LII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional
João Pessoa - PB, 3 a 5 de novembro de 2020

Otimização robusta para o problema de roteamento de veículos com janelas de tempo: uma nova formulação compacta baseada em fluxo de commodities

Rafael Ajudarte de Campos
Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal de São Carlos
Rodovia Washington Luís, s/n, São Carlos - SP, 13565-905
rafael.ajudarte@estudante.ufscar.br

Pedro Munari
Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal de São Carlos
Rodovia Washington Luís, s/n, São Carlos - SP, 13565-905
munari@dep.ufscar.br

RESUMO

Neste artigo, aborda-se o Problema de Roteamento de Veículos com Janelas de Tempo (PRVJT) considerando variabilidade nas demandas e nos tempos de viagem, a partir da ótica da Otimização Robusta (OR). É proposto um modelo de OR compacto baseado em fluxo de commodities, motivado pela linearização das equações recursivas que modelam as realizações dos parâmetros incertos.Testes computacionais com instâncias da literatura foram efetuados comparando-se o modelo proposto com o modelo compacto da literatura que possui o melhor desempenho até o momento. Os resultados obtidos indicam que o modelo proposto apresenta bom desempenho e possui relaxação linear mais forte que o modelo da literatura, o que pode torná-lo o mais apto para uso em instâncias de pequeno porte, bem como para o desenvolvimento de métodos exatos especializados, como o *branch-and-cut*.

PALAVRAS CHAVE. Roteamento de Veículos, Otimização Robusta, Fluxo de Commodities.

PM - Programação Matemática, LT - Logística e Transportes

ABSTRACT

This paper adresses the Vehicle Routing Problem with Time Windows (VRPTW) considering variability in demand and travel times, from the perspective of Robust Optimization (RO). We propose a compact RO model based on the commodity flow formulation, motivated by the linearization of recursive equations that model the realizations of uncertain parameters. Computational experiments with instances from the literature were performed to compare the proposed model with the compact model in the literature with the best known performance. The results indicate that the proposed model shows a good performance and has a stronger linear relaxation than the model found in literature, which can turn it in the most suitable model for small instances, as well as for the development of exact specialized methods, such as a branch-and-cut algorithm.

KEYWORDS. Vehicle Routing Problem, Robust Optimization, Commodity Flow.

Mathematical Programming, Logistics and Transportation

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings

1. Introdução

Em sistemas produtivos, os custos logísticos relacionados ao transporte do produto representam, em geral, entre 10 e 20% do preço de um produto [Khooban, 2011]. Reduzir tais custos pode ser um diferencial interessante para uma empresa, uma vez que esta pode oferecer produtos com menores preços que a concorrência ou conseguir maiores margens de lucro. Um dos problemas estudados pela Pesquisa Operacional (PO) é o Problema de Roteamento de Veículos (PRV), cuja solução pode trazer redução destes custos [Toth e Vigo, 2014]. Embora este problema não seja novo na literatura, os primeiros estudos sobre o tema já contam com mais de cinquenta anos de existência [Dantzig e Ramser, 1959; Balinski e Quandt, 1964], sua relevância teórica e prática torna-o um objeto importante de estudo da até hoje [Laporte et al., 2013; Toth e Vigo, 2014]. Estudos recentes primam pelo desenvolvimento de modelos matemáticos que se aproximem das condições reais, considerando, por exemplo, variabilidade dos parâmetros [Gendreau et al., 2014; Munari et al., 2019] ou tipos diferentes de restrições [Lahyani et al., 2015; Braekers et al., 2016]; bem como pela melhoria do desempenho de métodos de solução, de modo a solucionar problemas de forma mais eficiente e de porte cada vez maior [Pecin et al., 2017; Álvarez e Munari, 2017; Subramanian et al., 2012].

O PRV pode ser entendido como um problema que visa determinar rotas para um conjunto de veículos, que partem de um ou mais depósitos, com o intuito de atender um conjunto de clientes, seja na entrega e/ou coleta de produtos ou na execução de serviços, buscando minimizar o custo total da viagem, ou algum outro objetivo como número de veículos ou tempo total de viagem [Irnich et al., 2014]. Uma variante comumente encontrada na literatura é o PRV com Janelas de Tempo (PRVJT), uma extensão do tradicional PRV capacitado (PRVC), que adiciona, além do limite máximo de carga nos veículos, restrições que consideram os horários em que os clientes podem ser atendidos. Caso o veículo chegue antes da abertura da janela de tempo, este deve esperar sua abertura para executar o serviço; caso chegue após o fechamento, ele estará atrasado e a solução pode se tornar infactível ou sofrer penalidades no valor da função objetivo.

É importante notar que, quando se trabalha em situações reais, normalmente parâmetros como tempo de viagem ou demanda são desconhecidos durante a etapa de planejamento. Com isso, soluções usando os valores estimados podem se tornar rapidamente inviáveis na prática, por falta ou excesso de produtos no veículo, bem como por atrasos na entrega [Ordonez, 2010]. Neste contexto, surge na PO diversas abordagens de solução que visam considerar tal variabilidade, entre elas a programação estocástica com restrições de chance, a programação estocástica com recurso e a otimização robusta (OR). A primeira consiste em modelar uma restrição baseada na distribuição probabilística do parâmetro, para garantir que a solução seja factível com uma probabilidade $\alpha\%$ escolhida pelo tomador de decisão. Já a programação estocástica com recurso lida com a variabilidade dividindo o problema em estágios e assim permitindo, por exemplo, que o veículo retorne ao depósito para reabastecer caso a demanda que se realize (segundo estágio) tenha sido maior que a demanda esperada na rota criada na etapa de planejamento (primeiro estágio).

