:

$$d_{ij} = \gamma c_{ih_i} + \alpha c_{h_i h_j} + \beta c_{h_j j} \tag{1}$$

de forma que γ, α e β são descontos/penalidades de transporte atribuídos aos *hubs* [Ernst et al., 2009]. Na Expressão (1), c_{ih_i} representa o custo de coleta entre o nó origem i e o *hub* h_i; $c_{h_i h_j}$ representa o custo de transferência entre o *hub* h_i e o *hub* h_j; e $c_{h_j j}$ representa o custo de distribuição entre o *hub* h_j e o nó destino j. Considerando-se que, para efetivar o arco (i,i), quando i é um nó não *hub*, temos que necessariamente passar por um nó *hub*, assume-se, então, que $c_{ii} \geq 0$. O objetivo do problema é minimizar o custo máximo entre os pares origem-destino do grafo. Assim, seja s uma variável de decisão contínua, que representa o valor da função objetivo; z_k uma variável de decisão binária, de modo que $z_k = 1$ se o nó k é definido como *hub* e $z_k = 0$, caso contrário; e y_{ijkl} uma variável de decisão binária de quatro índices, tal que $y_{ijkl} = 1$ se a demanda do arco (i,j) passa pelo arco formado pelos hubs (k,l), e $y_{ijkl} = 0$, caso contrário. O modelo matemático do UMApHCP, conforme proposto por Ernst et al. [2009], é dado por:

$$\begin{aligned}
\min \quad & s && (2)\\
\text{sujeito a:} \quad & \sum_{k \in N} z_k = p && (3)\\
& \sum_{k \in N} \sum_{l \in N} y_{ijkl} = 1, \quad i,j \in N && (4)\\
& \sum_{k \in N} y_{ijkl} \leq z_l, \quad i,j,l \in N && (5)\\
& \sum_{l \in N} y_{ijkl} \leq z_k, \quad i,j,k \in N && (6)\\
& s \geq \sum_{k \in N} \sum_{l \in N} (\gamma c_{ik} + \alpha c_{kl} + \beta c_{lj}) y_{ijkl}, \quad i,j \in N && (7)\\
& y_{ijkl}, z_k \in \{0,1\}, \quad s \in \mathbb{R}_+, \quad i,j,k,l \in N && (8)
\end{aligned}$$

Neste modelo, a Expressão (3) garante que o número de hubs selecionados seja exatamente igual a p. A Expressão (4) assegura que a demanda (i,j) seja atendida apenas por um arco (k,l). As Expressões (5) e (6) garantem que os nós não hubs sejam atribuídos apenas a nós hubs. A Expressão (7) determina que s seja o limitante superior de custo, dentre todas as demandas do grafo.

Para definir o modelo matemático para o problema CMApHCP, é naturalmente necessária a inclusão de restrições de capacidade no problema não-capacitado (UMApHCP). Os valores de capacidade dos nós *hubs* podem ser incluídos de diferentes formas [Campbell et al., 2007]: atribuídos apenas ao nó de coleta; atribuídos ao nó de coleta e ao nó de distribuição; ou, atribuídos ao arco de coleta/entrega. No presente artigo são apresentados dois modelos para o CMApHCP. O primeiro modelo apresenta valores de capacidade para os nós de coleta e distribuição. No segundo modelo, os valores de capacidade são incluídos apenas no nó de coleta. Os dois modelos e suas restrições de capacidade são melhores descritos a seguir.

3.2. CMApHCP com Capacidade Dupla

Em sistema reais de demanda origem-destino, é mais efetivo considerar restrições de capacidade aos nós *hubs*. Desta forma, a capacidade, normalmente, está ligada tanto ao *hub* de coleta quanto ao de distribuição. Portanto, o primeiro modelo do CMApHCP considera a capacidade no nó de coleta e no nó de distribuição e, assim, o fluxo trafegado é descontado tanto da capacidade do nó de coleta, quanto na capacidade do nó de distribuição, ou seja:

$$\sum_{i\in N}\sum_{j\in N} w_{ij}\left[\sum_{l\in N}(y_{ijkl}+y_{ijlk})-y_{ijkk}\right]\leq cap_k,\quad k\in N \tag{9}$$

que inclui restrições de capacidade nos nós de coleta k e distribuição l ($y_{ijkl}+y_{ijlk}$). Desta forma o volume de demanda (i,j), representado por w_{ij}, é subtraído da capacidade do nó de coleta e do nó de distribuição. Além disso, para toda demanda distribuída pelo mesmo nó de coleta, o fluxo w_{ij} é descontado apenas da capacidade do nó responsável pela coleta do fluxo ($-y_{ijkk}$).

A caracterização do modelo matemático para o CMApHCP se dá a partir da descrição do UMApHCP, de forma que os nós *hubs* passam a possuir restrições de capacidade. Para construir o modelo matemático do CMApHCP com Capacidade Dupla, a Expressão(9) é incluída no modelo matemático do problema não capacitado (UMApHCP), de forma que o modelo completo para o problema é descrito por:

$$\min \quad s \tag{10}$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{k\in N} z_k = p \tag{11}$$

$$\sum_{k\in N}\sum_{l\in N} y_{ijkl}=1,\quad i,j\in N \tag{12}$$

$$\sum_{k\in N} y_{ijkl}\leq z_l,\quad i,j,l\in N \tag{13}$$

$$\sum_{l\in N} y_{ijkl}\leq z_k,\quad i,j,k\in N \tag{14}$$

$$\sum_{i\in N}\sum_{j\in N} w_{ij}\left[\sum_{l\in N}(y_{ijkl}+y_{ijlk})-y_{ijkk}\right]\leq cap_k,\quad k\in N \tag{15}$$

$$s\geq \sum_{k\in N}\sum_{l\in N}(\gamma c_{ik}+\alpha c_{kl}+\beta c_{lj})y_{ijkl},\quad i,j\in N \tag{16}$$

$$y_{ijkl}, z_k\in\{0,1\},\quad s\in\mathbb{R}_+,\quad i,j,k,l\in N \tag{17}$$

A Expressão (11) garante que o número de hubs selecionados seja exatamente igual a p *hubs*. A Expressão (12) garante que a demanda (i,j) seja atendida apenas por um arco (k,l). As Ex-

pressões (13) e (14) garantem que os nós não *hubs* sejam atribuídos apenas a nós *hubs* e a Expressão (16) determina que a variável s seja a de maior custo, dentre todas as demandas do grafo. A Expressão (15) é inserida para garantir as características de capacidade ao problema.

3.3. Problema CMApHCP com Capacidade Única

Em sistemas específicos, a capacidade pode estar atribuída apenas ao nó coleta do fluxo. Um exemplo típico dessa situação reside em sistemas postais, nos quais a capacidade pode estar majoritariamente atrelada à capacidade de triagem do nó de coleta. Esta capacidade pode representar as ações de triagem e transporte das correspondências ao nó de distribuição e, consequentemente, ao seus destinatários. Esta situação pode ser representada por:

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{l \in N} w_{ij} y_{ijkl} \leq cap_k, \quad k \in N \tag{18}$$

em que a capacidade está atribuída somente ao nó de coleta k. Deve-se observar que a capacidade do nó k é subtraída pela volume de tráfego w_{ij} coletada por ele.

Para construir o modelo completo do Problema CMApHCP com Capacidade Única, basta realizar a troca da Expressão (15) pela Expressão (18) no modelo apresentado pelas Expressões (10)-(17). Este artigo descreveu, até aqui, os problema p-*hub* Centro, caracterizando duas variantes de interesse e seus respectivos modelos matemáticos. A seguir, as validações dos modelos e testes computacionais são apresentados.

