UM MÉTODO UNIVERSAL PARA SELEÇÃO DE CARTEIRAS DE AÇÕES E CRIPTOMOEDAS

Edison Américo Huarsaya Tito, Luiz Eduardo Teixeira Brandão, Leonardo Lima Gomes
IAG Escola de Negócios, NUPEI, Departamento de Administração, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio)
Rua Marquês de São Vicente, 225 – Gávea, Rio de Janeiro, CEP 22451-045
edison.tito@iag.puc-rio.br, brandao@iag.puc-rio.br, leonardolima@iag.puc-rio.br

Javier Gutiérrez Castro
Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas, Centro Tecnológico – Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Campus Universitário Trindade
Rua Delfino Conti s/n Florianópolis, Caixa Postal 476 – CEP 88040-900
jgutierrezcastro@gmail.com

RESUMO

A metodologia tradicional para seleção de carteiras é o modelo de média-variância de Markowitz, que exige que os retornos dos ativos sejam normalmente distribuídos. No entanto, para o caso de carteiras com ativos que possuam retornos não gaussianos, como criptomoedas, o risco dessas carteiras é subestimado, resultando em alocações não ótimas. Para corrigir esta distorção, propomos o uso da medida de desempenho universal Ômega proposta por Keating e Shadwick, que considera todos os momentos da distribuição dos retornos, o que permite a inclusão de ativos de qualquer natureza e características na carteira. Demonstramos analiticamente que a medida Ômega é uma generalização da medida de desempenho de Sharpe para ativos com distribuições de retornos de qualquer tipo. Isso indica que a medida Ômega é de aplicação universal e que o índice de Sharpe é apenas um caso particular da medida Ômega para carteiras de ativos com retornos gaussianos.

PALAVRAS CHAVE. Medida Ômega (Ω), Criptomoedas, Análise de Portfólio

Área Principal: GF - Gestão Financeira, MP - Modelos probabilísticos

ABSTRACT

The model of choice for portfolio selection is the Markowitz mean-variance model, which assumes that asset returns are normally distributed. However, for portfolios that include assets that have non-Gaussian returns, such as cryptocurrencies, the risk of these portfolios tend to be underestimated, resulting in non-optimal allocations. In order to correct this distortion, we propose the use of the universal performance measure Omega proposed by Keating and Shadwick, which considers all moments of the distribution of the returns, which allows the inclusion of assets of any nature and characteristics in the portfolio. We demonstrate analytically that the Omega measure is a generalization of the Sharpe performance measure for assets with any type of returns. This indicates that the Omega measure is universally applicable and that the Sharpe index is a particular case of the Omega measure for portfolios of assets with Gaussian returns.

KEYWORDS. Omega Measure (Ω), Cryptocurrency, Portfolio Analysis.

Main Area: GF - Financial Management, MP - Probabilistic Models

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings

1. Introdução

O modelo de seleção de portfólio de [Markowitz 1952] requer, como premissa fundamental do modelo, que os retornos sobre os ativos sejam normalmente distribuídos. As criptomoedas, que nos últimos anos começaram a ser utilizadas como ativos de investimento, não atendem a essa premissa por apresentarem retornos não gaussianos. Como resultado, a metodologia de Markowitz subestima o risco de carteiras formadas por ações e criptomoedas.

Para resolver este problema, propomos um método geral para seleção de portfólio baseado na medida de desempenho Omega de [Keating e Shadwick 2002]. Também fornecemos uma contribuição original ao provar analiticamente que a medida Omega é uma generalização do índice de desempenho de Sharpe, e com esse resultado, um método geral de seleção de portfólio é obtido, cobrindo o caso de ativos com retornos gaussianos e não gaussianos.

Para ilustrar o uso dessa nova abordagem, analisamos quatro carteiras de investimento distintas: Uma carteira que consiste em cinco ações do mercado norte-americano tradicional e três outras carteiras com adição respectivamente de uma, duas e três criptomoedas a esta primeira carteira. Foram selecionadas ações de cinco empresas líderes em seus setores na economia americana, a saber: Apple (AAPL), Pfizer (PFE), JPMorgan Chase (JPM), Verizon (VZ) e Coca-Cola (KO), todas pertencentes à Dow Índice de Jones. Foram selecionadas as três criptomoedas mais representativas, Bitcoin (BTC), Ethereum (ETH) e Ripple (XRP), por possuírem o maior valor de mercado e representarem quase 80% da capitalização do mercado de criptomoedas. Os resultados obtidos indicam que a metodologia baseada na medida Omega é mais realista do que a metodologia tradicional de Markowitz na captura do maior risco da carteira, permitindo aos investidores tomar melhores decisões de alocação de ativos.

Este artigo está organizado da seguinte forma. Após essa introdução é apresentada uma revisão da literatura de criptoativos e análise de carteiras e na seção três desenvolvemos a metodologia proposta nesse trabalho. Na seção quatro é apresentada uma aplicação numérica do modelo e em seguida são expostas as conclusões.

2. Revisão da Literatura

O surgimento das criptomoedas, também conhecidos como criptoativos, é relativamente recente. [Nakamoto 2008] foi o primeiro a desenvolver com sucesso uma moeda totalmente digital que chamou de Bitcoin, cujo objetivo era servir como meio de pagamento entre pessoas sem a necessidade de outros intermediários. Como resultado dessa popularização, tem havido um grande interesse por parte de investidores privados e públicos em comprar criptoativos para fins de investimento, incluindo o financiamento de novos projetos de criptomoeda por meio de uma oferta inicial de moedas (ICO) [Fisch et al. 2019] devido ao potencial de inovação e valorização. Além de serem um meio de pagamento, estão sendo desenvolvidos outras aplicações, como os contratos inteligentes na rede Ethereum [Ethereum 2020].

A literatura apresenta poucas referências bibliográficas dos efeitos da inclusão de criptomoedas a carteiras tradicionais formadas por ações. [Andrianto e Diputra 2017] avaliam distintos portfólios formados por um conjunto de moedas da Forex com commodities, Exchange Traded Funds (ETFs) e ações do mercado americano, aos quais são incorporadas as criptomoedas Bitcoin, Ripple e Litecoin. Usando a teoria da média-variância de [Markowitz 1952] concluem que a introdução de criptomoedas nas carteiras tradicionais melhora o índice de Sharpe e que a porcentagem destas deveria ficar entre 5% e 20%. [Wong et al. 2018] também incluíram o Bitcoin, Ripple e Litecoin em diversas carteiras formadas pelo índice S&P500, títulos do governo (bonds) e ouro. Os autores observaram que o Bitcoin atua melhor como hegde na carteira de S&P500 devido a sua correlação negativa com este, entanto que o Litecoin seria um melhor hedge nas carteiras de títulos e ouro. Já no caso do Ripple, este apresenta pequenas correlações positivas com os outros ativos, servindo mais com um investimento de diversificação do que como hedge da carteira. Em relação à performance, o índice de Sharpe melhora quando os criptoativos estão presentes nas carteiras de bonds e ouro, mas não na carteira com o S&P500. Por sua vez, [Lee et

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings

al 2018] incluíram o índice de criptomoedas (CRIX) em um portfólio de ativos tradicionais formado pelo índice S&P500, Private Equity, Fundos de investimento imobiliário (REITs) e ouro, e observaram uma considerável expansão da fronteira eficiente se comparado ao portfólio formado somente por ativos tradicionais, sendo que o índice S&P500 e CRIX dominaram a carteira.

[Castro et al. 2020] analisaram carteiras formadas pelo S&P500, NASDAQ Composite, Ethereum, Ripple e Bitcoin, estando este último presente em todas as análises de carteiras formadas por dois ativos. Os autores concluíram que nas carteiras do Bitcoin com S&P500 e NASDAQ, deve-se investir uma maior proporção nos respectivos índices, apesar de o Bitcoin apresentar um expressivo retorno. No entanto, quando são avaliadas carteiras de pares de criptoativos, não se observa uma clara preferência por algum ativo em especial. Por outro lado, utilizam a medida de performance Ômega para otimizar as carteiras, que a diferença de Markowitz, leva em consideração todos os momentos da distribuição de retornos, e não só a média e a variância. Por outro lado, [Matkovskyy et al. 2019] analisam um portfólio composto pelas 10 ações que tiveram o pior retorno nos índices S&P600, S&P400 e S&P100, e incluíram nele as 10 criptomoedas com maior capitalização de mercado. Para tanto, usaram as abordagens de Maximização da Utilidade Esperada e Utilidade Probabilística, e concluem que a inclusão de criptomoedas em um portfólio de ações com o pior retorno nos três índices mencionados contribui para melhorar o retorno da carteira. Uma visão de investidor institucional na prática é apresentada por [Białkowski 2020] que examina a aplicação de regras de stop-loss pré-estabelecidas por investidores institucionais, a um portfólio formado pelas 10 criptomoedas de maior valor de mercado. O autor mostra que dessa maneira o retorno e a volatilidade das criptomoedas se reduzem aproximadamente à metade, mas que nos intervalos de períodos avaliados, em nenhum caso as criptomoedas conseguem permanecer na carteira até o final do período. Assim, se enfatiza a necessidade de criar regras de stop-loss específicas para criptoativos de forma a aumentar a sua taxa de sobrevivência nas carteiras.

Por sua vez, [Symitsia e Chalvatzis 2019] analisam carteiras formadas por moedas, ouro, petróleo, e índices de imóveis, bonds e ações, às quais o Bitcoin é inserido formando assim diversos tipos de carteiras. Na maior parte dos casos estas carteiras apresentam altos índices de Sharpe, e que mesmo em proporções pequenas de Bitcoin observa-se uma melhora na performance. Em uma abordagem de precificação de ativos, [Gregoriou 2019] avalia dez carteiras formadas por todas as ações da bolsa de Londres (LSE) mais um criptoativo (um distinto em cada carteira). Em todas essas carteiras ele calcula os retornos empregando os modelos de precificação de ativos mais conhecidos, como o CAPM e o modelo de Fama-French. O autor conclui que ao incluir um criptoativo no universo de ações da LSE, se evidencia um impacto positivo nos retornos das ações. Dessa forma, se o investidor obtém retornos anormais nas ações investindo em criptomoedas, isso explica a especulação e ineficiência do mercado de criptomoedas. Por sua parte, [Krueckeberg e Scholz 2018] analisam carteiras formadas por índices de bolsas, ações, moedas, bonds, commodities, imóveis, e as 10 principais criptomoedas, e observam que quase não existe correlação de preços entre as criptomoedas e os outros ativos tradicionais. Por outro lado, notaram que as criptomoedas possuem uma alta correlação entre si, motivo pelo qual melhoram a performance das carteiras tradicionais embora aumentem também o nível de risco.

3. Metodologia

Considere um mercado financeiro formado por um ativo de renda fixa, denotado por r_f e "n" ativos de renda variável, denotados por $\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$. O ativo de renda fixa tem como característica, oferecer uma rentabilidade constante e livre de risco. Por sua vez, os ativos de renda variável têm como característica, oferecer rentabilidades potencialmente superiores ao ativo de renda fixa, mas que correm o risco de sofrer variações devido às incertezas do mercado. Por hipótese da maximização do retorno do investimento, a preferência do investidor será por carteiras formadas apenas por ativos de renda variável. Neste contexto, o problema do investidor consiste em definir as frações de investimento, denotados por $\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$, que serão alocados em cada uno de estes ativos. Por restrição orçamentária do investidor temos que $\sum_i w_i = 1$, com $i \in$

$\{1,2,\cdots,n\}$. Opcionalmente, o investidor pode acrescentar a restrição $w_i \geq 0$, para evitar operações de vendas a descoberto. [Markowitz 1952] modela os retornos dos ativos de renda variável como variáveis aleatórias com distribuição Normal, ou seja, $r_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, com $i \in \{1,2,\cdots,n\}$. O retorno da carteira *P* formada por estes "*n*" ativos, denotado por $r_p = \sum_i w_i r_i$, também será outra variável aleatória com distribuição Normal, ou seja, $r_p \sim N(\mu_p, \sigma_p^2)$, uma vez que a multiplicação de uma constante (w_i) por uma distribuição Normal e a soma de variáveis aleatórias com distribuições Normais resultam em outra distribuição Normal. Sob uma perspectiva geométrica, no plano $(\mu \times \sigma)$, tem-se um conjunto infinito de pontos. Cada ponto (μ, σ) representa uma possível carteira de investimento. Segundo Markowitz, existe um subconjunto de pontos que representam carteiras ótimas em termos de risco-retorno, que se posicionam ao longo de uma curva conhecida como fronteira eficiente. Para selecionar uma carteira em particular posicionada na fronteira eficiente, é necessário mensurar seu desempenho em termos de risco-retorno [Sharpe 1994]. Este índice pode ser descrito conforme a equação (1):

$$S_p = \frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p} \tag{1}$$

Maximizando o índice de Sharpe, encontra-se a carteira com o melhor desempenho risco-retorno (μ_p^*, σ_p^*) entre as infinitas carteiras posicionadas na fronteira eficiente. Em termos geométricos esta carteira (μ_p^*, σ_p^*) representa um ponto de tangência, entre a fronteira eficiente e uma linha que passa pelo ponto $(r_f, 0)$. A maximização pode ser determinada pela equação (2):

$$\max_{\mu_p}\{S_p\} = \frac{\partial}{\partial \mu_p}\left(\frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p}\right) = 0 \tag{2}$$

Esta maximização deve ser realizada levando-se em conta a restrição orçamentária do investidor, ou seja, $\sum_i w_i = 1$, com $i \in \{1,2,\cdots,n\}$. Opcionalmente, pode-se acrescentar a restrição $(w_i \geq 0)$ para evitar operações de vendas a descoberto. Caso se considere a restrição $(w_i \geq 0)$, a equação anterior não terá uma solução analítica fechada e a solução terá que ser calculada numericamente através de um algoritmo de otimização.

A medida Ômega, por sua vez, é uma medida de performance proposta por [Keating e Shadwick 2002]. A principal característica da medida Ômega é que ela considera todos os momentos da distribuição de retornos e não somente a média e variância, como ocorre com o índice de Sharpe. Por esta razão a medida Ômega é uma medida de desempenho universal que pode ser aplicada a qualquer carteira, independentemente da premissa adotada na modelagem dos retornos dos ativos. A medida Ômega pode ser descrita pela equação (3):

$$\Omega(L) = \frac{\int_L^b [1 - F(r_p)]dx}{\int_a^L F(r_p)dx} \tag{3}$$

Onde, $\Omega(L)$ é a medida Ômega de desempenho da carteira, L é o retorno mínimo requerido da carteira (parâmetro definido pelo investidor), $F(r_p)$ é a função de distribuição acumulada dos retornos r_p da carteira e (a, b) é o domínio dos retornos r_p da carteira, no caso mais geral, $a = -\infty$ e $b = \infty$.

[Kazemi et al 2004] desenvolveram uma formula alternativa da medida de desempenho Ômega, expressa pela equação (4):

$$\Omega(L) = \frac{E[max(r_p - L; 0)]}{E[max(L - r_p; 0)]} \tag{4}$$

Onde, $E[\,\cdot\,]$ é o operador de valor esperado e $max(\,\cdot\,)$ é o operador máximo. Na equação (4), o numerador é o valor esperado do excesso de ganho $(r_p - L)$ condicional a resultados positivos, ou seja, é o ganho esperado da carteira. E o denominador é o valor esperado da perda $(L - r_p)$ condicional a resultados negativos, isto é, a perda esperada. Portanto, funciona como uma medida de desempenho, ao relacionar um retorno ou ganho esperado, com o seu respectivo risco ou perda esperada. As equações (3) e (4) são equivalentes, e podem ser aplicadas a qualquer carteira com retornos de qualquer natureza probabilística. Entretanto, para o caso especifico de carteiras com

retornos gaussianos, obtém-se, a medida Ômega expressa pela equação (5). Uma demonstração detalhada desta derivação é apresentada no Anexo 1.

$$\Omega(L) = \frac{\varphi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\Phi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)}{\varphi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\left[\Phi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) - 1\right]} \tag{5}$$

Onde, $\varphi(\cdot)$: é a função de densidade $N(0,1)$, $\Phi(\cdot)$: é a função de distribuição $N(0,1)$. A equação (5) permite avaliar o desempenho de qualquer carteira localizada no plano $(\mu \times \sigma)$, entretanto, para encontrar a carteira ótima em termos de risco-retorno, é preciso maximizar $\Omega(L)$ em função de μ_p, conforme equação (6):

$$\max_{\mu_p}\{\Omega(L)\} = \frac{\partial}{\partial \mu_p}\left(\frac{\varphi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\Phi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)}{\varphi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\left[\Phi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) - 1\right]}\right) = 0 \tag{6}$$

A equação (6) pode ser simplificada para a expressão apresentada na equação (7). O Anexo 2 apresenta os detalhes desta simplificação:

$$\max_{\mu_p}\{\Omega(L)\} = \frac{\partial}{\partial \mu_p}\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) = 0 \tag{7}$$

Por compatibilidade com a metodologia tradicional, o parâmetro do retorno mínimo da carteira L da medida Ômega, deve ser igual ao retorno do ativo livre de risco r_f, ou seja, $L = r_f$, logo, a equação (7) pode ser reescrita como a equação (8):

$$\max_{\mu_p}\{\Omega(L)\} = \frac{\partial}{\partial \mu_p}\left(\frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p}\right) = 0 \tag{8}$$

A expressão da equação (8) é idêntica a expressão da equação (2), ou seja:

$$\max_{\mu_p}\{\Omega(L)\} = \max_{\mu_p}\{S_p\} \tag{9}$$

Conclui-se, portanto, que no caso de retornos gaussianos e $L = r_f$, a carteira ótima (μ_p^*, σ_p^*) selecionada pela medida de desempenho Ômega é a mesma carteira selecionada pelo índice de Sharpe. Demonstra-se assim, que o índice de Sharpe é um caso particular da medida Ômega. Com base neste resultado teórico, podemos incorporar à carteira ativos com retornos não gaussianos utilizando como indicador de performance da carteira a medida Ômega.

