LII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional
João Pessoa - PB, 3 a 5 de novembro de 2020

O problema do Roteamento de Veículos Capacitado com Janelas de Tempo e Clientes Estocásticos

Deyvison Nogueira Rodrigues
Instituto de Computação, Universidade Estadual de Campinas
Av. Albert Einstein 1251, Campinas, SP, 13083-852, Brasil
deyvison_s@hotmail.com

Pedro Amorim
INESC TEC, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto
R. Dr. Roberto Frias, Porto 4200-465, Portugal
pedro.amorim@inesctec.pt

Iago Augusto Carvalho
Instituto de Computação, Universidade Estadual de Campinas
Av. Albert Einstein 1251, Campinas, SP, 13083-852, Brasil
iagoac@ic.unicamp.br

Eduardo Ferian Curcio
Fair, Isaac and Company
Av. Roque Petroni Júnior 999, São Paulo, SP, 04707-910, Brasil
eduardocurcio@fico.com

Flávio Keidi Miyazawa
Instituto de Computação, Universidade Estadual de Campinas
Av. Albert Einstein 1251, Campinas, SP, 13083-852, Brasil
fkm@ic.unicamp.br

Eduardo Candido Xavier
Instituto de Computação, Universidade Estadual de Campinas
Av. Albert Einstein 1251, Campinas, SP, 13083-852, Brasil
eduardo@ic.unicamp.br

RESUMO

Este trabalho propõe o Problema de Roteamento de Veículos Capacitado com Janelas de Tempo e Clientes Estocásticos (CVRPTWSC), uma variação do Problema de Roteamento de Veículos Capacitado com Janelas de Tempo (CVRPTW) onde um subconjunto dos clientes são incertos. O CVRPTWSC é formulado como um problema de programação linear inteira estocástico em dois estágios, que é resolvida através do *Integer L-Shaped Method*. Experimentos computacionais realizados em extensões de instâncias para o CVRPTW demonstram a eficiência e os limites do método proposto.

PALAVRAS CHAVE. Roteamento de veículos com janelas de tempo. Otimização estocástica. L-Shaped.

Otimização combinatória, Programação matemática

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings

ABSTRACT

This work proposes the Capacited Vehicle Routing Problem with Time Windows and Stochastic Consumers (CVRPTWSC), a variant of the Capacited Vehicle Routing Problem with Time Windows where a subset of the consumers are uncertain. The CVRPTWSC is formulated as a stochastic integer linear programming problem in two stages, which is solved through the *Integer L-Shaped Method*. Computational experiments developed in extensions of the instances for the CVRPT show the efficiency and the limits of the proposed method.

KEYWORDS. Vehicle routing with time windows. Stochastic optimization. L-Shaped.

Combinatorial optimization, Mathematical programming

1. Introdução

O Problema de Roteamento de Veículos (*Vehicle Routing Problem* - VRP) tem o objetivo de determinar um conjunto de rotas a serem percorridas por uma frota de veículos para servir um determinado conjunto de clientes. Cada rota deve iniciar e terminar em um localização específica, denominada por depósito, e cada cliente deve pertencer a exatamente uma rota. O VRP foi introduzido por Dantzig e Ramser [1959], que modelaram um problema de distribuição de combustíveis a estações de serviço e propuseram a primeira formulação por Programação Linear Inteira (PLI) para o problema. Posteriormente, o VRP foi demonstrado ser NP-Difícil por incluir o Problema do Caixeiro Viajante como um caso especial [Garey e Johnson, 1979]. A literatura contempla diversos algoritmos exatos, aproximativos, heurísticas e formulações para o VRP, bem como numerosas variações deste problema. Discussões acerca destes avanços podem ser encontradas em Archetti e Speranza [2008]; Baldacci et al. [2012]; Berbeglia et al. [2007]; Caceres-Cruz et al. [2014]; Cuda et al. [2015]; Doerner e Schmid [2010]; Drexl [2012]; Karakatič e Podgorelec [2015]; Lin et al. [2014]; Montoya-Torres et al. [2015]; Ritzinger et al. [2016]; Toth e Vigo [2002]; Vidal et al. [2013]; e Wang et al. [2009].

O Problema de Roteamento de Veículos Capacitados (*Capacitated Vehicle Routing Problem* - CVRP) foi também introduzido por Dantzig e Ramser [1959]. Neste problema, cada veículo tem uma capacidade máxima predeterminada e cada cliente possui uma demanda. O objetivo é encontrar um conjunto de rotas com custo mínimo que atenda a todos os clientes respeitando a capacidade máxima dos veículos. Este problema também é NP-Difícil, pois ele é uma generalização do VRP. Um survey com formulações e algoritmos para o CVRP foi desenvolvido por Wang et al. [2009].

O Problema de Roteamento de Veículos com Janela de Tempo (*Vehicle Routing Problem with Time Windows* - VRPTW) é outra variação do VRP. Este problema foi apresentado por Schrage [1981]. Savelsbergh [1985] provou que, mesmo quando o número de veículos é fixo, encontrar uma única solução viável para o VRPTW é um problema NP-Difícil. Neste problema, cada arco é associado a um tempo de viagem e cada cliente possui um tempo de serviço e uma janela de tempo no qual deve ser atendido. O objetivo do VRPTW é encontrar um conjunto de rotas de custo mínimo que atendam a todos os clientes respeitando as janelas de tempo dadas. Algoritmos exatos para o VRPTW podem ser encontrados em Baldacci et al. [2012] e um survey com heurísticas e metaheurísticas para este problema foi desenvolvido por Bräysy e Gendreau [2005a,b].