Por fim, a OR é uma abordagem que visa a otimização do problema considerando que os parâmetros assumirão seu pior caso dentro de um conjunto de incertezas bem definido. A solução do problema robusto, deste modo, é imune a esta variabilidade. Em contrapartida, esta pode apresentar soluções com valores piores que a determinística. Cabe ao tomador de decisão considerar se usar esta solução mais cara, e segura, vale a pena [Ben-Tal e Nemirovski, 1999]. Uma vantagem que esta abordagem apresenta em relação à programação estocástica é que não é necessário conhecer a distribuição da incerteza do parâmetro incerto, algo que pode ser inviável em situações reais, bastando apenas ter conhecimento de seu pior valor [Ordonez, 2010]. Para impedir que as soluções tornem-se excessivamente conservadoras, com custos elevadíssimos para a proteção da situação irreal em que todos os piores casos ocorram simultaneamente, pode-se usar uma proteção parcial destas incertezas, por meio de um parâmetro chamado de *budget* de incerteza, o qual o tomador de

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings

decisão pode decidir de forma a buscar um melhor custo-benefício [Bertsimas e Sim, 2003]. Esta robustez é tratada no parâmetro Γ, melhor detalhado no decorrer deste artigo.

O objetivo deste trabalho é introduzir uma nova formulação compacta para o PRVJT sob incertezas baseada no modelo de fluxo de commodities [Langevin et al., 1993; Letchford e Salazar-González, 2015] e considerando o viés da OR. Como contribuição, tem-se uma forma inovadora de incorporar a esse tipo de modelo, restrições obtidas pela linearização de equações recursivas que modelam a realização dos parâmetros incertos. Não se tem conhecimento do uso desta técnica junto ao modelo de fluxo de commodities no contexto de OR. Uma abordagem semelhante foi utilizada por Munari et al. [2019] também para o PRVJT sob incertezas, porém utilizando uma formulação baseada nas restrições do tipo MTZ [Miller et al., 1960], sendo até então o modelo compacto com melhor desempenho, em geral. Acredita-se que o modelo aqui proposto apresente resultados superiores e com melhor relaxação linear que o modelo proposto por Munari et al. [2019], o que pode torná-lo o mais adequado para resolução de problemas de pequeno porte, bem como no desenvolvimento de métodos exatos especializados como o *branch-and-cut*. Outra contribuição deste trabalho aparece ao notar-se que, para chegar no modelo robusto proposto, foi necessário também desenvolver um modelo determinístico baseado em fluxo de commodities para o PRVJT, cuja formulação não foi encontrada na literatura (considerando janelas de tempo de forma explícita).

O restante deste artigo é estruturado da seguinte forma. A Seção 2 apresenta o modelo baseado em fluxo de commodities para o PRVJT determinístico. A Seção 3 detalha a linearização baseada em equações recursivas, que serviu de base para a criação do modelo robusto, o qual é introduzido na Seção 4. Os resultados do modelo proposto usando instâncias da literatura encontram-se na Seção 5. Considerações finais e trabalhos futuros encontram-se na Seção 6.

2. Formulação de fluxo de commodities para o PRVJT determinístico

Nesta seção, descreve-se o modelo determinístico que inspirou a formulação proposta para o PRVJT sob incertezas. Este é baseado no modelo de fluxo simples de commodities para o PRV Capacitado (PRVC) [Letchford e Salazar-González, 2015] que foi inspirado no modelo originalmente proposto por Gavish e Graves [1978] para o Problema do Caixeiro Viajante (PCV). É interessante notar que não foi encontrada na literatura nenhuma formulação compacta para o PRVJT baseada em fluxo de commodities, embora existam para o PCV com Janelas de Tempo [Langevin et al., 1993] e para o PRVJT com Fracionamento de Carga [Bianchessi e Irnich, 2019] – ambas em um contexto determinístico. Assim, essa seção apresenta a adaptação desenvolvida sobre a formulação do PRVC de modo a introduzir restrições de janelas de tempo e modelar a propagação de tempo por meio de variáveis e restrições de fluxo.

Começando pela formulação de fluxo de commodities para o PRVC determinístico, considere o conjunto de nós $N = \{0, \ldots, n+1\}$, em que os nós $1, \ldots, n$ representam os clientes, enquanto os nós 0 e $n+1$ representam, respectivamente, a partida e a chegada dos veículos referente ao único depósito. Como parâmetros tem-se a demanda d_i de cada nó $i \in N$, com $d_0 = d_{n+1} = 0$; a capacidade Q dos veículos; e o custo de viagem c_{ij} para cada arco $(i, j) \in A$, sendo A o conjunto de arcos do problema (assume-se um grafo completo). Por fim, as variáveis de decisão deste modelo envolvem a variável binária x_{ij} que indica se o arco $(i, j) \in A$ é percorrido; e a variável contínua f_{ij} que representa a carga do veículo que percorre este arco. O modelo é dado, então, por:

$$\min \quad \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n+1} c_{ij} x_{ij}, \tag{1}$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n+1} x_{ij} = 1, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i\neq h}}^{n} x_{ih} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq h}}^{n+1} x_{hj}, \qquad h = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

$$\sum_{h=0}^{n} f_{hi} - \sum_{j=1}^{n+1} f_{ij} = d_i \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

$$0 \leq f_{ij} \leq Q x_{ij}, \qquad i = 0, \ldots, n, j = 1, \ldots, n+1, \tag{5}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \qquad i, j = 0, \ldots, n+1. \tag{6}$$

A função objetivo (1) visa minimizar o custo total das rotas. As restrições (2) garantem que cada cliente é visitado uma única vez, enquanto as restrições (3) garantem o fluxo dos veículos, impondo que se um veículo chega em algum cliente, o mesmo número de veículos deve sair deste. Já as restrições (4) garantem o fluxo de carga, impondo que a quantidade que sai de qualquer nó i equivale a diferença entre a quantidade de material que chegou neste nó e sua demanda d_i. As restrições (5) impedem que em qualquer arco, o veículo esteja com uma quantidade de produtos maior que sua capacidade. Por fim, as restrições (6) garantem o domínio binário das variáveis x_{ij}.