4. Experimentos Computacionais

Para a realização dos experimentos computacionais do p-HCP foi utilizado o grupo de instâncias AP (*Australian Post*), introduzido em Ernst e Krishnamoorthy [1996]. Este grupo de instâncias é baseado em dados reais do serviço postal australiano. O conjunto de instâncias AP contém problemas com até 200 nós; porém, este trabalho utiliza as instâncias com até 50 nós. Estas instâncias possuem dois conjuntos de restrições de capacidade, que são eles: (i) capacidade `L` - conjunto de restrições menos apertadas; (ii) capacidade `T` - conjunto de restrições mais apertadas.

Para validar os modelos matemáticos propostos para o Problema p-HCP, foram desenvolvidas modelagens de programação matemática para os analisar. A programação matemática foi desenvolvida em linguagem ILOG Concert Technology `C++`, usando-se o Solver CPLEX versão acadêmica 12.9 e o editor de texto `Gedit` - version 3.36.1. Os testes computacionais foram realizados em um computador *Intel(R) Xeon(R) Silver* 4110 CPU 2.10GHz, 16 núcleos, memória RAM de 32GB, sistema operacional *CentOS 6*, mantido pelo Laboratório de Computação de Alto Desempenho (LCAD) do CEFET-MG. O limite de tempo de execução de 7200 segundos foi definido para a execução de cada instância e os resultados computacionais obtidos são apresentados a seguir.

4.1. Resultados UMApHCP

Os testes computacionais executados com o modelo UMApHCP utilizam os seguintes fatores de desconto/penalidade no cálculo do custo de transporte: (i) γ = 1,0, α = 0,75 e β = 1,0, ou seja, os mesmos fatores utilizados em Brimberg et al. [2017a]; (ii) γ = 3,0, α = 0,75 e β = 2,0, fatores extraídos do próprio conjunto de instâncias AP. Desta forma, γ e β são fatores de penalidade no fluxo do nó de origem para o nó *hub* de coleta e do nó *hub* de distribuição para o nó de destino, respectivamente. Já α é fator de desconto do fluxo entre *hubs*.

As Tabelas 2(a) e 2(b) apresentam os resultados obtidos na execução dos testes da proposta UMApHCP utilizando as instâncias AP e são referenciadas com os valores de γ e β iguais a 1-1 e 3-2, respectivamente. A coluna "Solução" indica se foi encontrada uma solução e se esta solução é ótima ou não. A coluna "Valor" apresenta o valor da solução, caso seja encontrada. Já a coluna

Tabela 2: Resultados dos testes computacionais para UMApHCP

(a) Instâncias 1-1

Instância	Solução	Valor	*gap*(%)	Tempo(s)
AP10_2	Optimal	39922,11	0,00	30,30
AP10_3	Optimal	32713,94	0,00	38,93
AP10_4	Optimal	31577,96	0,00	33,68
AP10_5	Optimal	30371,32	0,00	36,20
AP20_2	Optimal	45954,15	0,00	21,21
AP20_3	Optimal	40909,59	0,00	22,14
AP20_4	Optimal	38320,25	0,00	31,81
AP20_5	Optimal	37868,15	0,00	24,47
AP20_10	Optimal	37868,15	0,00	18,01
AP25_2	Optimal	51533,30	0,00	84,31
AP25_3	Optimal	45552,50	0,00	70,14
AP25_4	Optimal	45552,50	0,00	80,87
AP25_5	Optimal	45552,50	0,00	84,41
AP25_10	Optimal	45552,50	0,00	65,43
AP40_2	Optimal	61140,80	0,00	1893,87
AP40_3	Optimal	56309,88	0,00	2501,43
AP40_4	Feasible	51279,14	0,00	7200,47
AP40_5	Optimal	49741,20	0,00	2694,46
AP40_10	Optimal	49741,20	0,00	1650,60
AP50_2	Feasible	58449,92	0,23	7128,14
AP50_3	Feasible	52896,09	0,19	7127,38
AP50_4	Feasible	50707,87	0,44	7131,81
AP50_5	Feasible	50707,87	0,52	7131,52
AP50_10	Feasible	50707,87	0,52	7132,40