4. Aplicação Numérica

Para representar ativos da economia tradicional, cinco ações de empresas líderes em seus respectivos setores foram selecionadas do índice Dow Jones: Apple (AAPL), Pfizer (PFE), JPMorgan Chase (JPM), Verizon (VZ) e Coca-Cola (KO). Para representar as criptomoedas, foram selecionadas as três de maior valor de mercado: Bitcoin (BTC), Ethereum (ETH) e Ripple (XRP). Os preços das ações foram extraídos do site https://finance.yahoo.com [Yahoo Finance, 2020], e das criptomoedas do site https://coinmarketcap.com [Coinmarketcap, 2020]. O período de análise compreende o intervalo entre 01/09/2015 ao 31/12/2019.

Nós adotamos o uso do *Condicional Value at Risk* (CVaR), também conhecido como *Expected Shortfall*, como a medida de risco de uma carteira, por ser uma medida de risco coerente [Acerbi e Tasche, 2002] com propriedades como alocação, subaditividade, monotonicidade e homogeneidade positiva de grau 1, conforme estipulado em [Artzner et al. 1999]. Essas propriedades nem sempre são satisfeitas por medidas de risco mais tradicionais, como o desvio padrão e o valor em risco (VaR). Assim, o CVaR pode ser considerado uma medida mais confiável para ativos com retornos não gaussianos, visto que também captura efeitos de ordem superior em distribuições probabilísticas [Sun et al. 2013] e fornece aos investidores uma avaliação mais precisa de sua exposição ao risco. As Tabelas 1 e 2 mostram, respectivamente, as principais estatísticas dos retornos mensais e a matriz de correlações dos retornos mensais, obtidas no período sob análise.

Tabela 1. Principais estatísticas dos retornos mensais

	APPL	PFE	JPM	VZ	KO	BTC	ETH	XRP
Média	1,48%	0,56%	1,30%	0,45%	0,75%	6,61%	8,74%	6,06%
Desvio-padrão	7,83%	4,57%	5,67%	4,90%	3,26%	21,75%	41,88%	50,39%
Valor Mínimo	-20,43%	-11,35%	-14,08%	-13,22%	-9,25%	-45,28%	-76,97%	-68,45%
Valor Máximo	13,38%	10,53%	14,31%	9,32%	6,71%	52,81%	114,97%	221,78%
Assimetria	-0,9681	0,0266	-0,0931	-0,3880	-0,7251	0,0292	0,6382	2,4012
Curtose	3,74	3,07	3,07	2,97	3,89	2,99	3,30	10,29
Jarque-Bera Test	9,30	0,02	0,09	1,31	6,29	0,01	3,73	165,05

Tabela 2. Matriz de correlações dos retornos mensais

	APPL	PFE	JPM	VZ	KO	BTC	ETH	XRP
APPL	100%	0,76%	30,01%	3,67%	5,93%	14,96%	10,57%	-2,14%
PFE	0,76%	100%	35,86%	26,48%	-4,71%	9,03%	-4,82%	-5,87%
JPM	30,01%	35,86%	100%	2,17%	6,14%	4,11%	-22,13%	-23,24%
VZ	3,67%	26,48%	2,17%	100%	37,46%	-0,48%	4,94%	-1,10%
KO	5,93%	-4,71%	6,14%	37,46%	100%	5,82%	8,76%	4,32%
BTC	14,96%	9,03%	4,11%	-0,48%	5,82%	100%	45,43%	48,31%
ETH	10,57%	-4,82%	-22,13%	4,94%	8,76%	45,43%	100%	61,82%
XRP	-2,14%	-5,87%	-23,24%	-1,10%	4,32%	48,31%	61,82%	100%

Em função das estatísticas apresentadas na Tabela 1, pode-se observar que os valores de média, desvio padrão, valores mínimos e máximos, são muito mais expressivos nas criptomoedas do que nas ações tradicionais. De acordo com o teste de normalidade de Jarque-Bera [Jarque e Bera 1980] – em que quanto mais próximo de zero indicaria maior aproximação a uma distribuição Normal – aprecia-se que no período da análise, algumas ações e criptomoedas claramente não apresentam distribuições de retornos Normais, com maior ênfase no Ripple (XRP). Outro fato a destacar em relação às criptomoedas, mostrado na Tabela 2, é a existência de uma alta correlação positiva entre elas, o que não se observa entre as ações.

A Tabela 3 mostra a formação das carteiras. A carteira inicial é composta exclusivamente por cinco ações (C5), e logo são formadas carteiras adicionando uma, duas e três criptomoedas.

Tabela 3. Formação das carteiras para análise

	APPL	PFE	JPM	VZ	KO	BTC	ETH	XRP
Carteira C5	√	√	√	√	√			
Carteira C6	√	√	√	√	√	√		
Carteira C7	√	√	√	√	√	√	√	
Carteira C8	√	√	√	√	√	√	√	√

A análise consiste na comparação da otimização das carteiras usando a metodologia tradicional de Markowitz e a metodologia de Ômega. Obtém-se, assim, a alocação ótima de capital $\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$, o retorno esperado μ_p, o desvio padrão σ_p, e a medida de risco *Conditional Value at Risk* (CVaR) para cada carteira Cj, em que j ∈ {5,6,7,8} indica o número de ativos que a compõem. Em relação à metodologia tradicional de Markowitz será utilizado um algoritmo de otimização que tem como função objetivo a maximização do índice de Sharpe expresso pela equação (1). Os dados necessários das distribuições dos retornos, ou seja, a média, a variância e a matriz de correlações serão extraídas das Tabela 1 e 2. Em relação à metodologia Ômega, também será utilizado um algoritmo de otimização que tem como função objetivo a maximização da medida Ômega expressa pela equação (4). Nesse caso, a diferença da metodologia tradicional que emprega apenas os dois primeiros momentos da distribuição, a metodologia Ômega emprega todos os momentos das distribuições empíricas obtidas a partir das series históricas dos retornos. Note-se

que estas distribuições empíricas podem seguir qualquer natureza probabilística. Para ambas as metodologias foi definido $L = r_f = 0{,}21\%$ ao mês, o qual, é uma proxy da taxa mensal de retorno de um papel do tesouro americano. A seguir, nas Tabelas 4 e 5, apresentam-se os resultados obtidos da alocação de ativos (pesos) por ambas as metodologias.

Tabela 4. Alocação de ativos realizadas pela metodologia tradicional de Markowitz

	APPL	PFE	JPM	VZ	KO	BTC	ETH	XRP
Carteira C5	15.36%	8.17%	26.03%	0.00%	50.45%			
Carteira C6	9,61%	1,21%	29,19%	0,00%	46,34%	13,66%		
Carteira C7	7,20%	0,65%	35,97%	0,00%	42,26%	10,47%	3,45%	
Carteira C8	7,20%	0,65%	35,97%	0,00%	42,26%	10,47%	3,45%	0,00%

Tabela 5. Alocação de ativos realizada pela metodologia Ômega

	APPL	PFE	JPM	VZ	KO	BTC	ETH	XRP
Carteira C5	14.83%	12.59%	19.09%	0.50%	52.98%			
Carteira C6	13,41%	6,34%	28,98%	0,00%	40,86%	10,40%		
Carteira C7	12,83%	8,17%	28,53%	0,00%	37,11%	11,62%	1,74%	
Carteira C8	12,83%	8,17%	28,53%	0,00%	37,11%	11,62%	1,74%	0,00%

Interessante observar que ambas as metodologias, coincidem em desconsiderar em todas a carteiras a ação da Verizon (VZ), e a inclusão da criptomoeda Ripple (XRP) na carteira C8 não modifica a composição da carteira C7, sendo também desconsiderada. Por sua vez, nas carteiras C6 e C7 (que incluem uma e duas criptomoedas) o Bitcoin e o Ethereum não dominam a carteira participando no máximo em 14% no total.

Uma vez definidas as alocações dos ativos nas carteiras, calculam-se as estatísticas de risco-retorno de ambas as metodologias. As Tabelas 6 e 7 mostram tais resultados.

Tabela 6. Estatísticas de risco-retorno das carteiras obtidas por Markowitz e Ômega

Markowitz	μ_p	σ_p	CVaR	**Ômega**	μ_p	σ_p	CVaR_h
Carteira C5	0.99%	2.90%	4.97%	Carteira C5	0.94%	2.73%	6.44%
Carteira C6	1,78%	4,16%	6,76%	Carteira C6	1,60%	3,75%	7,99%
Carteira C7	1,89%	4,26%	6,86%	Carteira C7	1,80%	4,12%	9,15%
Carteira C8	1,89%	4,26%	6,86%	Carteira C8	1,80%	4,12%	9,15%

Tabela 7. Diferenças do risco-retorno entre as carteiras obtidas por Markowitz e Ômega

Markowitz	$\Delta\mu_p$	$\Delta\sigma_p$	ΔCVaR	**Ômega**	$\Delta\mu_p$	$\Delta\sigma_p$	ΔCVaR_h
(C5 – C5)	-	-	-	(C5 – C5)	-	-	-
(C6 – C5)	0,79%	1,26%	1,79%	(C6 – C5)	0,66%	1,02%	1,55%
(C7 – C6)	0,11%	0,10%	0,10%	(C7 – C6)	0,20%	0,37%	1,16%
(C8 – C7)	-	-	-	(C8 – C7)	-	-	-

Pela Tabela 6, nota-se que a média μ_p foi maior em todas as carteiras usando a metodologia de Markowitz, mas o desvio padrão σ_p foi menor empregando Ômega. A melhor forma de avaliar o risco-retorno é usando as medidas de desempenho, que no final desta seção serão calculadas. Sobre o CVaR, este foi computado com um nível de significância de $\alpha = 5\%$, assumindo normalidade na distribuição de retornos das carteiras na metodologia de Markowitz, mas na metodologia Ômega foram usados os dados de retornos das distribuições empíricas das carteiras, ou seja, levou-se em consideração o real formato da distribuição de r_p, sendo nesse caso um CVaR histórico (CVaR_h), e em todas as carteiras esta medida de risco resultou sempre maior usando a metodologia de Ômega. Portanto, ao assumir normalidade, o CVaR da metodologia de Markowitz subestima o real risco (empírico) das carteiras formadas por ações e criptomoedas.

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings

Na Tabela 7 se apresentam as diferenças que se obtêm nas medidas de risco-retorno à medida que se incorporam criptomoedas nas carteiras. Tanto a média, como o desvio-padrão e o CVaR apresentam um significativo incremento ao passar da carteira C5 (só de ações) à carteira C6 (incluindo o Bitcoin), mas tal incremento é bem menor ao incluir a segunda criptomoeda Ethereum (Carteira C7), e como o Ripple não foi selecionado, a Carteira C8 é igual à C7. Na Figura 1 se compara graficamente os CVaR calculados pelas metodologias de Markowitz e Ômega, e na Figura 2 se mostram as diferenças que experimenta esta medida de risco entre as carteiras (Tabela 7).

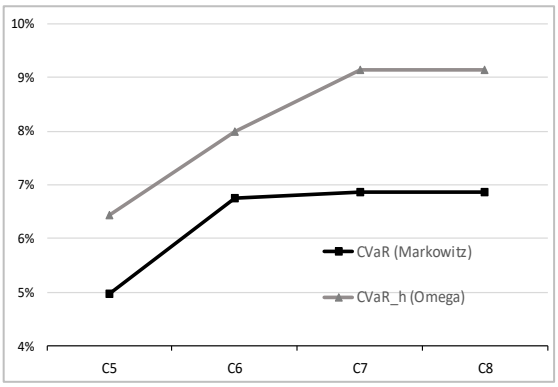


Figura 1. CVaR (α = 5%) das carteiras obtidas pela metodologia de Markowitz e Ômega

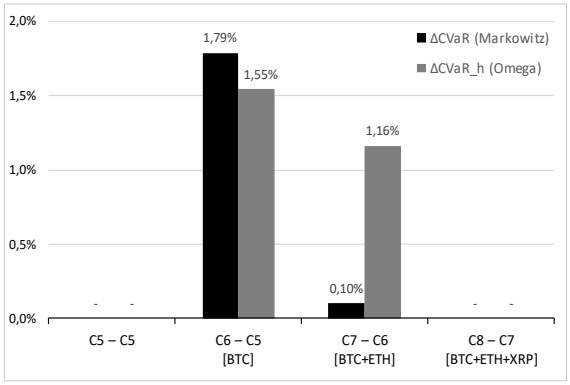


Figura 2. Diferenças no CVaR ao incluir o BTC, ETH e XRP nas carteiras

Em relação ao retorno, na Figura 3 se ilustram os resultados alcançados por ambas as metodologias e as diferenças entre as carteiras, dados provenientes das Tabelas 6 e 7.

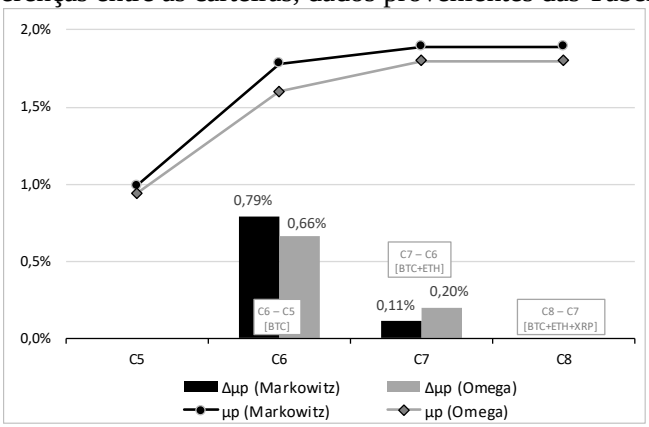


Figura 3. Retorno médio das carteiras e as suas diferenças por ambas as metodologias

Na Figura 3 pode-se apreciar o importante impacto que se produz no retorno médio ao se acrescentar uma criptomoeda (Bitcoin), o mesmo que é menor ao se acrescentar uma segunda criptomoeda (Ethereum), e a não relevância da inclusão do Ripple.

Finalmente, são calculadas as medidas de desempenho para as carteiras obtidas com ambas as metodologias. Na tabela 8 são apresentados os resultados dos índices de Sharpe (S_p) e medida Ômega, $\Omega(L)$, calculados usando as equações (1) e (4) respectivamente ($L = r_f = 0{,}21\%$ a.m.).

Tabela 8. Medidas de desempenho das carteiras obtidas por Markowitz e Ômega

Markowitz	S_p	$\Omega(L)$	**Ômega**	S_p	$\Omega(L)$
Carteira C5	0.2686	2.1334	Carteira C5	0.2662	2.1759
Carteira C6	0,3769	2,6708	Carteira C6	0,3717	2,7325
Carteira C7	0,3935	2,7826	Carteira C7	0,3869	2,8599
Carteira C8	0,3935	2,7826	Carteira C8	0,3869	2,8599

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings

Utilizar a medida de performance Ômega é mais apropriada e realista, por levar em consideração todos os momentos da distribuição de retornos, sendo uma medida de desempenho mais genérica e que pode ser aplicada em qualquer tipo de distribuição, uma medida de performance universal com proposta pelos seus criadores [Keating e Shadwick 2002]. Sob essa ótica, como observado nos resultados do índice $\Omega(L)$ da Tabela 8, obteremos um melhor desempenho das carteiras ao empregar esta metodologia.

5. Conclusões

O modelo proposto substitui o índice de Sharpe pela medida de desempenho Ômega. A vantagem de utilizar a medida Ômega é que independe da natureza probabilística dos retornos da carteira, uma vez que calcula o desempenho da carteira considerando todos os momentos da distribuição de retornos, o que a torna uma medida de desempenho universal.

Entre os resultados obtidos, foi mostrado que em carteiras de ações e criptomoedas, a metodologia tradicional de Markowitz subestima o risco, ou seja, o investidor corre um risco maior do que o indicado pela metodologia de Markowitz, medido em termos de CVaR. Este resultado ocorre em função da premissa de retornos gaussianos exigida por esta metodologia, que comumente não é observado tanto nas ações como nas criptomoedas. Por sua vez, devido ao fato das criptomoedas apresentarem uma altíssima volatilidade no seu histórico de preços, obtém-se retornos médios esperados e volatilidades significativamente superior aos das ações tradicionais. Assim, quando se incorpora a uma carteira de cinco ações, a principal criptomoeda (Bitcoin), todos os indicadores de risco-retorno tiverem incrementos importantes, inclusive as medidas de desempenho. Inserir mais uma criptomoeda não teve já um grande impacto, visto que, a pesar dos altos retornos históricos das criptomoedas, ambas as metodologias testadas não alocam mais do que 14% em criptomoedas nas carteiras, devido ao alto risco que também estas possuem e por serem altamente correlacionadas. Os resultados sugerem, portanto, que o investidor pode considerar incluir na carteira de ações uma ou duas criptomoedas no máximo.

Por outro lado, demonstrou-se analiticamente que o índice de Sharpe é um caso particular da medida Ômega em condições de retornos gaussianos, ou seja, nestas condições, ambas as metodologias indicam a mesma carteira ótima. Com essa verificação analítica, a extensão da metodologia tradicional para uma metodologia geral de análise de carteiras pode ser feito substituindo-se a medida de desempenho de Sharpe pela medida Ômega.

Para carteiras formadas por ações e criptomoedas, os resultados numéricos indicam que as carteiras obtidas pela metodologia de Ômega capturam um risco maior, o que representa uma abordagem mais realista do que as carteiras obtidas pela metodologia tradicional de Markowitz, em que é assumida a Normalidade nas distribuições de retornos.

Referências

Acerbi, C., & Tasche, D. (2002). On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking and Finance*, *26*(7), 1487–1503. https://doi.org/10.1016/S0378-4266(02)00283-2

Andrianto, Y., & Diputra, Y. (2017). The Effect of Cryptocurrency on Investment Portfolio Effectiveness. *Journal of Finance and Accounting*, *5*(6), 229. https://doi.org/10.11648/j.jfa.20170506.14

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M., & Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, *9*(3), 203–228. https://doi.org/10.1111/1467-9965.00068

Białkowski, J. (2020). Cryptocurrencies in institutional investors' portfolios: Evidence from industry stop-loss rules. *Economics Letters*, *191*. https://doi.org/10.1016/j.econlet.2019.108834

Castro, J. G., Tito, E. A. H., Brandão, L. E. T., & Gomes, L. L. (2020). Crypto-assets portfolio optimization under the omega measure. *Engineering Economist*, *65*(2), 114–134. https://doi.org/10.1080/0013791X.2019.1668098

CoinMarketCap. (2020). CoinMarketCap. In *coinmarketcap.com*.

Ethereum. (2020). *Blockchain APP platform*. https://www.ethereum.org

Fisch, C., Masiak, C., Vismara, S., & Block, J. (2019). Motives and profiles of ICO investors. *Journal of Business Research*. https://doi.org/10.1016/j.jbusres.2019.07.036

Gregoriou, A. (2019). Cryptocurrencies and asset pricing. *Applied Economics Letters*, *26*(12), 995–998. https://doi.org/10.1080/13504851.2018.1527439

Jarque, C. M., & Bera, A. K. (1980). Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals. *Economics Letters*, *6*(3), 255–259. https://doi.org/10.1016/0165-1765(80)90024-5

Kazemi, H., Schneeweis, T., & Gupta, B. (2004). Omega as a performance measure. *Journal of performance measurement*, *8*(3), 16-25.

Keating, C., & Shadwick, W. (2002). An Introduction to Omega. In *the finance development center limited*.

Krueckeberg, S., & Scholz, P. (2018). Cryptocurrencies as an Asset Class? In *SSRN Electronic Journal*. https://doi.org/10.2139/ssrn.3162800

Lee, D. K. C., Guo, L., & Wang, Y. (2018). Cryptocurrency: A new investment opportunity? *Journal of Alternative Investments*, *20*(3), 16–40. https://doi.org/10.3905/jai.2018.20.3.016

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, *7*(1), 77. https://doi.org/10.2307/2975974

Matkovskyy, R., Jalan, A., Dowling, M., & Bouraoui, T. (2019). From bottom ten to top ten: The role of cryptocurrencies in enhancing portfolio return of poorly performing stocks. *Finance Research Letters*. https://doi.org/10.1016/j.frl.2019.101405

Nakamoto, S. (2008). Bitcoin: A Peer-to-Peer Electronic Cash System | Satoshi Nakamoto Institute. In *2008-10-31*.

Sharpe, W. F. (1994). The Sharpe Ratio. *The Journal of Portfolio Management*. https://doi.org/10.3905/jpm.1994.409501

Sun, Q., Dong, Y., & Xu, W. (2013). Effects of higher order moments on the newsvendor problem. *International Journal of Production Economics*, *146*(1), 167–177. https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2013.06.019

Symitsi, E., & Chalvatzis, K. J. (2019). The economic value of Bitcoin: A portfolio analysis of currencies, gold, oil and stocks. *Research in International Business and Finance*, *48*, 97–110. https://doi.org/10.1016/j.ribaf.2018.12.001

Wong, W. S., Saerbeck, D., & Delgado Silva, D. (2018). Cryptocurrency: A New Investment Opportunity? An Investigation of the Hedging Capability of Cryptocurrencies and Their Influence on Stock, Bond and Gold Portfolios. In *SSRN Electronic Journal*. https://doi.org/10.2139/ssrn.3125737

Yahoo Finance. (2020). Retrieved 20 Feb 2020, from http://finance.yahoo.com/

ANEXO 1

Este anexo tem por objetivo mostrar o desenvolvimento da equação (5) a partir da equação (4). Seja $z \sim N(0,1)$ uma variável aleatória com distribuição Normal padrão. Seja $\varphi(z)$ e $\Phi(z)$ a função de densidade e a função de distribuição de z, logo:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \tag{10}$$

$$\Phi(\mathrm{z}) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(z)dz \tag{11}$$

Suponha $r_p \sim N(\mu_p, \sigma_p)$. A medida Ômega, para um retorno mínimo L, é expresso por

$$\Omega(L) = \frac{I_1(L)}{I_2(L)} = \frac{E\left[max\left(r_p - L; 0\right)\right]}{E\left[max\left(L - r_p; 0\right)\right]} \tag{12}$$

Normalização da variável aleatória r_p

$$z = \frac{r_p - \mu_p}{\sigma_p} \tag{13}$$

Desenvolvendo o numerador da equação (12)

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings

$$I_1(L) = E\left[max\left(r_p - L; 0\right)\right] = E\left[max\left(z\sigma_p + \mu_p - L; 0\right)\right]$$

$$I_1(L) = \int_{-\infty}^{\infty} max\left(z\sigma_p + \mu_p - L\right)\varphi(z)dz = \int_{\frac{L-\mu_p}{\sigma_p}}^{\infty}\left(z\sigma_p + \mu_p - L\right)\varphi(z)dz$$

$$I_1(L) = \sigma_p \int_{\frac{L-\mu_p}{\sigma_p}}^{\infty} z\varphi(z)dz + (\mu_p - L)\int_{\frac{L-\mu_p}{\sigma_p}}^{\infty}\varphi(z)dz$$

Utilizando a propriedade $\varphi'(z) = -z\varphi(z)$, temos

$$I_1(L) = -\sigma_p \int_{\frac{L-\mu_p}{\sigma_p}}^{\infty} \varphi'(z)dz + (\mu_p - L)\int_{\frac{L-\mu_p}{\sigma_p}}^{\infty}\varphi(z)dz$$

$$I_1(L) = -\sigma_p\left[\varphi(\infty) - \varphi\left(\frac{L-\mu_p}{\sigma_p}\right)\right] + (\mu_p - L)\left[\Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{L-\mu_p}{\sigma_p}\right)\right]$$

$$I_1(L) = \sigma_p\varphi\left(\frac{L-\mu_p}{\sigma_p}\right) + (\mu_p - L)\left[1 - \Phi\left(\frac{L-\mu_p}{\sigma_p}\right)\right]$$

Utilizando a propriedade $\varphi(-z) = \varphi(z)$ e $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$, temos

$$I_1(L) = \sigma_p\varphi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + (\mu_p - L)\Phi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) \quad (14)$$

Desenvolvendo, de forma análoga, o denominador da equação (12)

$$I_2(L) = E\left[max\left(L - r_p; 0\right)\right] = E\left[max\left(L - z\sigma_p - \mu_p; 0\right)\right]$$

$$I_2(L) = \int_{-\infty}^{\infty} max\left(L - z\sigma_p - \mu_p\right)\varphi(z)dz = \int_{-\infty}^{\frac{L-\mu_p}{\sigma_p}}\left(L - z\sigma_p - \mu_p\right)\varphi(z)dz$$

$$I_2(L) = -\sigma_p\int_{-\infty}^{\frac{L-\mu_p}{\sigma_p}} z\varphi(z)dz + \left(L - \mu_p\right)\int_{-\infty}^{\frac{L-\mu_p}{\sigma_p}}\varphi(z)dz$$

Utilizando a propriedade $\varphi'(z) = -z\varphi(z)$, temos

$$I_2(L) = \sigma_p\int_{-\infty}^{\frac{L-\mu_p}{\sigma_p}} \varphi'(z)dz + (L - \mu_p)\int_{-\infty}^{\frac{L-\mu_p}{\sigma_p}}\varphi(z)dz$$

$$I_2(L) = \sigma_p\left[\varphi\left(\frac{L-\mu_p}{\sigma_p}\right) - \varphi(-\infty)\right] + (L - \mu_p)\left[\Phi\left(\frac{L-\mu_p}{\sigma_p}\right) - \Phi(-\infty)\right]$$

$$I_2(L) = \sigma_p\varphi\left(\frac{L-\mu_p}{\sigma_p}\right) + (L - \mu_p)\Phi\left(\frac{L-\mu_p}{\sigma_p}\right)$$

Utilizando a propriedade $\varphi(-z) = \varphi(z)$ e $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$, temos

$$I_2(L) = \sigma_p\varphi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + (\mu_p - L)\left[\Phi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) - 1\right] \quad (15)$$

Substituindo a equação (14) e (15) em (12), tem-se

$$\Omega(L) = \frac{I_1(L)}{I_2(L)} = \frac{\sigma_p\varphi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + (\mu_p - L)\Phi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)}{\sigma_p\varphi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + (\mu_p - L)\left[\Phi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) - 1\right]} \quad (16)$$

Dividindo numerador e denominador por σ_p, tem-se

$$\Omega(L) = \frac{I_1(L)}{I_2(L)} = \frac{\varphi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\Phi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)}{\varphi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\left[\Phi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) - 1\right]} \quad (17)$$

ANEXO 2

Este anexo tem por objetivo mostrar a simplificação da equação (7) a partir da equação (6). Seja o seguinte câmbio de variável:

$$x = \varphi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\Phi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) \quad (18)$$

Substituindo a equação (18) na equação (6)

$$\max_{\mu_p}\{\Omega(L)\} = \frac{\partial}{\partial \mu_p}\left(\frac{x}{x - \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)}\right) = 0 \tag{19}$$

A fim de simplificar a notação, a derivada parcial $\partial(\cdot)/\partial\mu_p$ será substituído pela notação com apostrofo $(\cdot)'$. Note-se que a equação anterior é a derivada de um cociente, ou seja $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$. Entretanto, como a equação (19) é uma igualdade a zero, o termo do denominador pode ser eliminado da derivada ficando apenas $(u/v)' = (u'v - uv')$. Logo:

$$\max_{\mu_p}\{\Omega(L)\} = x'\left[x - \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\right] - x\left[x - \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\right]' = 0$$

$$\max_{\mu_p}\{\Omega(L)\} = x'\left[x - \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\right] - x\left[x' - \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)'\right] = 0$$

$$\max_{\mu_p}\{\Omega(L)\} = x'x - x'\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) - xx' + x\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)' = 0$$

Simplificando termos na equação anterior, tem-se

$$\max_{\mu_p}\{\Omega(L)\} = -x'\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + x\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)' = 0 \tag{20}$$

Derivando a equação (18)

$$x' = \left[\varphi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\Phi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\right]'$$

$$x' = \left[\varphi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\right]' + \left[\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\Phi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\right]'$$

$$x' = \varphi'\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)' + \left[\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\Phi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\right]'$$

Utilizando a regra da derivada de um produto $(uv)' = u'v + uv'$, tem-se

$$x' = \varphi'\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)' + \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)'\Phi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\Phi'\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)'$$

Evidenciando o termo comum, tem-se

$$x' = \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)'\left[\varphi'\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + \Phi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\Phi'\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\right] \tag{21}$$

Seja o seguinte câmbio de variável:

$$y = \varphi'\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + \Phi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\Phi'\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) \tag{22}$$

Substituindo a equação (22) na equação (21)

$$x' = \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)' y \tag{23}$$

Substituindo a equação (23) na equação (20)

$$\max_{\mu_p}\{\Omega(L)\} = -\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)' y\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + x\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)' = 0 \tag{24}$$

Evidenciando o termo comum, tem-se

$$\max_{\mu_p}\{\Omega(L)\} = \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)'[x - y] = 0 \tag{25}$$

A equação anterior está formando por dois termos iguais a zero, isso significa que um ou ambos termos são iguais a zero, logo

$$\max_{\mu_p}\{\Omega(L)\} = \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)' = 0 \tag{26}$$

Revertendo a notação

$$\max_{\mu_p}\{\Omega(L)\} = \frac{\partial}{\partial \mu_p}\left(\frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p}\right) = 0 \tag{27}$$