É possível fortalecer o modelo ao substituir as restrições (5) pelas seguintes, com limite mais restrito [Gavish, 1984]:

$$d_j x_{ij} \leq f_{ij} \leq (Q - d_i) x_{ij}, \quad i = 0, \ldots, n, j = 1, \ldots, n+1. \tag{7}$$

Nota-se que estas restrições apresentam o mesmo significado que as do modelo original, porém os limites superiores e inferiores estão mais restritos para cada nó. O limite inferior de (7) é garantido pois ao ir para um nó j qualquer a partir de um nó i qualquer, o veículo deve ter ao menos a quantidade necessária para suprir j, enquanto o limite superior é garantido pois como o veículo partiu do nó i, a quantidade máxima de produto que pode ser levado no arco (i, j) é a capacidade do veículo menos a demanda do nó i.

Para adaptar este modelo para o PRVJT, buscou-se usar a mesma lógica do modelo original e, deste modo, tratou-se o tempo como uma segunda commodity, criando-se para isso a variável contínua g_{ij} que representa o tempo transcorrido de uma rota (pode ser vista também como a "carga" desta segunda commodity) quando o veículo começa a percorrer o arco (i, j). Assim, g_{ij} equivale ao horário em que o veículo termina de atender o cliente i e está disponível para atender o cliente j. Além disso, os seguintes parâmetros adicionais são necessários: a_i e b_i, que representam o horário de abertura e fechamento das janelas de tempo do cliente i, respectivamente; s_i, representa o tempo de serviço no nó i; e t_{ij} é o tempo de viagem ao se percorrer o arco (i, j). O modelo não permite que o veículo chegue no cliente após do horário de fechamento da janela (b_i) e o veículo deve esperar até o horário de abertura (a_i) para iniciar seus serviços, caso este chegue antes.

Com essas definições é possível desenvolver o modelo baseado em fluxo de commodities com janelas de tempo. Para isto basta adicionar ao modelo (1)-(6) as restrições:

$$\sum_{j=1}^{n+1} g_{ij} \geq s_i + \sum_{h=0}^{n} (g_{hi} + t_{hi} x_{ij}) \quad i = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

$$(a_i + s_i) x_{ij} \leq g_{ij} \leq (b_i + s_i) x_{ij}, \quad i = 0, \ldots, n, j = 1, \ldots, n+1, \tag{9}$$

podendo-se usar (7) em substituição a (5). As restrições (8) atuam de maneira similar à restrição (4), só que desta vez garantindo que os tempos de viagem e de serviço sejam contados quando se visita um nó. As restrições (9) por sua vez, garantem o atendimento das janelas de tempo. Estas restrições também garantem que a variável g_{ij} assume valor positivo se, e somente se, o arco (i, j)

é percorrido. No limite inferior, g_{ij} deve assumir ao menos o valor de $(s_i + a_i)$, dado que g_{ij} representa o horário que o veículo termina de atender o cliente i. Já no limite superior, o valor máximo que g_{ij} pode assumir é, por definição, o caso em que o veículo inicia seu serviço no exato horário que a janela de tempo se fecha.

Há duas notórias diferenças entre as restrições (4) e (8) que são interessantes de serem comentadas. A primeira é que a ordem dos somatórios é invertida, pois enquanto na carga de produtos a quantidade carregada diminui em cada entrega, o tempo aumenta. A segunda é o uso de uma desigualdade, pois se o veículo chegar antes da abertura da janela de tempo, uma igualdade em (8) jamais seria possível. Vale notar que o uso de desigualdade não afeta a solução, dado que g_{ij} assumirá de forma natural o menor valor possível necessário para a factibilidade de uma solução.

3. Modelos de otimização robusta compactos para o roteamento de veículos

Embora ainda não conte com muitos trabalhos na área de roteamento de veículos [Gendreau et al., 2016], a OR vem sendo aplicada com sucesso nesse contexto, em problemas que surgem no transporte marítimo [Agra et al., 2012], em ambientes urbanos [De La Vega et al., 2018], em situações de desastres [Li e Chung, 2019] e no transporte aéreo sob demanda [Campos et al., 2019]. Além das aplicações, a literatura aborda diferentes métodos de solução exatos, como modelos compactos [Agra et al., 2012; Gounaris et al., 2013], métodos *branch-and-cut* [Han et al., 2014; Agra et al., 2013] e *branch-and-price* [Pessoa et al., 2018; Munari et al., 2019; Lu e Gzara, 2019]; bem como métodos heurísticos e meta-heurísticos [De La Vega et al., 2018; Hu et al., 2018; Li e Chung, 2019; Braaten et al., 2017; Subramanyam et al., 2020].

Tratando-se especificamente de modelos compactos, a parte central deste trabalho, notou-se na literatura duas abordagens principais para a linearização do subproblema de maximização que determina o pior caso dos parâmetros incertos, em particular na construção de modelos robustos baseados em conjuntos de incerteza com *budget*. A primeira, e mais tradicional, trata-se da dualização das restrições apresentado por Bertsimas e Sim [2004], que serviu de base para diversos trabalhos [Agra et al., 2012; Gounaris et al., 2013], e a abordagem baseada em programação dinâmica proposta por Munari et al. [2019]. Esta última, ainda recente, apresentou resultados superiores à abordagem clássica e, por isto, servirá de base para o modelo a ser desenvolvido.

O método proposto por Munari et al. [2019] baseia-se em linearizar equações recursivas de programação dinâmica que determinam o pior caso para a realização dos parâmetros incertos, transformando-as em restrições que são incluídas em um modelo compacto. Primeiramente convém compreender as equações recursivas que conseguem garantir a robustez desejada.

Seja Γ^q o *budget* de incerteza que determina o número máximo de piores casos tomados simultaneamente no vetor de demandas. Dada uma rota $r = (v_0, v_1, \ldots, v_h)$ pré-definida, a variável $u_{v_j\gamma}$ representa a maior carga necessária para atender todos os nós da rota r até o nó v_j, quando se tem um limite de $\gamma \leq \Gamma^q$ piores casos simultâneos. Entende-se como pior caso de um nó v_j a maior demanda possível deste nó. Sendo $\bar{d}_{v_j}$ a demanda nominal do nó v_j da rota e $\hat{d}_{v_j}$ a variação superior máxima deste nó, tem-se:

$$u_{v_j\gamma} = \begin{cases} d_{v_0}, & \text{caso } j = 0, \\ u_{v_{j-1}\gamma} + \bar{d}_{v_j}, & \text{caso } \gamma = 0, \\ \max\{u_{v_{j-1}\gamma} + \bar{d}_{v_j}, u_{v_{j-1}\gamma-1} + \bar{d}_{v_j} + \hat{d}_{v_j}\}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{10}$$

para todo $j = 0, 1, \ldots, h$ e $0 \leq \gamma \leq \Gamma^q$. O raciocínio desenvolvido para a primeira linha desta expressão indica que para o primeiro nó da rota, v_0, a carga total deve ser simplesmente a demanda deste (tipicamente zero, por se tratar do depósito). A segunda linha define que, quando nenhum parâmetro atinge seu pior caso, a carga carregada até um determinado nó v_j é a carga carregada no anterior adicionado a demanda do nó v_j. Estas duas primeiras linhas funcionam como condições

de contorno. Por fim, a terceira linha verifica e escolhe, para cada γ e nó v_j, como se obter a maior demanda: optar por pegar os γ piores casos dos nós anteriores ao v_j e somar apenas a demanda nominal de v_j; ou pegar os $\gamma - 1$ piores casos anteriores e somar a demanda do pior caso de v_j. Tem-se, então, a carga máxima com os Γ^q piores casos na variável $u_{v_h\Gamma^q}$, em que $v_h = n + 1$ é o último nó da rota. Convém também verificar se este valor respeita a capacidade Q do veículo para garantir a factibilidade da rota para a robustez determinada.

Munari et al. [2019] propõem converter tais equações recursivas em restrições para um modelo de programação linear inteira compacto de 2-índices, baseando-se em restrições do tipo MTZ. As restrições associadas à propagação de carga e satisfação da capacidade se tornam:

$$u_{j\gamma} \geq u_{i\gamma} + \bar{d}_j x_{ij} - Q(1 - x_{ij}), \qquad \forall (i,j) \in A, \gamma = 0, \ldots, \Gamma^q \tag{11}$$
$$u_{j\gamma} \geq u_{i\gamma-1} + (\bar{d}_j + \hat{d}_j) x_{ij} - Q(1 - x_{ij}), \quad \forall (i,j) \in A, \gamma = 1, \ldots, \Gamma^q \tag{12}$$
$$\bar{d}_j \leq u_{j\gamma} \leq Q, \qquad \forall j \in N, \gamma = 0, \ldots, \Gamma^q \tag{13}$$

As restrições (11) e (12) atuam de maneira análoga à equação recursiva (10), verificando para cada γ se a carga carregada até um determinado nó j ($u_{j\gamma}$) é maior se considerar os piores γ casos dos nós anteriores, sem o nó j, ou tomando os $\gamma - 1$ piores casos anteriores e usando a demanda do pior caso de j. Já as restrições (13) garantem a factibilidade da rota em determinada robustez com o limite superior de carga igual a capacidade. O limite inferior em (13) tem como objetivo restringir melhor o problema com o intuito de se conseguir uma melhor relaxação linear.

É possível fazer o mesmo para o tempo de viagem, devendo apenas atentar-se à condição de que o horário de início do serviço no nó (w_i) deve também respeitar o horário de abertura da janela de tempo (a_i) e a solução torna-se infactível caso a variável w_i seja maior que o horário de fechamento do nó (b_i). Deste modo, as equações recursivas referentes ao tempo são as seguintes:

$$w_{v_j\gamma} = \begin{cases} a_{v_0}, & \text{caso } j = 0, \\ \max\{a_{v_0}, w_{v_{j-1}\gamma} + s_{v_{j-1}} + \bar{t}_{v_{j-1}v_j}\}, & \text{caso } \gamma = 0, \\ \max\{a_{v_0}, w_{v_{j-1}\gamma} + s_{v_{j-1}} + \bar{t}_{v_{j-1}v_j}, & \\ \qquad w_{v_{j-1}\gamma-1} + s_{v_{j-1}} + \bar{t}_{v_{j-1}v_j} + \hat{t}_{v_{j-1}v_j}\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

para todo $j = 0, 1, \ldots, h$ e $0 \leq \gamma \leq \Gamma^t$. Assim como para a demanda, as duas primeiras linhas das equações recursivas são condições de contorno, sendo a primeira para o primeiro nó na rota e a segunda para o cálculo no caso determinístico. A terceira verifica se o pior caso para o instante mais cedo de início do serviço é dado: pelo horário de abertura da janela de tempo; ou tomando os γ piores casos anteriores, sem utilizar o último arco percorrido; ou usando os $\gamma - 1$ piores casos anteriores e considerando o pior caso do último arco. Assim, é possível linearizar essas equações usando-se as seguintes restrições que fazem o cálculo e verificação de factibilidade para os tempos de viagem:

$$w_{j\gamma} \geq w_{i\gamma} + (s_i + \bar{t}_{ij}) x_{ij} - M_{ij}(1 - x_{ij}), \qquad \forall (i,j) \in A, \gamma = 0, \ldots, \Gamma^t \tag{14}$$
$$w_{j\gamma} \geq w_{i\gamma-1} + (s_i + \bar{t}_{ij} + \hat{t}_{ij}) x_{ij} - M_{ij}(1 - x_{ij}), \quad \forall (i,j) \in A, \gamma = 1, \ldots, \Gamma^t \tag{15}$$
$$a_i \leq w_{i\gamma} \leq b_i, \qquad \forall i \in N, \gamma = 0, \ldots, \Gamma^t. \tag{16}$$

As restrições (14) e (15) atuam de maneira similar à função recursiva, verificando para cada γ até Γ^t e para cada nó j se o horário de início do serviço é maior ao se tomar os γ piores casos dos arcos anteriores, sem o pior caso do arco (i, j), ou tomando os $\gamma - 1$ piores casos anteriores e usando o pior caso do arco (i, j). O respeito às janelas de tempo é garantido pelas restrições (16).

4. Formulação baseada em fluxo de commodities para o PRVJT robusto

Nesta seção, será apresentada a adaptação robusta do modelo baseado em fluxo de commodities apresentado na Seção 2 usando-se a abordagem de linearização por programação dinâmica. A primeira mudança efetuada foi a adição de um índice δ nas variáveis f_{ij} e g_{ij}. Assim como no modelo de Munari et al. [2019], este índice representa o número de piores casos simultâneos que se considerará em uma rota para a demanda (Γ^q) e para o tempo de viagem (Γ^t). Deste modo, as variáveis podem ser reinterpretadas como a carga de produto ($g_{ij\delta}$) ou tempo ($f_{ij\delta}$) no início do arco (i, j) considerando δ piores casos. Com estas informações e usando a estratégia de equações recursivas apresentadas na seção anterior, foi possível desenvolver restrições de tempo e carga robustas para o modelo baseado em fluxo de commodities. Por exemplo, substituiu-se a restrição (4) pelas restrições:

$$\sum_{h=0}^{n} f_{hi\delta} \geq \bar{d}_i + \sum_{j=1}^{n+1} f_{ij\delta} \qquad i = 1, \ldots, n, \delta = 0, \ldots, \Gamma^q, \tag{17}$$

$$\sum_{h=0}^{n} f_{hi\delta} \geq \bar{d}_i + \hat{d}_i + \sum_{j=1}^{n+1} f_{ij(\delta-1)} \quad i = 1, \ldots, n, \delta = 1, \ldots, \Gamma^q, \tag{18}$$

Essas restrições verificam em qual caso o veículo ficará mais carregado: considerar os δ piores casos ocorridos anteriormente e adicionar a demanda nominal do nó i, conforme calculado nas restrições (17); ou considerar os $\delta - 1$ piores casos e considerar a demanda do nó i acrescida de seu desvio máximo, conforme calculado nas restrições (18). Vale lembrar que este carregamento é limitado pela capacidade, e esta, caso seja ultrapassada, torna a solução infactível. É importante enfatizar que no caso determinístico (isto é, para $\delta = \Gamma^q = 0$), as restrições (18) se tornam irrelevantes e as restrições (17) equivalem a (4). Nota-se também que foi necessário substituir a igualdade por uma desigualdade, visto que o problema tornaria-se infactível ao se forçar duas igualdades diferentes. Esta substituição é sem perda de otimalidade, pois $f_{hi\delta}$ ainda pode assumir o menor valor possível para manter a solução factível (de acordo com a perspectiva robusta).

De maneira análoga, pode-se aplicar o mesmo processo nas restrições associadas ao tempo de viagem e, assim, obtém-se o seguinte modelo de otimização robusta para o PRVJT com incertezas nas demandas e tempos de viagem, baseado em fluxo de commodities:

$$\text{min} \quad \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n+1} c_{ij} x_{ij}, \tag{19}$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n+1} x_{ij} = 1, \qquad j = 1, .., n, \tag{20}$$

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq h}}^{n} x_{ih} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq h}}^{n+1} x_{hj}, \qquad h = 1, .., n, \tag{21}$$

$$\sum_{h=0}^{n} f_{hi\delta} \geq \bar{d}_i + \sum_{j=1}^{n+1} f_{ij\delta} \qquad i = 1, .., n, \delta = 0, .., \Gamma^q, \tag{22}$$

$$\sum_{h=0}^{n} f_{hi\delta} \geq \bar{d}_i + \hat{d}_i + \sum_{j=1}^{n+1} f_{ij(\delta-1)} \qquad i = 1, .., n, \delta = 1, .., \Gamma^q, \tag{23}$$

$$d_j x_{ij} \leq f_{ij\delta} \leq (Q - d_i)x_{ij}, \qquad i = 0,..,n, j = 1,..,n+1, \delta = 0,..,\Gamma^q, \quad (24)$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} g_{ij\delta} \geq s_i + \sum_{h=0}^{n} (g_{hi\delta} + \bar{t}_{hi} x_{hi}) \qquad i = 1,..,n, \delta = 0,..,\Gamma^t, \quad (25)$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} g_{ij\delta} \geq s_i + \sum_{h=0}^{n} (g_{hi\delta-1} + (\bar{t}_{hi} + \hat{t}_{hi})x_{hi}) \quad i = 1,..,n, \delta = 1,..,\Gamma^t, \quad (26)$$

$$(s_i + a_i)x_{ij} \leq g_{ij\delta} \leq (b_i + s_i)x_{ij}, \qquad i = 0,..,n, j = 1,..,n+1, \delta = 0,..,\Gamma^t, \quad (27)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad i,j = 0,..,n+1. \quad (28)$$

A função objetivo (19), bem com as restrições (20), (21) e (28) são idênticas a (1), (2), (3) e (6) do modelo determinístico, respectivamente. Restrições (22) e (23) calculam a carga de produtos no veículo com o atendimento da demanda, e as restrições (24) garantem que a capacidade de cada veículo seja respeitada. As restrições (25) e (26) atuam de maneira similar a (22) e (23), respectivamente, sendo que a primeira calcula o horário que o veículo parte do nó i se considerar os δ piores casos anteriores e sem considerar o pior caso da viagem para se chegar em i, enquanto a segunda faz o cálculo considerando os $\delta - 1$ piores casos anteriores e o pior caso do arco que chegou no nó i. Por fim, as restrições do tipo (27) garantem o respeito às janelas de tempo, impedindo que o veículo comece o serviço antes da abertura da janela de tempo ou depois do fechamento da janela.

5. Resultados

Para analisar o comportamento dos modelos compactos para o PRVJT sob incertezas abordados neste trabalho, foram realizados testes computacionais com o modelo de fluxo de commodities proposto na Seção 4 e o modelo de Munari et al. [2019] descrito na Seção 3, usando instâncias de *benchmark* da literatura. Foram usadas as cinco primeiras instâncias das classes C1, C2, R1, R2, RC1 e RC2 de 25 clientes, originalmente propostas por Solomon [1987]. Cada instância foi adaptada para se ter variabilidade na demanda e/ou no tempo de viagem de 10%, 25% e 50% acima do valor nominal definido na instância para esses parâmetros. Cada instância foi testada considerando o número máximo de piores casos simultâneos (Γ^q e Γ^t) como 0, 1, 5 e 10. Nos casos em que ambos os parâmetros apresentam variabilidade, os valores de Γ^q e Γ^t foram sempre iguais.

Os testes foram efetuados em um computador com processador Intel Core i7-4790 CPU 3.60 GHz e 16 GB de memória RAM, usando o *software* IBM CPLEX Optimization Studio 12.8 e com o tempo de solução limitado em 3600 segundos. Na Tabela 1, encontram-se os resultados médios para cada modelo, com as instâncias agrupadas para diferentes combinações de Γ^q e Γ^t (colunas 1 e 2), sendo que o modelo de Munari et al. [2019] é denotado como "MTZ"e o modelo baseado em fluxo de commodities proposto neste artigo é denotado como "FC". As colunas 3 a 6 apresentam as médias dos valores ótimos (Opt) e tempos computacionais em segundos (T) para a relaxação linear dos modelos, enquanto as demais colunas apresentam as médias para os valores da melhor solução obtida (Obj), tempos computacionais em segundos (T) e *gap* para a resolução dos modelos. O gap é calculado pelo CPLEX como a diferença relativa entre a melhor solução inteira e o melhor limitante inferior encontrados no tempo limite de 3600 segundos.

Para auxiliar na comparação entre os modelos, apresenta-se também a Tabela 2, na qual se observa indicadores da qualidade da relaxação linear de cada modelo (QRL), para cada modelo e combinação de Γ^q e Γ^t. Esses valores correspondem à razão entre a solução da relaxação linear e a melhor solução inteira encontrada para cada instância (expressa em porcentagem), estimando-se assim a distância entre a solução da relaxação linear e do problema inteiro. Quão mais próximo de 100% esta razão estiver, mais forte é a relaxação linear, visto que esta está mais próxima da solução inteira. Além disso, a tabela mostra o número de instâncias para as quais não se provou otimalidade no tempo limite de 3600 segundos (Incomp) e a diferença percentual média entre a solução inteira

Tabela 1: Resultados, Tempos e Gaps médios para cada modelo e para cada combinação de Γ^q e Γ^t

		Relaxação Linear				**Solução Inteira**					
		MTZ		**FC**		**MTZ**			**FC**		
Γ^q	Γ^t	**Opt**	**T (seg)**	**Opt**	**T (seg)**	**Obj**	**T (seg)**	***Gap***	**Obj**	**T (seg)**	***Gap***
0	0	1577,54	0,01	2417,91	0,08	3375,93	629,90	4,07%	3375,93	274,57	1,03%
1	0	1598,95	0,02	2418,86	0,13	3405,37	685,46	5,07%	3405,56	396,78	1,14%
5	0	1598,95	0,04	2425,75	0,38	3576,46	1060,88	7,39%	3478,04	1403,70	4,53%
10	0	1598,97	0,07	2442,90	0,90	3584,02	1251,51	9,32%	3618,63	1882,85	7,36%
0	1	1599,10	0,02	2395,53	0,15	3317,56	667,29	3,52%	3342,71	392,92	1,10%
0	5	1599,21	0,04	2416,19	0,39	3381,99	846,40	5,12%	3389,19	948,69	2,28%
0	10	1599,29	0,07	2424,31	1,05	3387,02	1010,81	5,61%	3403,84	1615,08	3,55%
1	1	1599,10	0,03	2396,41	0,18	3359,38	801,31	5,06%	3368,88	598,01	1,57%
5	5	1599,21	0,07	2412,12	0,85	3540,54	1153,29	8,51%	3568,35	1841,50	6,60%
10	10	1599,30	0,13	2435,80	3,70	3554,02	1431,98	10,45%	3670,92	2480,89	15,47%
Total		1596,96	0,05	2418,579	0,78	3448,23	953,88	6,41%	3462,20	1183,50	4,46%

do modelo FC e o modelo MTZ (Dif). Este último fator indica o quão melhor ou pior foram as soluções obtidas pelo modelo de fluxo de commodities, sendo que um resultado positivo de $\alpha\%$ indica que a solução custou, em média, $\alpha\%$ a mais, enquanto um valor negativo indica que o custo foi $\alpha\%$ a menos.

Tabela 2: Qualidade da Relaxação linear, número de instâncias não solucionadas e Diferença de solução entre os modelos para cada combinação de Γ^q e Γ^t

	Γ^q	**0**	**1**	**5**	**10**	**0**	**0**	**0**	**1**	**5**	**10**	**Total**
		0	**0**	**0**	**0**	**1**	**5**	**10**	**1**	**5**	**10**	
QRL	**MTZ**	46,7%	47,0%	44,7%	44,6%	48,2%	47,3%	47,2%	47,6%	45,2%	45,0%	46,3%
	FC	71,6%	71,0%	69,7%	67,5%	71,7%	71,3%	71,2%	71,1%	67,6%	66,4%	69,9%
Incomp	**MTZ**	5	16	27	25	14	16	19	17	22	28	189
	FC	2	8	33	40	6	15	27	9	35	51	226
Dif		0,0%	0,0%	-2,8%	1,0%	0,8%	0,2%	0,5%	0,3%	0,8%	3,3%	0,4%

Avaliando ambas tabelas, é possível notar alguns fatores interessantes. Primeiramente, percebeu-se que o modelo de fluxo de commodities (FC) apresentou resultados similares, e até superiores que o modelo de Munari et al. [2019] em alguns casos, tendo inclusive menores *gaps* médios em quase todos os grupos de instâncias. Como esperado, a qualidade da relaxação linear do modelo FC é consideravelmente superior à do modelo baseado em restrições MTZ, apresentando, em média, 69,9% do valor da solução inteira contra 46,3% do modelo da literatura.

Por ter uma melhor relaxação linear, esperava-se que o modelo baseado em FC apresentasse tempos mais longos para o cálculo da Relaxação Linear, o que foi percebido. O tempo de processamento deste modelo com as restrições de integralidade também tende a ser maior que o do modelo baseado em restrições MTZ, em média, embora não de uma maneira proibitiva. Além disso, o modelo baseado em restrições MTZ conseguiu solucionar 37 instâncias (de 840) a mais, o que influenciou na diferença média de 0,4% no valor das soluções dos modelos. É curioso notar, entretanto, que o modelo baseado em fluxo de commodities apresentou resultados consideravelmente superiores nas instâncias determinísticas ($\Gamma^t = \Gamma^q = 0$) e com Γ^t e/ou Γ^q iguais a 1.

Deste modo, acredita-se que o modelo desenvolvido apresenta resultados compatíveis com a expectativa, solucionando as instâncias estudadas em tempo não muito distantes do melhor modelo encontrado na literatura, tendo, em geral, menores *gaps* quando não se obteve solução ótima no tempo estipulado e uma melhor relaxação linear para todas as instâncias. Embora não tenha superado o modelo baseado em restrições MTZ nas instâncias com maiores Γ, acredita-se que o modelo seja relevante devido à melhor relaxação linear em tempos não muito maiores, uma vez que isto pode tornar o modelo mais apto para a aplicação de métodos *branch-and-cut* especializados, que recorram a desigualdades válidas específicas para problemas de roteamento de veículos.

6. Conclusão

Neste trabalho, abordou-se o Problema de Roteamento de Veículos com Janelas de tempo (PRVJT) considerando variabilidade na demanda e no tempo de viagem. Para isto, primeiramente desenvolveu-se um modelo compacto baseado em fluxo de commodities para o PRVJT determinístico e, em seguida, incorporou-se a incerteza dos parâmetros por meio da otimização robusta, usando-se uma abordagem baseada em equações recursivas.

Experimentos computacionais foram realizados com o modelo proposto, bem como com o melhor modelo compacto para o PRVJT sob incertezas encontrado na literatura, usando instâncias de *benchmark* da literatura. Pôde-se concluir com os resultados que o modelo desenvolvido apresenta resultados similares aos do modelo baseado em restrições MTZ e com relaxação linear mais forte. Deste modo, além da aplicação direta para a resolução de instâncias de pequeno porte, acredita-se que este modelo tenha maior potencial para uso juntamente com métodos *branch-and-cut* especializados.

Assim, como próximos passos, pretende-se realizar experimentos com instâncias maiores, com o intuito de se ter uma maior quantidade de dados para análise, além de se desenvolver um método *branch-and-cut* especializado, que utilize desigualdades válidas específicas para o PRVJT. Outro ponto interessante para investigação é adaptar ambos os modelos compactos abordados para outros conjuntos de incertezas, como o de mochilas [Pessoa et al., 2018]. Por fim, pretende-se adaptar os modelos aqui obtidos para a modelagem de um caso real encontrado no roteamento de aeronaves para o transporte aéreo sob demanda [Campos et al., 2019].

7. Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processos 2019/22235-6, 2016/01860-1; do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Referências

Agra, A., Christiansen, M., Figueiredo, R., Hvattum, L. M., Poss, M., e Requejo, C. (2013). The robust vehicle routing problem with time windows. *Computers & Operations Research*, 40(3): 856 – 866.

Agra, A., Christiansen, M., Figueiredo, R., Magnus Hvattum, L., Poss, M., e Requejo, C. (2012). *Layered Formulation for the Robust Vehicle Routing Problem with Time Windows*, p. 249–260. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg. ISBN 978-3-642-32147-4.

Álvarez, A. e Munari, P. (2017). An exact hybrid method for the vehicle routing problem with time windows and multiple deliverymen. *Computers & Operations Research*, 83:1–12.

Balinski, M. L. e Quandt, R. E. (1964). On an integer program for a delivery problem. *Operations Research*, 12(2):300–304.

Ben-Tal, A. e Nemirovski, A. (1999). Robust solutions of uncertain linear programming. *Operations Research Letters*, 25:1–13.

Bertsimas, D. e Sim, M. (2003). Robust discrete optimization and network flows. *Mathematical Programming*, 98:43–71.

Bertsimas, D. e Sim, M. (2004). The price of robustness. *Operations research*, 52(1):35–53.

Bianchessi, N. e Irnich, S. (2019). Branch-and-cut for the split delivery vehicle routing problem with time windows. *Transportation Science*, 53(2):442–462.

Braaten, S., Gjønnes, O., Hvattum, L. M., e Tirado, G. (2017). Heuristics for the robust vehicle routing problem with time windows. *Expert Systems with Applications*, 77.

Braekers, K., Ramaekers, K., e Van Nieuwenhuyse, I. (2016). The vehicle routing problem: State of the art classification and review. *Computers & Industrial Engineering*, 99:300–313.

Campos, R., Alvarez, A., e Munari, P. (2019). Otimização robusta aplicada ao roteamento de aeronaves no transporte aéreo de passageiros sob demanda. *Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento*, 11(3):139–150.

Dantzig, G. B. e Ramser, J. H. (1959). The truck dispatching problem. *Management science*, 6(1): 80–91.

De La Vega, J., Munari, P., e Morabito, R. (2018). Robust optimization for the vehicle routing problem with multiple deliverymen. *Central European Journal of Operations Research*. ISSN 1613-9178. Online First.

Gavish, B. (1984). The deliverying problem:new cutting planes procedures. In *Apresentado em TIMS XXVI Conference, Compenhagen*.

Gavish, B. e Graves, S. (1978). The traveling salesman problem and related problems.

Gendreau, M., Jabali, O., e Rei, W. (2014). Stochastic vehicle routing problems. In *Vehicle routing: problems, methods, and applications, 2nd edn*, p. 213–239. Society for Industrial and Applied Mathematics.

Gendreau, M., Jabali, O., e Rei, W. (2016). Future research directions in stochastic vehicle routing (50th anniversary invited article). *Transportation Science*, 50(4):1163–1173.

Gounaris, C. E., Wiesemann, W., e Floudas, C. A. (2013). The robust capacitated vehicle routing problem under demand uncertainty. *Operations Research*, 61(3):677–693.

Han, J., Lee, C., e Park, S. (2014). A robust scenario approach for the vehicle routing problem with uncertain travel times. *Transportation Science*, 48:373–390.

Hu, C., Lu, J., Liu, X., e Zhang, G. (2018). Robust vehicle routing problem with hard time windows under demand and travel time uncertainty. *Computers Operations Research*, 94.

Irnich, S., Toth, P., e Vigo, D. (2014). The family of vehicle routing problems. In Toth, P. e Vigo, D., editors, *Vehicle routing: Problems, methods, and applications*, MOS/SIAM Ser Optim, p. 1–33.

Khooban, Z. (2011). Transportation. *Logistics Operations and Management*, p. 109–126.

Lahyani, R., Khemakhem, M., e Semet, F. (2015). Rich vehicle routing problems: From a taxonomy to a definition. *European Journal of Operational Research*, 241(1):1–14.

Langevin, A., Desrochers, M., Desrosiers, J., Gelinas, S., e Soumis, F. (1993). A two-commodity flow formulation for the traveling salesman and the makespan problems with time windows. *Networks*, 23(7):631–640.

Laporte, G., Toth, P., e Vigo, D. (2013). Vehicle routing: historical perspective and recent contributions. *EURO Journal on Transportation and Logistics*, 2(1-2):1–4.

Letchford, A. N. e Salazar-González, J.-J. (2015). Stronger multi-commodity flow formulations of the capacitated vehicle routing problem. *European Journal of Operational Research*, 244(3): 730–738.

Li, Y. e Chung, S. H. (2019). Disaster relief routing under uncertainty: A robust optimization approach. *IISE Transactions*, 51(8):869–886.

Lu, D. e Gzara, F. (2019). The robust vehicle routing problem with time windows: Solution by branch and price and cut. *European Journal of Operational Research*, 275(3):925–938.

Miller, C., Tucker, A., e Zemlin, R. (1960). Integer programming formulation of traveling salesman problems. *Journal of Association for Computing Machinery*, 7(1):326–9.

Munari, P., Moreno, A., De La Vega, J., Alem, D., Gondzio, J., e Morabito, R. (2019). The robust vehicle routing problem with time windows: Compact formulation and branch-price-and-cut method. *Transportation Science*, 53(4):1043–1066.

Ordonez, F. (2010). *Robust Vehicle Routing*, chapter Chapter 7, p. 153–178. URL `http://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/educ.1100.0078`.

Pecin, D., Contardo, C., Desaulniers, G., e Uchoa, E. (2017). New enhancements for the exact solution of the vehicle routing problem with time windows. *INFORMS Journal on Computing*, 29(3):489–502.

Pessoa, A. A., Poss, M., Sadykov, R., e Vanderbeck, F. (2018). Branch-and-cut-and-price for the robust capacitated vehicle routing problem with knapsack uncertainty. Research Report Cadernos do LOGIS 2018-1, Universidade Federal Fluminense. URL `https://hal.inria.fr/hal-01958184`.

Solomon, M. M. (1987). Algorithms for the vehicle routing and scheduling problems with time window constraints. *Operations Research*, 35(2):254–265.

Subramanian, A., Penna, P. H. V., Uchoa, E., e Ochi, L. S. (2012). A hybrid algorithm for the heterogeneous fleet vehicle routing problem. *European Journal of Operational Research*, 221 (2):285–295.

Subramanyam, A., Repoussis, P. P., e Gounaris, C. E. (2020). Robust optimization of a broad class of heterogeneous vehicle routing problems under demand uncertainty. *INFORMS Journal on Computing*, 0(0):null.

Toth, P. e Vigo, D. (2014). *Vehicle Routing: Problems, Methods and Applications*. MOS-SIAM Series in Optimization, Second edition.