(b) Instâncias 3-2

Instância	Solução	Valor	*gap*(%)	Tempo(s)
AP10_2	Optimal	99805.28	0.00	40.84
AP10_3	Optimal	70337.49	0.00	45.96
AP10_4	Optimal	68714.17	0.00	48.21
AP10_5	Optimal	55439.28	0.00	80.40
AP20_2	Optimal	110220.25	0.00	55.39
AP20_3	Optimal	92839.94	0.00	83.52
AP20_4	Optimal	80901.66	0.00	133.03
AP20_5	Optimal	74162.48	0.00	134.00
AP20_10	Optimal	47794.95	0.00	163.64
AP25_2	Optimal	117182.56	0.00	265.67
AP25_3	Optimal	102737.89	0.00	227.09
AP25_4	Optimal	88159.77	0.00	402.16
AP25_5	Optimal	78173.77	0.00	458.65
AP25_10	Optimal	53964.09	0.00	652.37
AP40_2	Feasible	128083.20	0.16	7188.55
AP40_3	Feasible	98279.19	0.27	7206.51
AP40_4	Feasible	82726.64	0.60	7189.93
AP40_5	Feasible	79435.96	0.64	7187.84
AP40_10	Feasible	54412.07	0.74	7185.15
AP50_2	-	-	-	-
AP50_3	-	-	-	-
AP50_4	-	-	-	-
AP50_5	-	-	-	-
AP50_10	-	-	-	-

gap(%) mostra o *gap* relativo entre os melhores limitantes primal e dual. Por fim, a coluna "Tempo" apresenta o tempo computacional obtido.

Analisando estas tabelas, é possível observar que : (i) no grupo de instâncias com γ e β utilizando os valores 1-1, apenas a instância AP40_4T e as instâncias com 50 nós não apresentaram soluções ótimas; (ii) observa-se que a instância AP40_4T apresenta o *gap*(%) 0,00, porém não é provada sua otimalidade; isso ocorre devido ao fato do valor do *gap*(%) ter sido arredondado; (iii) no grupo de instâncias com γ e β utilizando os valores 3-2, 5 instâncias não encontraram solução ótima. Além disso, em todas as instâncias com 50 nós, não encontrou-se nenhuma solução factível; (iv) algumas instâncias, apenas com resultados factíveis, apresentam tempo de processamento pouco menores ou pouco maiores que o tempo limite de 7200(s). Este tempo computacional representa o instante exato em que o CPLEX parou sua execução.

4.2. Resultados CMApHCP Capacidade Dupla

Os testes computacionais executados com o modelo CMApHCP de capacidade dupla usam os fatores de desconto/penalidade adotados no cálculo do custo de transporte: γ = 3,0; α = 0,75; e β = 2,0. Desta forma, γ e β são os fatores de penalidade no fluxo do nó de origem para o nó *hub* de coleta e do nó *hub* de distribuição para o nó de destino, respectivamente, enquanto α é o fator de desconto do fluxo entre *hubs*. Os resultados obtidos são apresentados nas Tabelas 3(a) e 3(b).

As Tabelas 3(a) e 3(b) apresentam os resultados obtidos na execução dos testes da proposta CMApHCP com dupla capacidade, utilizando as instâncias AP com restrições de capacidade L e T, respectivamente. A coluna "Solução" indica se foi encontrada uma solução e se esta solução é ótima ou não. A coluna "Valor" apresenta o valor da solução, caso ela seja encontrada. A coluna *gap*(%) mostra o *gap* relativo entre os melhores limitantes primal e dual. Por fim, a coluna "Tempo" apresenta o tempo computacional obtido. Analisando as tabelas é possível observar que: (i) nos resulta-