Neste trabalho, estamos interessados no Problema de Roteamento de Veículos Capacitado com Janelas de Tempo (*Capacitated Vehicle Routing Problem with Time Windows* - CVRPTW) [Baldacci et al., 2012]. Mais especificamente, estamos interessados em uma variante do CVRPTW denominado Problema de Roteamento de Veículos Capacitado com Janelas de Tempo e Clientes

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings

Estocásticos (*Capacitated Vehicle Routing Problem with Time Windows and Stochastic Clients* - CVRPTWSC). Neste problema, existem dois subconjuntos disjuntos de clientes: (i) clientes certos, *i.e.*, um subconjunto de clientes que já realizaram um pedido em um momento anterior à tomada de decisão; e (ii) clientes incertos, *i.e.*, um subconjunto de clientes que podem ou não realizar um pedido com uma dada probabilidade. Restrições operacionais indicam que a rota dos veículos devem ser computadas uma única vez e não podem ser re-otimizadas. Deste modo, cada veículo deverá percorrer uma rota computada *a priori* que atenda todos os clientes certos, além de considerar os custos operacionais de atender os clientes incertos que tenham suas demandas efetivamente realizadas. Desta forma o objetivo do problema é computar um conjunto de rotas que minimizem o *custo esperado* das rotas atendendo todos os clientes certos e incertos.

O CVRPTWSC é modelado como um problema de otimização estocástica em dois estágios. No primeiro estágio, deve-se computar rotas para atender os clientes certos com custo mínimo, respeitando a capacidade dos veículos e as janelas de tempo de cada cliente. No segundo estágio, resolve-se um outro problema de otimização que minimiza o custo esperado das rotas após a inserção de clientes incertos. Note que não consideramos custos relacionados a ações de recurso (*recourse actions*) pois as rotas computadas no primeiro estágio devem ser viáveis após inserção de clientes incertos para cada possível realização destes. Ou seja, a solução ótima é um conjunto de rotas, com uma atribuição de clientes incertos para estas rotas, para cada realização possível de clientes incertos, já respeitando as restrições do problema.

O restante deste trabalho é organizado como se segue. A Seção 2 apresenta os trabalhos relacionados. O CVRPTWSC é formalmente definido na Seção 3. Um algoritmo exato para a resolução do CVRPTWSC é apresentado na Seção 4. Experimentos computacionais, reportados na Seção 5, avaliam o desempenho dos algoritmos propostos. Finalmente, as conclusões e trabalhos futuros são apresentados na última seção.

2. Trabalhos relacionados

O Problema do Caixeiro Viajante Probabilístico (*Probabilistic Traveling Salesman Problem* - PTSP) foi introduzido em Jaillet [1985] como uma variação do Problema do Caixeiro Viajante (*Traveling Salesman Problem* - TSP). Neste problema, temos clientes certos e incertos, onde os últimos possuem uma certa probabilidade de realizarem um pedido ou não. Uma rota, computada *a priori*, deve conter o conjunto total de clientes e define a ordem em que estes serão visitados. O objetivo é encontrar uma rota com o custo esperado mínimo considerando que clientes incertos não realizados serão ”pulados”na rota computada. Jaillet também propõe um método para calcular o custo esperado de uma rota, porém assume que todos os clientes incertos possuem uma mesma probabilidade de ocorrência.

Laporte et al. [1994] formulam o PTSP como um problema de PLI estocástico de dois estágios. Primeiramente, é projetado uma rota *a priori* passando por todos os potenciais clientes. Na segunda fase, os clientes ausentes são retirados da rota e o veículo salta para o próximo cliente na rota. Laporte et al. resolvem o PTSP utilizando o *Integer L-Shaped Method* [Laporte e Louveaux, 1993].

O Problema de Roteamento de Veículos com Demandas e Clientes Estocásticos (*Vehicle Routing Problem with Stochastic Demands and Customers* - VRPSDC) foi definido por Gendreau et al. [1995]. Neste problema, tanto os clientes como suas demandas são estocásticas. Gendreau et al. modelam o VRPSDC como um problema de otimização estocástica em dois estágios. No primeiro estágio, uma rota *a priori*, passando por todos os clientes é construída, sem conhecimento de suas demandas. No segundo estágio, os clientes ausentes são removidos e as demandas dos demais são definidas. Há ações de recurso, quando a capacidade do veículo é excedida em uma determi-

nada rota, e neste caso o veículo deve retornar ao depósito quando fica cheio antes de continuar atendendo os demais clientes da rota. Os autores resolvem o VRPSDC utilizando um algoritmo *branch-and-cut*, extendendo o *Integer L-Shaped Method* de Laporte e Louveaux [1993].

O CVRPTWSC possui semelhanças com o Problema de Roteamento de Veículos com Rotas Consistentes (*Consistent Vehicle Routing Problems* - conVRP) [Kovacs et al., 2014]. Neste problema, um veículo deve sempre percorrer rotas semelhantes periodicamente, sendo um problema comum na coleta de lixo [Teixeira et al., 2004], nas entregas de produtos farmacêuticos e hospitalares [Campelo et al., 2019] e no transporte de estudantes, idosos ou pessoas com necessidades especiais [Feillet et al., 2014], dentre outros. Entretanto, pode existir incerteza associada a demanda dos clientes, o tempo de serviço ou a localização dos clientes. O objetivo do conVRP é definir um conjunto de rotas consistentes levando em consideração as incertezas associadas aos clientes e respeitando restrições de janelas de tempo e capacidade dos veículos.

Recentemente, um número de surveys apresentaram os avanços na literatura sobre problemas de roteamento de veículos estocásticos. O leitor é indicado aos trabalhos Berhan et al. [2014]; Oyola et al. [2017, 2018]; e Ritzinger et al. [2016] para uma discussão sobre a literatura relacionada.

3. Definição do problema

Seja $G = (V, A)$ um digrafo simétrico completo, onde cada vértice $i \in V$ representa uma localidade e cada arco $(i, j) \in A$ representa um caminho entre as duas localidades. O conjunto V é particionado em três subconjuntos disjuntos S, D, e I, onde $S \cup D \cup I = V$. O conjunto S possui um único vértice $s \in V$ que representa o depósito, *i.e.*, a localização inicial e final das rotas de todos os veículos. Além disto, $D \subset V$ representa o conjunto dos clientes certos e $I \subset V$ representa o conjunto de clientes incertos e denota-se por V' o conjunto de clientes do problema, *i.e.*, $V' = D \cup I$. Cada cliente $i \in V'$ possui uma demanda $d_i \in \mathbb{R}_{>0}$ e uma janela de tempo $[a_i, b_i]$, sendo que $0 \leq a_i < b_i$, para todo $i \in V'$. Assume-se que cada cliente incerto $i \in I$ tem uma probabilidade $p_i > 0$ de realizar um pedido. Cada arco $(i, j) \in A$ é associado a um valor c_{ij} que representa o custo de percorrer o caminho entre as duas localidades $i, j \in V$. Também é definido A_D, que são os arcos do grafo G entre clientes com pedidos certos. Além disto, cada arco (i, j) também é associado a um valor t_{ij} que representa o tempo necessário para realizar o deslocamento entre as duas localidades $i, j \in V$. Assumimos que os arcos tem custos e tempos simétricos, ou seja, tanto (i, j) quanto (j, i) possuem os mesmos valores $c_{ij} = c_{ji}$ e $t_{ij} = t_{ji}$. Um conjunto K de veículos pode ser utilizado, sendo que todo veículo $k \in K$ possui uma mesma capacidade máxima C. Os veículos têm permissão de sair do depósito após um determinado instante de tempo $E = 0$ e devem retornar até um segundo instante de tempo $L \geq 0$. Ressalta-se que $E < a_i, \forall\, i \in V'$, que $L > b_i, \forall\, i \in V'$ e que existe pelo menos uma partição de V' em $|K|$ partes, cada uma com demanda total no máximo C. O conjunto que define todos os eventos incertos é representado por Ω e um determinado evento (ou cenário) deste conjunto é denotado por ω. Note que um cenário corresponde a um subconjunto de clientes incertos que devem ser atendidos. O conjunto D^k é definido como todos os clientes certos contidos na rota k. Definimos ainda $S^k = D^k \cup I(\omega)$, ou seja, é a união de todos os clientes incertos de um determinado cenário com todos os clientes certos da rota k. Também é definido $A^k = S^k \times S^k$, que são todos os arcos entre os clientes em S^k. Uma solução para o CVRPTWSC consiste em um conjunto de $|K|$ rotas de tal forma que cada cliente $i \in V'$ é atendido por exatamente um veículo $k \in K$ respeitando sua janela de tempo. Além disto, cada rota deve respeitar a capacidade máxima C do veículo. O objetivo é encontrar o conjunto de rotas com o menor custo possível, considerando os custos do primeiro e do segundo estágios.

Definimos uma formulação PLI para o CVRPTWSC pelas equações (1)–(24) baseando-se na formulação clássica do CVRPTW. Esta formulação representa um problema de otimização

estocástica em dois estágios. A formulação utiliza um vértice artificial s' que também representa o depósito. Desta forma o conjunto de arcos A, também contém um arco de cada vértice para este nó artificial s', tal que $c_{is'} = c_{si}$ e $t_{is'} = t_{si}$ para todo vértice $i \in V'$. O primeiro estágio utiliza variáveis de decisão $\left\{ x_{ij}^k \in \mathbb{B} : (i,j) \in A, k \in K \right\}$ tal que $x_{ij}^k = 1$ se a rota do veículo k passa pelo arco (i,j) e $x_{ij}^k = 0$ caso contrário. Além disso, variáveis auxiliares $\left\{ w_i^k \in \mathbb{R}_{\geq 0} : i \in V \cup \{s'\} \setminus I, k \in K \right\}$ representam o instante de tempo que o veículo k atende um cliente i ou o tempo em que ele chega no depósito. O modelo do primeiro estágio é definido pela função objetivo descrita pela Equação (1) e pelas restrições em (2)–(11), onde $\delta^+(i)$ representa o conjunto de arcos que saem do vértice i e $\delta^-(i)$ é o conjunto dos arcos que chegam ao vértice i.

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A_D} c_{ij} x_{ij}^k + \mathscr{Q}(x), \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \sum_{k \in K} \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ij}^k = 1, \qquad \forall i \in D, \tag{2}$$

$$\sum_{j \in \delta^+(s)} x_{sj}^k = 1, \qquad \forall k \in K, \tag{3}$$

$$\sum_{i \in \delta^-(s')} x_{is'}^k = 1, \qquad \forall k \in K, \tag{4}$$

$$\sum_{i \in \delta^-(j)} x_{ij}^k - \sum_{i \in \delta^+(j)} x_{ji}^k = 0, \qquad \forall j \in D, \forall k \in K, \tag{5}$$

$$w_i^k + s_i + t_{ij} - w_j^k \leq (1 - x_{ij}^k) M, \qquad \forall k \in K, (i,j) \in A_d, \tag{6}$$

$$a_i \sum_{j \in \delta^-(i)} x_{ji}^k \leq w_i^k \leq b_i \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ij}^k, \qquad \forall k \in K, \forall i \in D, \tag{7}$$

$$E \leq w_i^k \leq L \qquad \forall i \in D \cup \{s'\}, k \in K, \tag{8}$$

$$\sum_{i \in D} d_i \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ij}^k \leq C, \qquad \forall k \in K, \tag{9}$$

$$x_{ij}^k \in \{0,1\}, \qquad \forall (i,j) \in A_d, \forall k \in K, \tag{10}$$

$$w_i^k \geq 0, \qquad \forall i \in D \cup \{s'\} \setminus I, k \in K. \tag{11}$$

A função objetivo descrita pela Equação (1) minimiza o custo esperado das rotas. Temos duas parcelas, uma se refere ao custo do primeiro estágio, que corresponde ao custo das rotas para atender os clientes certos e a segunda parcela $\mathscr{Q}(x)$, representa o valor esperado a ser adicionado aos custos destas rotas considerando o segundo estágio. As restrições (2) garantem que cada cliente certo seja atendido por exatamente um veículo. As restrições (3), (4) e (5) são as clássicas restrições de conservação de multi-fluxo e garantem a construção rota para cada veículo saindo de s e terminando em s'. As restrições (6) garantem que, caso um arco (i,j) seja utilizado na rota k, então o tempo de início de atendimento do cliente j pelo veículo k seja igual ou superior ao tempo de início do atendimento do cliente i mais o tempo de serviço do cliente i e o tempo de deslocamento do arco (i,j). As restrições descritas em (7) garantem que todo cliente seja atendido dentro de sua janela de tempo. As restrições apresentadas em (8) certificam que todos os veículos saiam após o tempo inicial E e retornem antes do tempo máximo L. A capacidade máxima dos veículos

é garantida pelas restrições (9). Os domínios das variáveis x_{ij}^k e w_i^k são respectivamente definidos pelas equações (10) e (11).

Dada uma solução x do primeiro estágio e uma realização ω de clientes incertos, construímos uma nova solução no segundo estágio onde garantimos que os clientes certos permanecem na mesma rota em que estavam no primeiro estágio, e que são visitados na mesma ordem em que estavam nesta rota. Clientes incertos realizados em ω (denotado por $I(\omega)$) devem ser inseridos nestas rotas, mas mantendo-se a viabilidade de cada rota.

O modelo PLI do segundo estágio é bastante semelhante ao do primeiro estágio exceto por inclusão de restrições que garantem que os clientes certos continuem nas mesmas rotas e são visitados na mesma ordem original. Seja D^k o conjunto de clientes certos que no primeiro estágio estão na rota k e seja A^k o conjunto de arcos entre quaisquer vértices do conjunto S^k. Temos variáveis de decisão $\left\{ y_{ij}^k \in \mathbb{B} : (i,j) \in A^k, k \in K \right\}$ tal que $y_{ij}^k = 1$ se o cliente $j \in S^k$ é visitado após o cliente $i \in S^k$ na rota do veículo k e $y_{ij}^k = 0$ caso contrário. Além disso, variáveis $\left\{ \tilde{w}_i^k \in \mathbb{R}_{\geq 0} : i \in D^k, k \in K \right\}$ indicam instante de tempo que o veículo k atende o cliente $i \in S^k$. O modelo do segundo estágio é definido pela função objetivo descrita pela Equação (12) e pelas restrições em (13)–(24). Assim como na formulação por PLI do primeiro estágio, $\delta^+(i)$ representa o conjunto de arcos que saem do vértice i e $\delta^-(i)$ é o conjunto dos arcos que chegam ao vértice i.

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} y_{ij}^k - \mathscr{F}(x), \tag{12}$$

$$\text{s.t.} \sum_{k \in K} \sum_{j \in \delta^+(i)} y_{ij}^k = 1, \qquad \forall i \in D \cup I(\omega), \tag{13}$$

$$\sum_{j \in \delta^+(s)} y_{sj}^k = 1, \qquad \forall k \in K, \tag{14}$$

$$\sum_{i \in \delta^-(s')} y_{is'}^k = 1, \qquad \forall k \in K, \tag{15}$$

$$\sum_{i \in \delta^-(j)} y_{ij}^k - \sum_{i \in \delta^+(j)} y_{ji}^k = 0, \qquad \forall k \in K, \forall j \in S^k \tag{16}$$

$$\tilde{w}_i^k + s_i + t_{ij} - \tilde{w}_j^k \leq (1 - y_{ij}^k) M, \qquad \forall k \in K, (i,j) \in A^k, \tag{17}$$

$$a_i \sum_{j \in \delta^-(i)} y_{ji}^k \leq \tilde{w}_i^k \leq b_i \sum_{j \in \delta^+(i)} y_{ij}^k, \qquad \forall k \in K, \forall i \in D^k \cup I(\omega), \tag{18}$$

$$E \leq \tilde{w}_i^k \leq L \qquad k \in K, \forall i \in D^k \cup \{s'\} \cup I(\omega), \tag{19}$$

$$\sum_{i \in D} d_i \sum_{j \in \delta^+(i)} y_{ij}^k \leq C, \qquad \forall k \in K, \tag{20}$$

$$\sum_{j \in \delta^+(i)} y_{ij}^k = 1, \qquad \forall i \in D^k, \tag{21}$$

$$\tilde{w}_i^k \leq \tilde{w}_j^k \qquad \forall i,j \in D^k \text{ t.q. } w_i^k < w_j^k, \forall k \in K, \tag{22}$$

$$y_{ij}^k \in \{0,1\}, \qquad \forall (i,j) \in A, \forall k \in K, \tag{23}$$

$$\tilde{w}_i^k \geq 0, \qquad \forall i \in V \cup \{s'\} \setminus I, k \in K. \tag{24}$$

A função objetivo descrita pela Equação (12) minimiza o custo das rotas do segundo

estágio menos o custo das rotas estabelecidas no primeiro estágio, dado por $\mathscr{F}(x)$. Desta forma, esta diferença corresponde exatamente ao incremento do custo das rotas do primeiro estágio ao se levar em consideração os clientes incertos do segundo estágio. As restrições (13)–(20) são essencialmente as restrições do modelo do primeiro estágio, exceto que agora incluímos também os clientes incertos $I(\omega)$. As restrições (21) garantem que se um cliente i estava na rota k no primeiro estágio então ele continuará na rota k no segundo estágio, enquanto as restrições (22) garantem que a ordem entre vértices certos no primeiro estágio será mantida nas rotas do segundo estágio.

4. Algoritmos para o CVRPTWSC

Neste trabalho, extendemos o *Integer L-Shaped Method* (L-Shaped) proposto por Laporte e Louveaux [1993] para o CVRPTWSC. O objetivo do L-Shaped é fazer a aproximação do valor esperado das rotas no segundo estágio [Birge e Louveaux, 2011]. Este valor, descrito como $\mathscr{Q}(x)$ na Equação (1), é não linear, pois envolve o cômputo de um custo esperado que corresponde a encontrar a solução de todos os problemas de PLI do segundo estágio para cada realização ω possível. O L-Shaped, então, é construído como um *problema mestre*, definido pelas Equações (1)–(11), e um conjunto de *subproblemas auxiliares*, definidos pelas equações (12)–(24).

Para aplicar o *Integer L-Shaped Method* proposto em Laporte e Louveaux [1993] seguindo o modelo de Birge e Louveaux [2011], são necessárias as seguintes condições: (i) as variáveis de decisão são binárias, (ii) para qualquer vetor solução viável x do primeiro estágio o valor de $\mathscr{Q}(x)$ pode ser computado, e (iii) existe um valor finito $\mathscr{L}$ que seja um limitante inferior para qualquer solução válida do segundo estágio, ou seja, $\mathscr{L} \leq \min_x\{\mathscr{Q}(x) \mid Ax = b, x \in \mathbb{B}\}$.

Para melhorar a eficiência do método, Birge e Louveaux [2011] propõem adicionar cortes de otimalidade, gerando restrições válidas para fornecer um limitante inferior para o valor da função $\mathscr{Q}(x)$. Seja θ uma variável que substituirá no modelo o termo $\mathscr{Q}(x)$. Temos que garantir que θ seja sempre um limite inferior válido para $\mathscr{Q}(x)$.

Seja x^v uma solução viável para o primeiro estágio (satisfaz $Ax^v = b$). Defina $S = \{i | x_i^v = 1\}$. Computamos então o valor do segundo estágio para x^v e denotamos este valor por θ^v. Definimos o seguinte corte de otimalidade:

$$\theta \geq (\theta^v - \mathscr{L})\Big(\sum_{i \in S} x_i - \sum_{i \notin S} x_i\Big) - (\theta^v - \mathscr{L})(|S| - 1) + \mathscr{L}. \tag{25}$$

Birge e Louveaux [2011] demonstram que tais cortes são válidos. Para ver isso note que quando $(\sum_{i\in S} x_i - \sum_{i\notin S} x_i) = |S|$ então as variáveis assumem exatamente o valor da solução x^v, e o lado direito da inequação se reduz ao valor θ^v, e a restrição $\theta \geq \theta^v$ é valida pela definição de θ^v. Por outro lado $(\sum_{i\in S} x_i - \sum_{i\notin S} x_i)$ é sempre menor ou igual a $|S|$. Caso seja estritamente menor, isto implica que o lado direito da inequação se reduzirá a um valor menor ou igual a $\mathscr{L}$, que é um limitante inferior válido para qualquer solução x do primeiro estágio.

Implementamos um procedimento para o *Integer L-Shaped method* seguindo o modelo de Birge e Louveaux [2011], e, devido a questão de espaço, será apresentado aqui uma versão simplificada dos passos deste método, onde os cortes de viabilidade podem ser adicionados no passo 3, caso seja necessário.

Passo 0: Inicialize $s = v = 0$, $\overline{z} = \infty$. O valor de θ é definido como $-\infty$ ou um limitante inferior válido $\mathscr{L}$. Crie uma lista que contém um nó pendente com o problema inicial.
Passo 1: Altere $v = v + 1$. Se a lista estiver vazia, pare. Caso contrário, selecione um nó pendente na lista como problema atual.

Passo 2: Resolva o problema atual. Se o problema atual não tem solução viável, remova o nó atual e vá para o passo 1. Caso contrário, seja (x^v, θ^v) uma solução ótima para o problema atual.
Passo 3: Se $cx > \overline{z}$, remova o nó atual e vá para o passo 1.
Passo 4: Verifique as restrições de integralidade. Se a restrição for violada, crie dois nós seguindo o procedimento padrão de *branch and cut*. Inclua esses dois nós na lista de nós pendentes e vá para o passo 1.
Passo 5: Calcule $\mathscr{Q}(x^v)$ e $z^v = c^T x + \theta^v$. Se $z^v \leq \overline{z}$, atualize $\overline{z} = z^v$.
Passo 6: Se $\theta^v \geq \theta$, então remova o nó atual e retorne ao passo 1. Caso contrário, insira o corte de otimalidade de acordo com (25), altere $s = s + 1$ e retorne ao passo 2.

5. Experimentos computacionais

Os experimentos computacionais foram realizados em um Intel Xeon CPU E3-1230 V2 com 2.4 GHz de clock e 32 Gb de RAM, sob um sistema operacional Linux Ubuntu 18.04. O algoritmo foi implementado utilizando `C++14` e compilados com o GNU `g++ 7.5`. Os modelo de PLI de ambos os estágios foram resolvidos utilizando o IBM/ILOG CPLEX[1] versão 12.7.1 com os parâmetros padrões. Um tempo de 3600 segundos (1 hora) foi utilizado como critério de parada para o algoritmo implementado.

Este trabalho utilizou uma versão adaptada das instâncias de VRPTW de Solomon [2]. Destas, foram escolhidas três classes de instâncias: $R1$, $C1$ e $RC1$. Nas instâncias $R1$, o posicionamento dos clientes foi definido de forma aleatória, nas instâncias $C1$ os clientes são organizados em pequenos *clusters* e nas instâncias $RC1$ existem tanto pequenos *clusters* de clientes quanto clientes posicionados de forma aleatória. Todos os três grupos de instâncias possuem um curto espaço de tempo e, desta forma, um mesmo veículo dificilmente consegue atender a mais de 10 clientes.

Foram selecionadas, de forma aleatória, 10 instâncias de cada classe, sendo 5 instâncias com 25 clientes e 5 instâncias com 50 clientes. Além disto, o número de clientes estocásticos I foi variado no conjunto $\{2, 3, 4, 5\}$, sendo estes definidos aleatoriamente com probabilidade uniforme. Desta forma, este trabalho avaliou um total de 30 instâncias. Vale a pena ressaltar que o número k de veículos utilizados em cada instância é fixo, sendo definidos na instância original.

Os resultados dos experimentos computacionais são reportados nas tabelas 1, 2 e 3, representando respectivamente os resultados para as instâncias da classe $R1$, $C1$ e $RC1$. Em todas as tabelas, a primeira coluna apresenta o número total de clientes, enquanto a segunda coluna exibe o número de clientes incertos. A terceira e quarta colunas denotam, respectivamente, o número de instâncias para as quais o *L-Shaped method* conseguiu encontrar pelo menos uma solução inteira dentro do tempo limite de 3600 segundos e o número de soluções ótimas encontradas dentre deste mesmo limite de tempo. A quinta coluna representa o valor médio e o desvio padrão do *gap* de otimalidade encontrado pelo algoritmo, enquanto a sexta coluna exibe o número médio e o desvio padrão de cortes inseridos pelas execuções do segundo estágio. As duas últimas colunas representam a média e o desvio padrão do tempo computacional gastos no primeiro e no segundo estágio, respectivamente.

Pode-se observar destas tabelas que o *L-Shaped method* gastou um tempo muito maior executando o primeiro estágio (representado pela função objetivo (1) e pelas restrições em (2)–(11)) do que o segundo estágio (descrito pela função objetivo (12) e pelas restrições em (13)–(24)), sendo que o tempo médio gasto no segundo estágio nunca excedeu os 300 segundos. Este resultado pode ser explicado por dois fatos: (i) o número de clientes do conjunto $|I|$ é pequeno, o que faz com

[1] https://www.ibm.com/products/ilog-cplex-optimization-studio
[2] http://www.bernabe.dorronsoro.es/vrp/index.html?/Problem_Instances/CVRPTWInstances.html

Tabela 1: Resultados do L-Shaped Method para as instâncias R1

$\|V'\|$	$\|I\|$	inteira	ótima	gap (%)	cortes	t_1 (s)	t_2 (s)
25	2	1	1	80.0 ± 44.7	1.4 ± 0.9	75.7 ± 75.1	0.4 ± 0.7
	3	1	1	80.0 ± 44.7	3.2 ± 4.9	81.3 ± 65.2	5.7 ± 11.6
	4	1	1	80.0 ± 44.7	2.4 ± 3.1	307.6 ± 575.0	11.3 ± 19.6
	5	5	5	0.0 ± 0.0	17.8 ± 8.7	2789.4 ± 2287.4	298.6 ± 437.2
50	2	0	0	100.0 ± 0.0	0.0 ± 0.0	3600.0 ± 0.0	0.0 ± 0.0
	3	0	0	100.0 ± 0.0	0.0 ± 0.0	3600.0 ± 0.0	0.0 ± 0.0
	4	0	0	100.0 ± 0.0	0.0 ± 0.0	3600.0 ± 0.0	0.0 ± 0.0
	5	0	0	100.0 ± 0.0	0.0 ± 0.0	3600.0 ± 0.0	0.0 ± 0.0

Tabela 2: Resultados do L-Shaped Method para as instâncias C1

$\|V'\|$	$\|I\|$	inteira	otima	gap (%)	cortes	t_1 (s)	t_2 (s)
25	2	5	5	0.0 ± 0.0	8.4 ± 5.3	253.1 ± 537.5	2.9 ± 1.8
	3	5	5	0.0 ± 0.0	10.6 ± 6.9	15.4 ± 9.3	9.7 ± 6.9
	4	5	5	0.0 ± 0.0	3.6 ± 3.0	15.1 ± 20.5	12.5 ± 17.1
	5	5	4	0.0 ± 0.0	2.4 ± 0.5	13.3 ± 5.4	12.8 ± 5.0
50	2	1	0	80.3 ± 44.0	3.0 ± 5.6	3600.0 ± 0.0	22.6 ± 48.2
	3	1	0	80.3 ± 44.1	1.6 ± 2.5	3600.0 ± 0.0	30.5 ± 59.7
	4	3	3	40.0 ± 54.8	1.4 ± 1.3	1521.6 ± 1880.0	43.1 ± 54.1
	5	1	1	80.0 ± 44.7	1.4 ± 2.1	3201.7 ± 1255.1	86.9 ± 140.0

Tabela 3: Resultados do L-Shaped Method para as instâncias RC1

$\|V'\|$	$\|I\|$	inteira	ótima	gap (%)	cortes	t_1 (s)	t_2 (s)
25	2	3	2	41.5 ± 53.5	12.2 ± 12.6	1309.3 ± 2075.8	4.1 ± 4.6
	3	3	2	41.0 ± 53.9	10.0 ± 9.7	984.2 ± 2025.3	8.7 ± 9.2
	4	3	2	40.7 ± 54.1	11.4 ± 13.2	966.0 ± 1911.4	27.0 ± 35.4
	5	5	5	0.0 ± 0.0	7.4 ± 5.2	113.2 ± 114.1	72.0 ± 75.0
50	2	0	0	100.0 ± 0.0	0.0 ± 0.0	3600.0 ± 0.0	0.0 ± 0.0
	3	0	0	100.0 ± 0.0	0.0 ± 0.0	3600.0 ± 0.0	0.0 ± 0.0
	4	1	0	82.9 ± 38.2	0.4 ± 0.9	3600.0 ± 0.0	39.4 ± 88.0
	5	0	0	100.0 ± 0.0	0.0 ± 0.0	3600.0 ± 0.0	0.0 ± 0.0

que poucas decisões devam ser tomadas no segundo estágio; e (ii) poucas execuções do segundo estágio são necessárias, como pode ser observado pelo pequeno número de cortes inseridos.

Também pode-se notar que um número maior de soluções ótimas foi encontrado para instâncias do grupo $C1$ em relação aos grupos $R1$ e $RC1$. Foram encontradas 23 soluções ótimas em relação as instâncias do grupo $C1$, sendo 19 instâncias de 25 clientes e 4 instâncias de 50 clientes. Entretanto, somente 8 soluções ótimas foram encontradas para as instâncias do grupo $R1$ e 11 para as instâncias do grupo $RC1$. Estes resultados podem ser explicados pela topologia das instâncias. Nas instâncias $C1$, os clientes são organizados em pequenos *clusters*, o que facilita a

decisão das rotas. Já nas instâncias dos grupos $R1$ e $RC1$, os clientes são localizados de forma aleatória, sendo mais difícil computar um conjunto de rotas que atenda a todos os clientes.

O número de clientes estocásticos também impactou o número de soluções ótimas encontradas pelo *L-Shaped method*. Pode-se observar que, quanto maior o número de clientes incertos, maior foi o número de soluções ótimas encontradas. O algoritmo computou, respectivamente, 8, 8, 11 e 15 soluções ótimas para as instâncias com 2, 3, 4 e 5 clientes incertos. Uma hipótese que pode explicar este fato é que, quanto maior o número de clientes incertos, menor é o número de variáveis de decisão do primeiro estágio. Deste modo, o esforço computacional necessário para a resolução do primeiro estágio é exponencialmente menor quando existe um menor número de clientes, e o aumento de clientes incertos no segundo estágio não tem um grande impacto no esforço computacional necessário para resolução do segundo estágio, apesar do aumento na quantidade de problemas.

6. Conclusões

Neste trabalho foi proposto o Problema de Roteamento de Veículos Capacitado com Janelas de Tempo e Clientes Estocásticos (*Capacitated Vehicle Routing Problem with Time Windows and Stochastic Clients* - CVRPTWSC). Este é uma variação do clássico Problema de Roteamento de Veículos Capacitado com Janelas de Tempo onde um ou mais dos clientes são incertos, mas possuem uma determinada probabilidade de realizarem um pedido ou não. O CVRPTWSC foi modelado como um problema de otimização estocástica em dois estágios com recurso e resolvido utilizando o *L-Shaped Method*.

Experimentos computacionais realizados em extensões de clássicas instâncias da literatura demonstraram que o *L-Shaped Method* foi capaz de resolver a maioria das instâncias com 25 clientes, mas não foi efetivo em resolver instâncias com 50 clientes. Além disto, observou-se que o número de clientes estocásticos influenciou no comportamento do método, sendo que, quanto maior o número de clientes estocásticos, maior foi o número de soluções ótimas encontradas pelo algoritmo.

Trabalhos futuros sobre este problema podem ter diversos focos. O primeiro é melhorar a formulação de Programação Linear Inteira de ambos os estágios do CVRPTWSC utilizando desigualdades válidas para problemas semelhantes, *e.g.*, Lysgaard et al. [2004]. Além disto, também pode-se desenvolver heurísticas primais e duais para computar limitantes mais fortes e, assim, auxiliar na convergência do *L-Shaped Method*. Observa-se também que estes trabalhos futuros devem estudar a relação entre o número de clientes certos e incertos com a convergência do algoritmo.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, da ERDF - European Regional Development através do Operational Programme for Competitiveness and Internationalisation - COMPETE 2020, da FCT - Fundação para a Ciência e a Tecnologia de Portugal pelo projeto POCI-01-0145-FEDER-031908, da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - Brasil (FAPESP) processos 2015/11937-9, 2016/01860-1, 2018/08879-5 e 2019/26159-2 e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Brasil (CNPq) processos 425340/2016-3, 304856/2017-7, 314366/2018-0 e 134673/2018-2.

Referências

Archetti, C. e Speranza, M. G. (2008). The split delivery vehicle routing problem: A survey. In *The vehicle routing problem: Latest advances and new challenges*, p. 103–122. Springer.

Baldacci, R., Mingozzi, A., e Roberti, R. (2012). Recent exact algorithms for solving the vehicle routing problem under capacity and time window constraints. *European Journal of Operational Research*, 218(1):1–6.

Berbeglia, G., Cordeau, J.-F., Gribkovskaia, I., e Laporte, G. (2007). Static pickup and delivery problems: a classification scheme and survey. *Top*, 15(1):1–31.

Berhan, E., Beshah, B., Kitaw, D., e Abraham, A. (2014). Stochastic vehicle routing problem: A literature survey. *Journal of Information & Knowledge Management*, 13(03):1450022.

Birge, J. R. e Louveaux, F. (2011). *Introduction to stochastic programming*. Springer Science & Business Media.

Bräysy, O. e Gendreau, M. (2005a). Vehicle routing problem with time windows, part i: Route construction and local search algorithms. *Transportation science*, 39(1):104–118.

Bräysy, O. e Gendreau, M. (2005b). Vehicle routing problem with time windows, part ii: Metaheuristics. *Transportation science*, 39(1):119–139.

Caceres-Cruz, J., Arias, P., Guimarans, D., Riera, D., e Juan, A. A. (2014). Rich vehicle routing problem: Survey. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, 47(2):1–28.

Campelo, P., Neves-Moreira, F., Amorim, P., e Almada-Lobo, B. (2019). Consistent vehicle routing problem with service level agreements: A case study in the pharmaceutical distribution sector. *European Journal of Operational Research*, 273(1):131–145.

Cuda, R., Guastaroba, G., e Speranza, M. G. (2015). A survey on two-echelon routing problems. *Computers & Operations Research*, 55:185–199.

Dantzig, G. B. e Ramser, J. H. (1959). The truck dispatching problem. *Management science*, 6(1): 80–91.

Doerner, K. F. e Schmid, V. (2010). Survey: matheuristics for rich vehicle routing problems. In *International Workshop on Hybrid Metaheuristics*, p. 206–221. Springer.

Drexl, M. (2012). Synchronization in vehicle routing—a survey of vrps with multiple synchronization constraints. *Transportation Science*, 46(3):297–316.

Feillet, D., Garaix, T., Lehuédé, F., Péton, O., e Quadri, D. (2014). A new consistent vehicle routing problem for the transportation of people with disabilities. *Networks*, 63(3):211–224.

Garey, M. R. e Johnson, D. S. (1979). *Computers and intractability*, volume 174. Freeman San Francisco.

Gendreau, M., Laporte, G., e Séguin, R. (1995). An exact algorithm for the vehicle routing problem with stochastic demands and customers. *Transportation science*, 29(2):143–155.

Jaillet, P. (1985). *Probabilistic traveling salesman problems*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology.

Karakatič, S. e Podgorelec, V. (2015). A survey of genetic algorithms for solving multi depot vehicle routing problem. *Applied Soft Computing*, 27:519–532.

Kovacs, A. A., Golden, B. L., Hartl, R. F., e Parragh, S. N. (2014). Vehicle routing problems in which consistency considerations are important: A survey. *Networks*, 64(3):192–213.

Laporte, G. e Louveaux, F. V. (1993). The integer l-shaped method for stochastic integer programs with complete recourse. *Operations research letters*, 13(3):133–142.

Laporte, G., Louveaux, F. V., e Mercure, H. (1994). A priori optimization of the probabilistic traveling salesman problem. *Operations research*, 42(3):543–549.

Lin, C., Choy, K. L., Ho, G. T., Chung, S. H., e Lam, H. (2014). Survey of green vehicle routing problem: past and future trends. *Expert systems with applications*, 41(4):1118–1138.

Lysgaard, J., Letchford, A. N., e Eglese, R. W. (2004). A new branch-and-cut algorithm for the capacitated vehicle routing problem. *Mathematical Programming*, 100(2):423–445.

Montoya-Torres, J. R., Franco, J. L., Isaza, S. N., Jiménez, H. F., e Herazo-Padilla, N. (2015). A literature review on the vehicle routing problem with multiple depots. *Computers & Industrial Engineering*, 79:115–129.

Oyola, J., Arntzen, H., e Woodruff, D. L. (2017). The stochastic vehicle routing problem, a literature review, part ii: solution methods. *EURO Journal on Transportation and Logistics*, 6(4):349–388.

Oyola, J., Arntzen, H., e Woodruff, D. L. (2018). The stochastic vehicle routing problem, a literature review, part i: models. *EURO Journal on Transportation and Logistics*, 7(3):193–221.

Ritzinger, U., Puchinger, J., e Hartl, R. F. (2016). A survey on dynamic and stochastic vehicle routing problems. *International Journal of Production Research*, 54(1):215–231.

Savelsbergh, M. W. (1985). Local search in routing problems with time windows. *Annals of Operations research*, 4(1):285–305.

Schrage, L. (1981). Formulation and structure of more complex/realistic routing and scheduling problems. *Networks*, 11(2):229–232.

Teixeira, J., Antunes, A. P., e de Sousa, J. P. (2004). Recyclable waste collection planning—-a case study. *European Journal of Operational Research*, 158(3):543–554.

Toth, P. e Vigo, D. (2002). *The vehicle routing problem*. SIAM.

Vidal, T., Crainic, T. G., Gendreau, M., e Prins, C. (2013). Heuristics for multi-attribute vehicle routing problems: A survey and synthesis. *European Journal of Operational Research*, 231(1): 1–21.

Wang, F., Tao, Y., e Shi, N. (2009). A survey on vehicle routing problem with loading constraints. In *2009 International Joint Conference on Computational Sciences and Optimization*, volume 2, p. 602–606. IEEE.

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings