LII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional
João Pessoa - PB, 3 a 5 de novembro de 2020

Prismas complementares de cografos: uma classe 4-admissível sem exemplares 3-admissíveis

Fernanda Couto
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
fernandavdc@ufrrj.br

Luís Cunha
Universidade Federal Fluminense
lfignacio@ic.uff.br

Ighor de Brito
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
ighorbruno20@gmail.com

RESUMO

O problema da t-admissibilidade consiste em, dado um grafo G, encontrar uma árvore geradora T de G, em que cada par de vértices adjacentes de G, esteja a uma distância menor ou igual a t em T. Neste caso, chamamos G de t-admissível. O menor t tal que G seja t-admissível é o índice de extensão de G. Um prisma complementar de um grafo G, denotado por $G\overline{G}$, é obtido pela união de G com seu complemento $\overline{G}$ e a adição de um emparelhamento perfeito entre os vértices correspondentes de G e $\overline{G}$. Um cografo é um grafo sem caminhos induzidos com 4 vértices. Um dos desafios da t-admissibilidade é determinar classes de grafos que sejam 3-admissíveis, visto que a complexidade computacional deste problema permanece em aberto há mais de 25 anos. Além disso, sabemos que reconhecer grafos 4-admissíveis é, em geral, um problema NP-completo. Neste trabalho, mostramos que todo prisma complementar de cografo é 4-admissível, caracterizamos os prismas complementares de cografos com índice de extensão 2 e, curiosamente, mostramos que não existem prismas complementares de cografos com índice de extensão igual a 3.

PALAVRAS CHAVE.

t-admissibilidade, prismas complementares, cografos

ABSTRACT

The t-admissibility problem is formulated as, given a graph G, the goal is to find a spanning tree T of G, such that each pair of adjacent vertices of G, is apart in T by a distance of at most t. In this case, G is called t-admissible, and the smallest t for which G is t-admissible is the stretch index of G. A complementary prism of G, denoted by $G\overline{G}$, is obtained by the union of G with its complement $\overline{G}$ and the addition of a perfect matching between correspondent vertices of G and $\overline{G}$. A cograph is a graph without induced paths with 4 vertices. One of the challenges of the t-admissibility problem is to determine 3-admissible graph classes, since the computational complexity of such a problem remains open for more than 25 years. Moreover, it is known that recognizing 4-admissible graphs is, in general, a NP-complete problem. In this work, we show that

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings

every complementary prism of cographs is 4-admissible, we also characterize complematary prisms of cographs with stretch index 2 and, curiously, we show that it does not exist a complementary prism of cographs with stretch index 3.

KEYWORDS.

t-admissibility, complementary prisms, cographs

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings

1. Introdução

O problema da t-admissibilidade consiste em, dado um grafo G, encontrar uma árvore geradora T de G, onde cada par de vértices adjacentes de G, em T estejam a uma distância menor ou igual a t (Cai e Corneil [1995]). Se a distância máxima entre os vértices adjacentes de G na árvore T for t, então G é chamado de *t-admissível*. Além disso, o parâmetro t da árvore T é chamado *fator de extensão de T* e é denotado por $\sigma(T)$, e o menor t para o qual G é t-admissível, é chamado de *índice de extensão de G*, denotado por $\sigma_T(G)$. Esse é um problema Min-Max, pois nosso objetivo é encontrar a menor-maior distância entre os vértices que são adjacentes em G.

Uma das aplicações do estudo da t-admissibilidade é em redes de internet e sistemas de comunicação, dado que esses estudos podem facilitar a comunicação entre roteadores ou substituir uma rede antiga, diminuindo assim, os custos (*cf.* Peleg e Ullman [1987]). Além dos estudos de aplicações da t-admissibilidade, outros trabalhos propõem variações do problema. Um deles é a recente proposta da t-aresta-admissibilidade, onde o objetivo está em minimizar distâncias das arestas do grafo (Couto et al. [2020]).

Em relação à complexidade computacional do problema da t-admissibilidade, temos que determinar se um grafo possui índice de extensão no máximo t é NP-difícil para $t \geq 4$, enquanto que para $t = 2$, o problema pode ser resolvido em tempo polinomial (Cai e Corneil [1995]). Para completar a dicotomia P *versus* NP-completo para a t-admissibilidade, resta saber avaliar a 3-admissibilidade, problema em aberto há mais de 25 anos. Por esse motivo, vários pesquisadores focam seus esforços em determinar classes de grafos 3-admissíveis (Cai e Corneil [1995]; Madanlal et al. [1996]; Brandstädt et al. [2004]; Panda e Das [2018]; Couto e Cunha [2018, 2020]).

Dada a dificuldade na determinação de índices de extensão, muitos estudos são baseados na determinação de limites inferiores ou superiores para o problema. Um dos parâmetros utilizados para limites inferiores é a cintura do grafo. A *cintura* de um grafo G, denotada por $g(G)$, corresponde ao tamanho do menor ciclo de G. Sendo assim, um limite inferior para o índice de extensão é $t \geq g(G) - 1$. Já o problema da *árvore geradora de diâmetro mínimo*, denotado por $D_T(G)$, configura-se como um limite superior natural para t. Assim, temos que $g(G) - 1 \leq \sigma_T(G) \leq D_T(G)$.

Embora haja classes cujos índices de extensão sejam iguais ao limite inferior do problema da t-admissibilidade, como grafos completos e ciclos, para muitas outras classes esse limite não é justo. Couto e Cunha [2018] analisaram o limite inferior dado pela cintura e apresentaram classes que, mesmo possuindo valor de cintura constante, têm índices de extensão em função do número de vértices n. São exemplos: *grafos potência de ciclo* 2, obtidos a partir um ciclo C_n e adicionando aresta entre vértices que estão à distância 2 em C_n; *grafos primas*, obtidos pela união de dois ciclos C_n adicionando um emparelhamento perfeito entre vértices correspondentes, ou de modo equivalente, esses são os grafos obtidos pelos grafos potência de ciclo 2 removendo um emparelhamento perfeito desse grafo.

Os grafos prismas complementares vêm sendo bastante estudados em diversos problemas e contextos, como determinação da hamiltonicidade, determinação do número de dominância, entre outros (Kazemi [2011]; Desormeaux e Haynes [2011]; Kaiser et al. [2007]). Apesar disso, até o momento não há um estudo sobre a t-admissibilidade dessa classe. Além disso, há poucos estudos da relação dos índices de extensão de uma classe e de sua classe complementar (veja Aouchiche e Hansen [2013] sobre as desigualdades de Nordhaus-Gaddum), o que parece dificultar o estudo dos prismas complementares a partir de classes já pesquisadas em termos da t-admissibilidade. A classe dos cografos mostra-se, portanto, uma boa opção para tal estudo, uma vez que é auto-complementar.

Neste artigo tratamos do problema da t-admissibilidade para prismas complementares

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings

de cografos. Na Seção 2, apresentamos conceitos importantes para o entendimento do texto. Na Seção 3, mostramos que prismas complementares de cografos são 4-admissíveis e, consequentemente, apresentamos mais uma classe de grafos para a qual o limite inferior dado pela cintura não é um limite inferior justo. Por fim, a Seção 4 apresenta um panorama das nossas contribuições, bem como trabalhos futuros.

2. Admissibilidade de cografos e grafos prismas complementares

A *distância entre dois vértices*, denotada por $d(x, y)$, é a quantidade de arestas do menor caminho entre x e y. O *diâmetro* de um grafo, denotado por $diam(G)$, é a maior distância entre qualquer par de vértices de G. O *grau de um vértice* u, denotado por $d(u)$, é a quantidade de arestas que incidem em u. O *grafo complementar* de um grafo G, denotado por $\overline{G}$, é um grafo com a mesma quantidade de vértices que G tais que dois vértices de $\overline{G}$ são adjacentes se, e somente se, seus vértices correspondentes não são adjacentes em G. Um *emparelhamento* de um grafo G é um conjunto de arestas de G tal que não há duas arestas neste conjunto com mesma extremidade. Se um emparelhamento de G possui todos seus vértices, dizemos então que este é um *emparelhamento perfeito* de G. Os cografos, também conhecidos como grafos que não possuem P_4, i.e. caminhos com 4 vértices, como subgrafos induzidos, são grafos que podem ser formados a partir do grafo trivial K_1 e finitas operações de *junção* e *união disjunta*. Essas operações são definidas a seguir. Dados dois grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$:

- *Junção*: $G_1 * G_2 = ((V_1 \cup V_2), (E_1 \cup E_2 \cup (V_1 \times V_2)))$;
- *União disjunta*: $G_1 \cup G_2 = ((V_1 \cup V_2), (E_1 \cup E_2))$;

Note que a operação de união disjunta cria um grafo desconexo, enquanto a operação de junção cria um grafo conexo. A operação de junção de dois grafos G_1 e G_2 também pode ser vista como a união disjunta de G_1 e G_2 seguida da adição de todas as arestas g_1g_2, onde $g_1 \in G_1$ e $g_2 \in G_2$.

Cografos também podem ser definidos de maneira recursiva utilizando as seguintes regras:

- Qualquer grafo trivial é um cografo;
- Se G é um cografo, então seu complemento, $\overline{G}$, também é um cografo;
- Se G e H são cografos, então a sua união disjunta é um cografo e sua junção é um cografo.

Duas características importantes de se ressaltar são: cografos diferentes de árvores possuem cintura, com tamanho $g(G) = 3$, e o diâmetro de cografos é no máximo 2.

Uma maneira de representar os cografos é através das co-árvores. A *co-árvore* é uma árvore que possui seus nós internos rotulados com 1 ou 0, representando a operação de junção e união disjunta, respectivamente. Nas folhas da árvore encontram-se os vértices do cografo G e, se o ancestral comum mais próximo de duas folhas estiver rotulado por 1 (resp., 0), então os vértices associados as folhas são vizinhos (resp., não são vizinhos) em G.

Para construir a co-árvore de um cografo é feito o seguinte procedimento:

1. Se G é um cografo conexo (resp., desconexo), a raiz da sua co-árvore será rotulada por 1 (resp., 0) e cada filho associará a uma componente conexa de $\overline{G}$ (resp., de G). Cada componente conexa de $\overline{G}$ (resp., de G) que possui mais de um vértice é associada a uma subárvore da raiz, sendo este nó rotulado por 0 (resp., 1);

2. Repetir o passo anterior até que todas as componentes conexas sejam grafos triviais.

Em relação ao problema da t-admissibilidade, sabemos que cografos são 3-admissíveis e seu índice de extensão é 2 somente quando o cografo possui um vértice universal. (Couto e Cunha [2018, 2019, 2020]).

Uma *estrela*, denotada por S_k, é, uma árvore com um nó interno (denotado por *centro* de S_k) e k folhas. Note que uma estrela tem diâmetro 2 e que todo grafo que possui uma estrela geradora é 2-admissível. Uma *bi-estrela* é o grafo obtido pela junção dos vértices centros de duas estrelas. Note que uma bi-estrela tem diâmetro 3 e que todo grafo que possui uma bi-estrela geradora é, 3-admissível.

Se o cografo G for 2-admissível, para criarmos uma árvore com fator de extensão 2, basta construirmos uma estrela geradora centrada em um dos vértices universais, considere u, e as folhas da estrela serão todos os vizinhos de u. Porém, se G for 3-admissível, constrói-se uma bi-estrela geradora com centros em v e u, denotada por T, da seguinte maneira:

- A partir da co-árvore de G, insira em T um vértice qualquer, v, da subárvore mais à esquerda da raiz (denote por T_1 esta subárvore da raiz) e insira também todos os vizinhos de v que estejam nas outras subárvores da raiz;

- Escolha um vértice u vizinho de v que já tenha sido inserido na árvore, e portanto, u pertence a alguma subárvore da raiz distinta de T_1. Adicione todos os vizinhos de u pertencentes a T_1 distintos de v.

A classe dos prismas complementares é abordada neste artigo no contexto do problema da t-admissibilidade. Esses grafos são definidos da seguinte maneira: Sejam um grafo $G = (V, E)$ e $\overline{G}$ o seu complemento, o *prisma complementar de* G, denotado por $G\overline{G}$, é o grafo formado pela união disjunta de G e $\overline{G}$ e a adição de arestas entre todos os vértices correspondentes de G e $\overline{G}$. Note que as arestas da forma u, u', tal que $u \in (G)$ e $u' \in \overline{G}$, formam um emparelhamento perfeito em $G\overline{G}$. Portanto, a fins de simplicidade, quando mencionarmos sobre o *emparelhamento em* $G\overline{G}$ estaremos nos referindo ao emparelhamento perfeito de $G\overline{G}$ obtido por arestas cujos extremos são vértices correspondentes de G e $\overline{G}$.

Estudaremos os *prismas complementares de cografos*, i.e., um prisma complementar onde G, e consequentemente $\overline{G}$, são cografos. A Figura 1 mostra um exemplo de prisma complementar de um cografo. É importante ressaltar que, mesmo sendo formado por dois cografos, o prisma complementar de um cografo não é cografo, como mostrado na Proposição 1.

Proposição 1. *Seja G um cografo não trivial, então o prisma complementar de G não é um cografo.*

Demonstração. Sejam u e v dois vértices que não são vizinhos em $G\overline{G}$. Tais vértices existem pois, como G é cografo, se G for conexo, então $\overline{G}$ é desconexo, e vice-versa. Sem perda de generalidade, suponha que u e v pertençam a G. Consequentemente, seus vértices correspondentes, u' e v', respectivamente, são vizinhos em $\overline{G}$. Observe que u, u', v', v é um P_4 induzido em $G\overline{G}$. Logo $G\overline{G}$ não é cografo. □

A seguir, estudamos o índice de extensão dos prismas complementares de cografos.

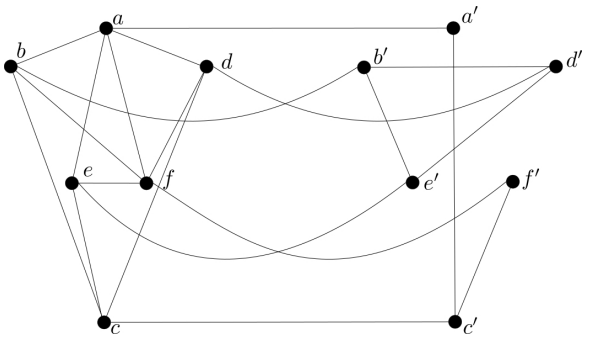


Figura 1: Cografo à esquerda com conjunto de vértices $\{a, b, \cdots, f\}$, e seu complemento à direita.

3. Prismas Complementares de Cografos são 4-admissíveis

Primeiramente, vamos mostrar que soluções arbitrárias de cografos 3-admissíveis nos conduzem a árvores geradoras de seus prismas complementares. Essas soluções garantem que prismas complementares de cografos são, no máximo 5-admissíveis, como mostrado no Proposição 2. Contudo, podemos obter árvores geradoras de cografos levando em consideração as componentes conexas do seu complemento de modo a obter árvores geradoras de prismas complementares com fator de extensão 4, garantindo, portanto, que prismas complementares de cografos são 4-admissíveis, como mostrado no Teorema 1. Finalizamos a seção mostrando que não existem prismas complementares de cografos com índice de extensão 3 e caracterizamos aqueles com índice 2.

Proposição 2. *Prismas complementares de cografos são* 5*-admissíveis.*

Demonstração. Seja $G = (V, E)$ um cografo conexo e $\overline{G} = (V', E')$ seu complemento. Como G é 3-admissível, considere uma bi-estrela geradora de G com centros em f e b. Considere, ainda, a e c folhas vizinhas de f e b, respectivamente, de modo que ac não seja uma aresta de G, e assim sendo, $a'c'$ é uma aresta de $\overline{G}$. Dessa forma, tome uma árvore geradora de $G\overline{G}$ considerando a bi-estrela geradora de G e adicionando todas as arestas do emparelhamento. Assim, temos que a' e c' são os vértices que estão a maior distância na bi-estrela associada a G e assim, $d_T(a', c') = 5$ pelo caminho a', a, f, b, c, c'. □

A Figura 2 mostra uma árvore geradora para uma solução 5-admissível do grafo da Figura 1.

Teorema 1. *Prismas complementares de cografos são* 4*-admissíveis.*

Demonstração. Suponha G conexo. Como G é cografo então $\overline{G}$ é desconexo. Sejam $C^1, C^2, \cdots, C^k$ as k componentes conexas de $\overline{G}$ tais que $u' \in C^1$ e $v' \in C^2$ e u e v são seus vértices correspondentes em G. Dessa forma, temos que, em G, v é adjacente a todos os vértices associados a C^i em G, para $i = 1, \cdots, k$ e $i \neq 2$. Façamos, assim, uma estrela em G com centro em v e folhas todos os vértices de G associados as componentes conexas C^i, para $i = 1, \cdots, k$ e $i \neq 2$, de $\overline{G}$. Da mesma forma, o vértice u é adjacente em G a todos os vértices associados a C^2. Tornemos u vizinho a todos esses vértices. Para finalizar a construção da árvore geradora T de $G\overline{G}$, adicionemos todas as arestas do emparelhamento. Note que em G obtivemos uma bi-estrela de centro em u e v. Com isso, a distância entre todo par de vértices em G é no máximo 3 na árvore. Como todas as arestas do emparelhamento pertencem a árvore, precisamos analisar a distância na árvore de dois vértices

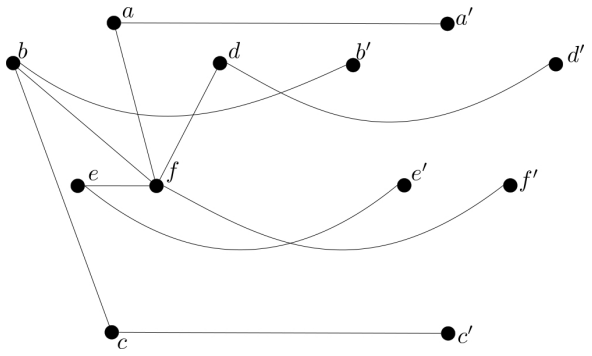


Figura 2: Árvore do prisma complementar de cografo 5-admissível. Note que $d_T(a', c') = 5$.

de uma mesma componente conexa de C^i. Se $x'y' \in C^1$, temos que $d_T(x', y') = 4$, pelo caminho x', x, v, y, y'. Caso contrário, $x'y' \in C^i$, para $i = 2, \cdots, k$, e temos que $d_T(x', y') = 4$, pelo caminho x', x, u, y, y'. □

A Figura 3 mostra uma árvore geradora para uma solução 4-admissível do grafo da Figura 1.

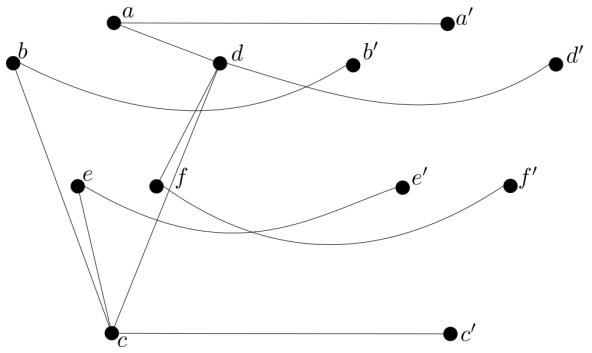


Figura 3: Árvore do prisma complementar de cografo 4-admissível.

Lema 1. *Seja $G\overline{G}$ um prisma complementar de cografo. Temos que $G\overline{G}$ é 2-admissível se, e somente se, G ou $\overline{G}$ é um grafo completo.*

Demonstração. Seja G um grafo completo. O índice de extensão de G é 2 pois ele possui n vértices universais, consequentemente, $\overline{G}$ será formado apenas por grafos triviais e terá nenhuma aresta. Logo, a única maneira de formar uma árvore de $G\overline{G}$ é usando todas as arestas de emparelhamento. Como arestas que incidem em vértices de grau 1 pertencem necessariamente a toda árvore geradora, e todos os vértices de $\overline{G}$ possuem grau 1, temos que $\sigma_T(G\overline{G}) = 2$.

□

Teorema 2. *Se G é um cografo não completo e $G\overline{G}$ seu prisma complementar, então $\sigma_T(G\overline{G}) \geq 4$.*

Demonstração. Iremos mostrar que prismas complementares de cografo distintos de completos não são 3-admissíveis. Como $G\overline{G}$ é formado por um cografo conexo $G = (V, E)$ e seu complemento $\overline{G}$, que também é cografo porém desconexo, então $diam(G) = 2$.

Primeiramente, exibimos um ciclo de tamanho 5 em $G\overline{G}$. Considere dois vértices u e v não adjacentes em G. Consequentemente, esses vértices são vizinhos em $\overline{G}$. Sabemos que $G\overline{G}$ tem uma aresta que conecta cada par de vértices correspondentes, em particular, existe uma aresta que conecta u, u', e outra que conecta v e v'. Com isso, temos o ciclo $C = u, u', v', v, w, u$, onde w é um vértice do caminho entre u e v em G, que tem tamanho 5. Além disso, note que C é o menor ciclo do grafo possuindo arestas do emparelhamento.

Como não podemos ter ciclos em nenhuma árvore geradora de $G\overline{G}$, analisemos as possíveis remoções de arestas deste ciclo C. Se removermos uma única aresta do emparelhamento, sem perda de generalidade uu', temos que em qualquer árvore geradora T de $G\overline{G}$, $d_T(u, u') = 4$, obtido pelo caminho u, w, v, v', u'. Da mesma forma, ao considerar a remoção de mais do que uma aresta de C, note que ao menos uma aresta do emparelhamento deve ser usada em T. Isto implica num caminho de tamanho pelo menos 4 em T entre vértices de algum emparelhamento de $G\overline{G}$ (tal como no caso anterior) ou, no caso de alguma aresta de $G[C]$ ou de $\overline{G}[C]$ não pertencer a T, as arestas do emparelhamento de $G\overline{G}$ são usadas, implicando assim, num caminho de tamanho pelo menos 4, caso contrário, haveria um ciclo com arestas do emparelhamento de tamanho menor que 5. Com isso, não é possível construir uma árvore de um prisma complementar de cografo que seja 3-admissível. □

Como consequência do Lema 1 e do Teorema 1 é interessante observar que os prismas complementares de cografo mesmo sendo 4-admissíveis, e podendo até mesmo ser 2-admissíveis, não existe prisma complementar de cografo 3-admissível.

Corolário 1. *Não existem prismas complementares de cografos com índice de extensão* 3.

Similarmente ao Corolário 1, no Corolário 2 estabelecemos o índice de extensão dos grafos prismas complementares de cografos.

Corolário 2. *Seja G um cografo conexo. Se G é um grafo completo então $\sigma(G\overline{G}) = 2$, caso contrário, $\sigma(G\overline{G}) = 4$.*

4. Conclusões

Neste trabalho, mostramos que prismas complementares de cografo, apesar de serem formados por 2 cografos, não são cografos, e que prismas complementares de cografo são 2-admissíveis se, e somente se, o cografo G é completo. Apresentamos um algoritmo que constrói árvores geradoras com fator de extensão 4 para qualquer prisma complementar de cografo dado, provando que eles são, portanto, 4-admissíveis. Curiosamente, mostramos que não existem prismas complementares de cografos 3-admissíveis, e que, portanto, prismas complementares de cografos não completos têm índice de extensão 4. Pretendemos, ainda, estudar *Prismas Complementares de Grafos Split*, pois, assim como cografos, os grafos split são auto-complementares. Muitos questionamentos acerca dos prismas complementares parecem interessantes, e pretendemos também estudá-los de maneira mais ampla, sem restrição de classe.

Referências

Aouchiche, M. e Hansen, P. (2013). A survey of nordhaus–gaddum type relations. *Discrete Applied Mathematics*, 161(4-5):466–546.

Brandstädt, A., Dragan, F. F., Le, H.-O., et al. (2004). Tree spanners on chordal graphs: complexity and algorithms. *Theor. Comput. Sci.*, 310(1-3):329–354.

Cai, L. e Corneil, D. G. (1995). Tree spanners. *SIAM J. Discrete Math.*, 8(3):359–387.

Couto, F. e Cunha, L. (2018). Tree t-spanners of a graph: Minimizing maximum distances efficiently. In *12th Annual International Conference on Combinatorial Optimization and Applications*, volume 11346, p. 46–61.

Couto, F. e Cunha, L. (2019). Hardness and efficiency on minimizing maximum distances for graphs with few P4's and (k, ℓ)-graphs. 346:355–367.

Couto, F. e Cunha, L. (2020). Hardness and efficiency on minimizing maximum distances in spanning trees. *Theoretical Computer Science (aceito)*.

Couto, F., Cunha, L., e Posner, D. (2020). Edge tree spanners. In *18th Cologne-Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization*, volume AIRO Springer series, p. 1–12.

Desormeaux, W. J. e Haynes, T. W. (2011). Restrained domination in complementary prisms. *Utilitas Mathematica*, 86:267–278.

Kaiser, T., Ryjáček, Z., Král, D., Rosenfeld, M., e Voss, H.-J. (2007). Hamilton cycles in prisms. *Journal of Graph Theory*, 56(4):249–269.

Kazemi, A. P. (2011). k-tupl total domination in complementary prisms. *ISRN Discrete Mathematics*, 2011.

Madanlal, M., Venkatesan, G., e Rangan, C. P. (1996). Tree 3-spanners on interval, permutation and regular bipartite graphs. *Information Processing Letters*, 59(2):97–102.

Panda, B. e Das, A. (2018). Characterization and recognition of tree 3-spanner admissible directed path graphs of diameter three. In *44th WG*, p. 369–381. Springer.

Peleg, D. e Ullman, J. (1987). An optimal synchronizer for the hypercube. In *Proceedings of the 6th ACM Symposium on Principles of Distributed Computing*, p. 77–85, Vancouver.