Tabela 3: Resultados dos testes computacionais para CMApHCP com Capacidade Dupla

(a) Instâncias L

Instância	Solução	Valor	Gap(%)	Tempo(s)
AP10_2	Optimal	99805,28	0	41,03
AP10_3	Optimal	70337,49	0	35,26
AP10_4	Optimal	68714,17	0	47,83
AP10_5	Optimal	55439,28	0	54,17
AP20_2	Optimal	110220,25	0	194,71
AP20_3	Optimal	92839,94	0	485,74
AP20_4	Optimal	82439,73	0	573,87
AP20_5	Optimal	74162,48	0	366,64
AP20_10	Optimal	47794,95	0	158,83
AP25_2	Optimal	118497,02	0	3739,42
AP25_3	Optimal	102737,89	0	1296,31
AP25_4	Optimal	89747,25	0	2391,88
AP25_5	Optimal	82234,52	0	3116,21
AP25_10	Optimal	53964,09	0	1121,43
AP40_2	Feasible	117685,42	0,54	7166,63
AP40_3	-	-	-	-
AP40_4	Feasible	81679,74	0,71	7175,25
AP40_5	Feasible	76660,71	0,69	7173,59
AP40_10	Feasible	53731,60	0,80	7193,82
AP50_2	-	-	-	-
AP50_3	-	-	-	-
AP50_4	-	-	-	-
AP50_5	Feasible	74019,30	0,67	7307,48
AP50_10	Feasible	54078,20	0,84	7145,97

(b) Instâncias T

Instância	Solução	Valor	Gap(%)	Tempo(s)
AP10_2	Optimal	115233,10	0	4,86
AP10_3	Optimal	78517,15	0	3,31
AP10_4	Optimal	70337,49	0	3,69
AP10_5	Optimal	59730,78	0	5,09
AP20_2	Optimal	129086,95	0	1413,59
AP20_3	Optimal	99412,48	0	1165,57
AP20_4	Optimal	84492,95	0	1776,33
AP20_5	Optimal	75759,94	0	1839,89
AP20_10	Optimal	47794,95	0	503,91
AP25_2	-	-	-	-
AP25_3	Optimal	117182,56	0	5092,78
AP25_4	Optimal	104375,53	0	5609,71
AP25_5	Optimal	82672,45	0	5720,07
AP25_10	Optimal	54960,00	0	5603,72
AP40_2	-	-	-	-
AP40_3	-	-	-	-
AP40_4	Feasible	81674,48	0,63	7172,06
AP40_5	Feasible	72765,30	0,61	7165,80
AP40_10	Feasible	51487,88	0,82	7174,88
AP50_2	-	-	-	-
AP50_3	-	-	-	-
AP50_4	-	-	-	-
AP50_5	-	-	-	-
AP50_10	Feasible	54078,20	0,80	7154,36

dos do grupo L, as instâncias AP40_3T, AP50_2T, AP50_3T e AP50_4T não alcançaram nenhuma solução factível, enquanto que as instâncias AP40_2T, AP40_4T, AP40_5T, AP40_10T, AP50_5T e AP50_10T encontraram ao menos uma solução factível e as demais instâncias apresentaram resultados ótimos; (ii) nos resultados do grupo T, as instâncias AP25_2T, AP40_2T, AP40_3T, AP50_2T, AP50_3T, AP50_4T e AP50_5T não apresentaram nenhuma solução factível, enquanto que as instâncias AP40_4T,AP40_5T, AP40_10T e AP50_10T apresentam soluções factíveis e o restante das instâncias apresentaram resultados ótimos; (iii) algumas instâncias, apenas com resultados factíveis, apresentam tempo de processamento pouco menores ou pouco maiores que o tempo limite de 7200(s), este tempo computacional representa o instantes exato em que o CPLEX parou sua execução.

4.3. Resultados CMApHCP Capacidade Única

Testes computacionais também foram executados com o modelo de CMApHCP de capacidade única. Os valores de desconto/penalidade são os mesmos utilizados na Seção 4.2, sendo $\gamma = 3;0$; $\alpha = 0{,}75$; e $\beta = 2{,}0$.

As Tabelas 4(a) e 3(b) apresentam os resultados encontrados na execução dos testes da proposta CMApHCP com capacidade única, utilizando as instâncias AP com restrições de capacidade L e T, respectivamente. A coluna "Solução" indica se foi encontrada uma solução e se esta é ótima ou não. A coluna "Valor" apresenta o valor da solução. Já a coluna GAP(%) mostra o gap relativo entre os melhores limitantes primal e dual. Por fim, a coluna "Tempo" apresenta o tempo computacional obtido. A partir das tabelas é possível observar que: (i) nos resultados do grupo L, não foi obtido soluções ótimas na instâncias com 40 e 50 nós, sendo que, apenas na instância AP50_2T não foi encontrado nenhuma solução factível; (ii) nos resultados do grupo T, as instâncias AP25_2T, AP40_2T AP40_3T, AP40_4T, AP50_2T, AP50_3T e AP50_4T não apresentaram nenhuma solução factível, as instâncias AP25_4T, AP25_5T, AP40_5T, AP40_10T,

Tabela 4: Resultados dos testes computacionais para CMApHCP com Capacidade Única

(a) Instâncias L

Instância	Solução	Valor	*gap*(%)	Tempo(s)
AP10_2	Optimal	99805,28	0	38,70
AP10_3	Optimal	70337,49	0	37,55
AP10_4	Optimal	68714,17	0	54,71
AP10_5	Optimal	55439,28	0	61,18
AP20_2	Optimal	110220,25	0	108,62
AP20_3	Optimal	92839,94	0	177,70
AP20_4	Optimal	80901,66	0	294,70
AP20_5	Optimal	74162,48	0	143,24
AP20_10	Optimal	47794,95	0	268,19
AP25_2	Optimal	117182,56	0	1460,14
AP25_3	Optimal	102737,89	0	546,28
AP25_4	Optimal	89747,25	0	1313,98
AP25_5	Optimal	78173,77	0	911,01
AP25_10	Optimal	53964,09	0	1297,88
AP40_2	Feasible	117685,42	0,54	7179,39
AP40_3	Feasible	94694,81	0,56	7176,13
AP40_4	Feasible	82434,24	0,67	7173,71
AP40_5	Feasible	72768,26	0,70	7173,26
AP40_10	Feasible	54036,97	0,78	7169,83
AP50_2	-	-	-	-
AP50_3	Feasible	95698,52	0,65	7082,42
AP50_4	Feasible	82415,45	0,69	7123,18
AP50_5	Feasible	74020,16	0,70	7126,53
AP50_10	Feasible	54078,20	0,84	7118,15

(b) Instâncias T

Instância	Solução	Valor	*gap*(%)	Tempo(s)
AP10_2	Optimal	106375,56	0	14,94
AP10_3	Optimal	78517,15	0	12,97
AP10_4	Optimal	68714,17	0	4,92
AP10_5	Optimal	55439,28	0	3,97
AP20_2	Optimal	129086,95	0	1786,39
AP20_3	Optimal	99412,48	0	1417,30
AP20_4	Optimal	84492,95	0	1847,00
AP20_5	Optimal	75759,94	0	1631,30
AP20_10	Optimal	47794,95	0	548,92
AP25_2	-	-	-	-
AP25_3	Optimal	117182,56	0	5563,85
AP25_4	Feasible	71454,06	0,38	7198,70
AP25_5	Feasible	61997,08	0,31	7206,90
AP25_10	Optimal	54757,94	0	3327,53
AP40_2	-	-	-	-
AP40_3	-	-	-	-
AP40_4	-	-	-	-
AP40_5	Feasible	72765,30	0,55	7128,07
AP40_10	Feasible	52816,03	0,81	7137,68
AP50_2	-	-	-	-
AP50_3	-	-	-	-
AP50_4	-	-	-	-
AP50_5	Feasible	74019,30	0,72	7132,38
AP50_10	Feasible	54078,20	0,80	7139,90

`AP50_5T` e `AP50_10T` apresentaram soluções factíveis e o restante das instâncias apresentaram resultados ótimos; (iii) algumas instâncias, apenas com resultados factíveis, apresentam tempo de processamento pouco menores ou pouco maiores que o tempo limite de 7200(s), este tempo computacional representa o instantes exato em que o CPLEX parou sua execução.

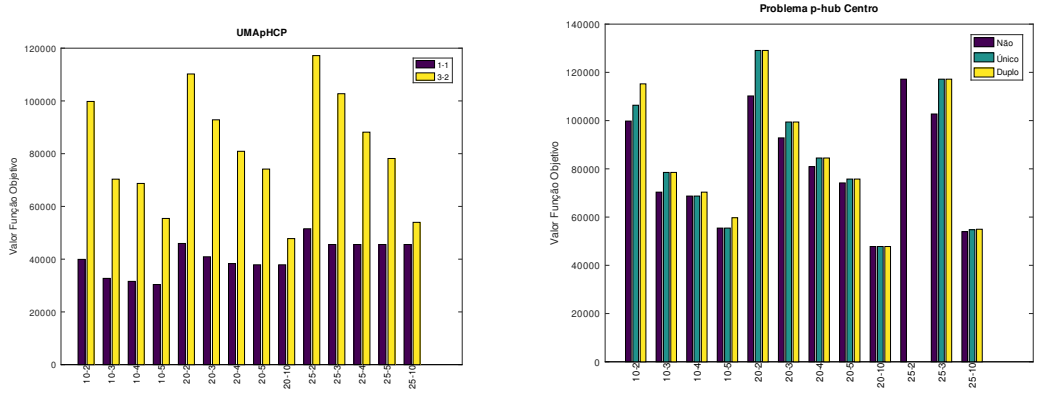
4.4. Considerações dos Modelos

Algumas particularidades dos modelos apresentados neste artigo devem ser destacadas: (i) no modelo não capacitado, a inclusão de fatores de penalidade de coleta e de entrega torna o modelo mais difícil de se solucionar; (ii) os modelos com restrições de capacidade são mais complexos de se solucionar, assim como o modelo de capacidade dupla é mais complexo do que o de capacidade única; (iii) seguindo o mesmo raciocínio, o conjunto de instâncias `T` é mais difícil de solucionar.

A Figura 2(a) apresenta o comportamento do valor das soluções obtidas com o modelo não capacitado utilizando fatores de desconto/penalidade 1-1 e 3-2. Deve-se observar que o modelo com fatores nulos (1-1) apresenta valores melhores, em relação à função objetivo, aos que apresentam fatores de penalidade (3-2). Já a Figura 2(b) compara os resultados obtidos nos 3 modelos. Observa-se que apresentam comportamentos similares em relação ao valor da função objetivo. Porém, o problema não capacitado sempre apresenta valor de função objetivo menor ou igual aos modelos capacitados. Observa-se também que, à medida que se aumenta o número de *hubs*, o valor da função objetivo melhora.

5. Considerações Finais e Direções Futuras

Este artigo apresentou modelos matemáticos para variantes do Problema p - *hub* Centro: (i) variante que não apresenta restrições de capacidade, denominada UMApHCP; (ii) duas variantes do CMApHCP, que apresentam formas de capacidade diferentes, sendo elas capacidade dupla



(a) Não Capacitado 1-1 × 3-2

(b) Não Capacitado × Única × Dupla

Figura 2: Considerações dos Modelos pHCP.

(coleta e distribuição) e capacidade única (somente coleta). Estes modelos foram solucionados de forma exata utilizando o Solver CPLEX. Os experimentos computacionais utilizaram um grupo de instâncias baseado em dados reais do serviço postal australiano (AP). Os resultados obtidos foram capazes de validar os modelos matemáticos e comprovar sua complexidade de resolução. Entretanto, resolver o problema de forma exata tem alto custo computacional. Do mesmo modo, observa-se que encontrar soluções ótimas, em tempo hábil, para instâncias acima de 25 nós não é uma tarefa trivial. Observa-se também as diferenças entre os modelos apresentados, em relação às soluções obtidas e ao tempo de execução. Os modelos com restrições de capacidades se mostram mais difíceis de serem solucionados.Como trabalhos futuros, propõe-se desenvolver novos métodos para a solução exata e implementar métodos metaheurísticos para a solução de instâncias de maior dimensão do problema.

Referências

Alumur, S. e Kara, B. Y. (2008). Network hub location problems: The state of the art. *European Journal of Operational Research*, 190(1):1 – 21.

Bashiri, M., Mirzaei, M., e Randall, M. (2013). Modeling fuzzy capacitated p-hub center problem and a genetic algorithm solution. *Applied Mathematical Modelling*, 37(5):3513 – 3525.

Brimberg, J., Mladenović, N., Todosijević, R., e Urošević, D. (2017a). A basic variable neighborhood search heuristic for the uncapacitated multiple allocation p-hub center problem. *Optimization Letters*, 11(2):313–327.

Brimberg, J., Mladenović, N., Todosijević, R., e Urošević, D. (2017b). General variable neighborhood search for the uncapacitated single allocation p-hub center problem. *Optimization Letters*, 11(2):377–388.

Calik, H., Alumur, S. A., Kara, B. Y., e Karasan, O. E. (2009). A tabu-search based heuristic for the hub covering problem over incomplete hub networks. *Computers & Operations Research*, 36 (12):3088 – 3096.

Campbell, A. M., Lowe, T. J., e Zhang, L. (2007). The p-hub center allocation problem. *European Journal of Operational Research*, 176(2):819–835.

Campbell, J. F. (1994). Integer programming formulations of discrete hub location problems. *European Journal of Operational Research*, 72(2):387 – 405.

Ernst, A. T., Hamacher, H., Jiang, H., Krishnamoorthy, M., e Woeginger, G. (2009). Uncapacitated single and multiple allocation p-hub center problems. *Computers & Operations Research*, 36(7): 2230 – 2241.

Ernst, A. T. e Krishnamoorthy, M. (1996). Efficient algorithms for the uncapacitated single allocation p-hub median problem. *Location Science*, 4(3):139 – 154.

Farahani, R. Z., Hekmatfar, M., Arabani, A. B., e Nikbakhsh, E. (2013). Hub location problems: A review of models, classification, solution techniques, and applications. *Computers & Industrial Engineering*, 64(4):1096 – 1109.

Gavriliouk, E. O. (2009). Aggregation in hub location problems. *Computers & Operations Research*, 36(12):3136 – 3142.

Kara, B. Y. e Tansel, B. C. (2000). On the single-assignment p-hub center problem. *European Journal of Operational Research*, 125(3):648 – 655.

Meyer, T., Ernst, A., e Krishnamoorthy, M. (2009). A 2-phase algorithm for solving the single allocation p-hub center problem. *Computers & Operations Research*, 36(12):3143 – 3151. New developments on hub location.

Silva, J. F., Silva, M. A. L., de Souza, S. R., e Souza, M. J. F. (2019a). Arquitetura híbrida multiagente aplicada ao problema phub centro não capacitado de múltiplas alocações. In *Anais do LI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, p. 108276. SBPO.

Silva, M. A. L., de Souza, S. R., Souza, M. J. F., e Bazzan, A. L. C. (2019b). A reinforcement learning-based multi-agent framework applied for solving routing and scheduling problems. *Expert Systems with Applications*, 131:148 – 171.

Sim, T., Lowe, T. J., e Thomas, B. W. (2009). The stochastic p-hub center problem with service-level constraints. *Computers & Operations Research*, 36(12):3166 – 3177. New developments on hub location.

Yaman, H. e Elloumi, S. (2012). Star p-hub center problem and star p-hub median problem with bounded path lengths. *Computers & Operations Research*, 39(11):2725 – 2732.

Zabihi, A. e Gharakhani, M. (2018). A literature survey of hub location problems and methods with emphasis on the marine transportations. *Uncertain Supply Chain Management*, 6(1):91–116.

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings