LII Simpóso Brasileiro de Pesquisa Operacional
João Pessoa-PB, 3 a 5 de novembro de 2020

Modelo matemático para problemas de programação da produção e dimensionamento de lote monoestágio de produto perecível com demanda determinada e restrições de produção e estoque.

Carlos Eduardo de Morais Ferreira
Universidade Federal de São Paulo
Avenida Cesare Mansueto Giulio Lattes, n° 120 1- Eugênio de Mello, São José dos Campos – SP
cem.ferreira@unifesp.br

Jeferson Auto da Cruz
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Rod. Pres. Dutra, km 145 - s/n - Jardim Diamante, São José dos Campos – SP
jeferson.cruz@ifsp.edu.br

Luiz Leduino de Salles Neto
Universidade Federal de São Paulo
Avenida Cesare Mansueto Giulio Lattes, n° 120 1- Eugênio de Mello, São José dos Campos – SP
luiz.leduino@unifesp.br

Weldon Lodwick
University of Colorado Denver
1201 Larimer St Denver, CO, 80204
weldon.lodwick@ucdenver.edu

RESUMO

Foi desenvolvido um modelo matemático para resolver problemas de dimensionamento de lote e programação de produção em multi-períodos com demanda determinada para um produto perecível, distribuído em uma rede de Centros de Distribuição, considerando restrições de: frequência de produção, *Lead Time*, quantidades mínimas e múltiplas e restrições nas datas para recebimento e venda dos lotes. A intenção do trabalho é estabelecer *tradeoffs* entre objetivos de custos que possibilite determinar o ponto de ressuprimento, tamanho do lote e a obtenção da minimização do custo total sobre o horizonte de decisão. Uma Ilustração baseada em dados de uma grande empresa de laticínios é apresentada para demonstrar a funcionalidade do modelo. Os resultados demonstram que, devido à complexidade dos cenários, o tempo de processamento é elevado, ainda assim, limitando o tempo de processamento em uma hora, foi possível observar a funcionalidade do modelo proposto, tendo-se obtido níveis de serviço da ordem de 98%.

PALAVRAS CHAVE. Dimensionamento de lote, Produto perecível, Programação inteira

PO na Administração e Gestão da Produção, PO na Indústria.

ABSTRACT

A mathematical model was developed to solve problems of lot sizing and production scheduling in multi-periods with determined demand for a perishable product, distributed in a network of Distribution Centers, considering restrictions of: production frequency, Lead Time, minimum quantities and multiple and restrictions on the dates for receiving and selling the lots. The intention of the work is to establish tradeoffs between cost objectives that make it possible to determine the resupply point, the lot size and the achievement of minimizing the total cost over the

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings

decision horizon. An illustration based on data from a large dairy company is presented to demonstrate the functionality of the model. The results demonstrate that, due to the complexity of the scenarios, the processing time is high, even so, limiting the processing time to one hour, it was possible to observe the functionality of the proposed model, having obtained service levels of 98 %.

KEYWORDS. Lot sizing, Perishable product, Integer programming

PO in Administration and Production Management, PO in Industry.

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings

1. Introdução

A competitividade em redes atacadistas, ou varejistas, acarreta em uma constante necessidade de otimização dos processos logísticos. Quando se trata da cadeia de suprimentos de produtos perecíveis com reduzido tempo de prateleira (*shelf life*), os modelos de otimização adotados se tornam ferramentas ainda mais fundamentais na obtenção de melhores resultados e aumento do *market share* em um cenário com elevada concorrência.

Os diversos elementos da Cadeia de Suprimentos (CS) necessitam trabalhar de maneira conjunta, de forma a possibilitar um melhor atendimento aos clientes [Artmann, 2011]. O Gerenciamento da Cadeia de Suprimentos (GCS) cuida dos processos nos diversos níveis do Sistema [Slack, 2009].

Problemas de planejamento e programação da produção estão presentes nos diversos setores produtivos. Apesar de, historicamente, dimensionamento de lotes e sequenciamento da produção terem sido desenvolvidas como áreas separadas, estas apresentam grande correlação [Araujo, 2003]. A combinação destas áreas resultou em diversos modelos de dimensionamento e sequenciamento de lotes [Potts & van Wassenhove, 1992; Drexl & Kimmis, 1997; e Potts & Kovalyov, 2000]. Em linhas gerais, estes modelos possibilitam determinar quando e quanto produzir de uma gama de produtos, ao longo de um horizonte de tempo, de modo a atender uma demanda (certa ou incerta) e otimizar um determinado objetivo (p.e. minimizar custos). A variedade de condições e características apresentadas nos diversos setores produtivos amplificam a necessidade de modelagem dos diversos cenários na busca da otimização e obtenção de desempenho computacional que possibilitem melhores resultados de acordo com os objetivos desejados.

A realização do dimensionamento de lotes passa pela determinação da quantidade de produtos que deverá ser reposta e de quando deverá ocorrer tal reposição (ponto de reabastecimento). O problema abordado neste trabalho trata de uma situação proposta pela proponente Linear Softwares Matemáticos, que atua como uma empresa desenvolvedora de softwares matemáticos e realiza trabalho com grandes indústrias do ramo de laticínios.

Em tal problema, o fabricante deve disponibilizar os produtos acabados nos Centros de Distribuição (CD), que estão localizados em diferentes regiões do Brasil. Atualmente, esta empresa produz em duas fábricas e distribui para 8 centros de distribuição. Cada SKU (produto), que é produzido, é distribuído da fábrica a um determinado CD, estabelecendo uma rota de abastecimento denominada SKU-Arco conforme apresentado na Figura 1.

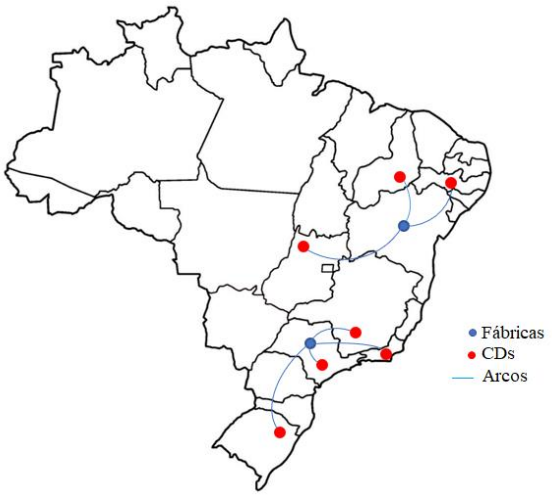


Figura 1- Localização fictícia de fábricas, CDs e SKU-Arcos.
Fonte: [Autores, 2020]

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings

No problema em questão as fábricas produzem produtos com validade entre 40 e 90 dias e com uma determinada frequência de produção. Alguns produtos apresentam um tempo de inspeção de qualidade, fazendo com que diminua o tempo de disponibilidade destes produtos para atendimento das demandas existentes. Cada "SKU-Arco" apresenta um *lead time*, diferente e o abastecimento dos CDs secundários também apresenta outras restrições, como a necessidade do envio de uma quantidade mínima e múltipla nos lotes e restrições dos dias da semana nos quais ocorrem recebimentos e vendas.

O objetivo deste trabalho é propor um modelo matemático para, de acordo com as restrições apresentadas no problema, determinar o ponto de ressuprimento e a quantidade a ser produzida e destinada a cada centro de distribuição para os diferentes SKU-Arco, de forma a atender uma determinada previsão de demanda, minimizando o custo total da operação ao mesmo tempo que diminui os riscos da perda de vendas e falta de estoque. Cabe ressaltar que o modelo apresenta soluções para cada SKU-Arco de maneira individual e não integra a programação da produção na consideração de uma gama de produção de multiprodutos.

2. O problema de dimensionamento de lote

O problema de dimensionamento de lotes se enquadra na área de Planejamento e Controle da Produção (PCP), sendo essa uma das principais responsáveis pelo ganho de eficiência das empresas do ramo de manufatura. O objetivo de PCP passa por planejar a aquisição de matérias-primas e a alocação de recursos, viabilizando o atendimento à demanda dos clientes em um determinado horizonte [Araujo, 2003].

Os problemas de dimensionamento de lotes são classificados em monoestágio, quando produtos apresentam uma única etapa de processamento, ou multiestágio, quando um ou mais produto necessitam de duas ou mais etapas de processamento. Conforme apresentado por Araújo [2003], quando os problemas de dimensionamento de lote monoestágio com vários itens não apresentam restrições sobre as capacidades, o problema pode ser decomposto em N subproblemas, um para cada item a ser produzido.

Os estudos de tais problemas se iniciaram com a formulação do Economic Order Quantity (EOQ) em 1913. Este modelo trabalha como uma expressão analítica no qual leva em consideração um único item sem restrição de capacidade, com demanda estacionária e constante em períodos contínuos e horizonte de tempo infinito [Araujo, 2003].

A partir do EOQ alguns modelos foram desenvolvidos de forma a ajustar às características apresentadas nos problemas presentes nos diferentes setores produtivos. Em 1950 surge o *Economic Lot Scheduling Problem* (ELSP) que trabalha com problemas monoestágio, considerando restrições de capacidade para múltiplos itens. A demanda também é estacionária e os períodos de tempo são contínuos com um horizonte de planejamento infinito. O ELSP é um problema da classe NP-difícil [Gallego e Shaw, 1997].

Posteriormente, a partir da abordagem utilizada por Wagner e Whitin [1958], diversos modelos considerando uma demanda dinâmica (conhecida e podendo variar em cada período em um horizonte de planejamento finito) foram desenvolvidos [Evans, 1985], [Federgruen e Tzur, 1991] e [Wagelmans *et al.*, 1992].

De acordo com Karimi et al. [2003], algumas das características que podem ser abordadas nos problemas de dimensionamento de lotes são: único ou múltiplos itens, horizonte de planejamento finito ou infinito, demanda estática ou dinâmica e produtos que apresentam, ou não, apresentam deterioração. Outas características, considerando restrições de produção e estoque, podem ocasionar variações que necessitem de modelagem específica para as condições reais de operações de empresas ou setores produtivos.

Devido à complexidade dos problemas de dimensionamento de lote, os métodos ótimos conseguem resolver apenas problemas com instâncias pequenas, algo que fez com que fossem

desenvolvidos diversos métodos heurísticos para a resolução de instâncias maiores Barany *et al.* [1984], Eppen e Martin [1987], Hindi [1995].

Em relação aos modelos de gerenciamento de estoque com produtos perecíveis, Fries [1975] adaptou um modelo de dimensionamento de lote para um único item em um múltiplo período a partir do trabalho apresentado por Arrow, Karlin e Scarf [1958] de forma a incluir problemas com produtos com um relativo curto tempo de vida. Pauls-Worm et al [2013] desenvolveu um modelo para programação da produção de um único item perecível com demanda não estacionário e com um determinado tempo de vida, utilizando como ferramenta de gerenciamento de estoque uma política *First In, first Out* (FIFO).

4. Modelo matemático

O modelo matemático foi desenvolvido a partir do objetivo de minimização do custo total, considerando as restrições apresentadas no problema que conta, dentre outras características, com o gerenciamento de estoque de produtos perecíveis.

Para o desenvolvimento do modelo proposto foram adotadas as seguintes premissas:

- O gerenciamento de estoque é realizado por uma política FIFO.
- A demanda é conhecida e variáveis se múltiplos períodos no horizonte de tempo. Ela é dividida, em cada CD, por uma tabela de cortes no qual cada comprador estipula a validade máxima aceita por ele.
- Cada SKU-Arco apresenta um número mínimo e múltiplo no tamanho do Lote.
- O *lead time* é caracterizado como o tempo de transporte entre as fábricas e os centros de distribuição.
- Após a produção o produto é diretamente destinado à cada CD.
- Cada CD têm dias fixos para recebimento e entrega de mercadorias.
- O tempo destinado à realização do controle de qualidade foi considerado como um tempo de produção, diminuindo o tempo disponível para comercialização do item estocado.
- Os itens que, ao chegar ao final do período de comercialização, são descartados tendo seus custos de descarte adicionado ao custo total no horizonte de planejamento.
- Tempo de reação entre o lançamento da ordem de reabastecimento dos CDs e saída dos lotes da fábrica é somado ao *lead time*, pois representa uma limitação do sistema de gerenciamento de ordens.

A formulação matemática , desenvolvida a partir de uma situação problema inspirada em [PAULS-WORM et al 2013], é apresentada a seguir:

$$Min \sum_{t}^{np}\left[\sum_{p}^{nc}\left[h_p \sum_{v}^{M} I_{pvt} + w_p . I_{pMt}\right] + \sum_{f}^{nf}\sum_{p}^{nc}\left[\left(c_f + K_{fp}\right). Q_{fpt}\right]\right] \quad (1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{v}^{M} I_{pvt} = S_{pt} - DC_{pt}. d_{pt} \qquad \forall p, \forall t \quad (2)$$

$$\sum_{f}^{nf} \beta_1 . Q_{fp(t-LT_{fP})} + \sum_{f}^{nf} \beta_2 . Q_{fpt} = S_{pt} - \sum_{v}^{M-1} I_{pv(t-1)} \qquad \forall p, \forall t \quad (3)$$

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings

$$I_{p(M-1)(t-1)} - \alpha_{pv}.DC_{pt}.d_{pt} + \sum_{f}^{nf} \beta_1.Q_{fp(t-LT_{fP})} + X_{p(M-1)t} = I_{pMt} \qquad \forall p, \forall t \quad (4)$$

$$I_{pv(t-1)} - \alpha_{pv}.DC_{pt}.d_{pt} + \sum_{f}^{nf} \beta_1.Q_{fp(t-LT_{fP})} - X_{p(v+1)t} + X_{pvt} = I_{p(v+1)t} \qquad \forall p, \forall t, \forall\, V < M-1 \quad (5)$$

$$\sum_{f}^{nf} \beta_2.Q_{fpt} - X_{p1t} = I_{p1t} \qquad \forall p, \forall t \quad (6)$$

$$M.Y_{pvt} \geq X_{pvt} \qquad \forall\, p, \forall\, V < M, \forall t \quad (7)$$

$$M.\left(1 - Y_{pvt}\right) \geq I_{p(v+1)t} \qquad \forall p, \forall t \quad (8)$$

$$Q_{fpt} = L_{Min}.E1_{fpt} + L_{Mult}.E2_{fpt} \qquad \forall f, \forall p, \forall t \quad (9)$$

$$M.E1_{fpt} \geq E2_{fpt} \qquad \forall\, f, \forall\, p, \forall t \quad (10)$$

$$M.DR_{pt} \geq \sum_{f}^{nf} \beta_1.Q_{fp(t-LT_{fP})} + \sum_{f}^{nf} \beta_2.Q_{fpt} \qquad \forall\, t, \forall\, p \quad (11)$$

$$\sum_{t=k}^{IP} Z_{ft} \leq 1 \qquad \forall\, f, \forall\, t \quad (12)$$

$$E1, Y, Z \in \{0,1\} \quad (13)$$

$$E2 \in \mathbb{Z}^{+} \quad (14)$$

$$I, Q, S, X \geq 0 \quad (15)$$

A função objetivo (1) busca minimizar o custo total de produção, transporte, armazenagem e destruição do produto. A equação (2) garante que a quantidade disponível de produto seja igual ao estoque acrescido da demanda do período. A restrição (3) assegura que a disponibilidade para atendimento à demanda corresponde a quantidade produzida mais a quantidade em estoque. As restrições de (4) a (8) são as restrições FIFO alteradas para o problema estudado. Na restrição (4) todo o estoque e produção com validade m-1 que não for utilizado pela fração da demanda será destruído no próximo período. Na restrição (5) tem-se que todo produto estocado ou produzido, com validade menor do que m-1, poderá ser usado para suprir a demanda residual, a fração da demanda referente à validade v, ou tornar-se estoque no próximo período, envelhecendo um período. A produção da fábrica f, com lead time igual a zero, pode ser utilizada para atender a demanda residual ou ser estocada, conforme a restrição (6). As restrições (7) e (8) garantem que dados CD, validade e período, ou existirá demanda residual ou estoque. As restrições (9) e (10) definem que a produção será no formato de lotes. A restrição (11) assegura que só existirá produção para o CD p se o mesmo puder receber o produto no período seguinte ao lead time. Os dias de produção respeitarem o intervalo de produção é atestado pela desigualdade (12). As restrições (13), (14) e (15) asseguram o formato das variáveis, e suas não-negatividades. A seguir são apresentados as variáveis e os parâmetros do modelo matemático desenvolvido:

Variáveis:
I: Quantidade em estoque no CD p com validade v no período t;
Q: Quantidade produzida na fábrica f para o CD p no período t;
S: Quantidade disponível para atendimento da demanda no CD p no período t;
X: Demanda não suprida no CD p para a validade até v no período t;
Y: Variável que indica existência de demanda residual ou de estoque no CD p com validade v no período t;
Z: Variável que indica se haverá produção na fábrica f no período t;
E1: Variável auxiliar para indicar a produção de Lote Mín. na fábrica f para o CD p no período t;
E2: Variável auxiliar para indicar a produção de Lote Múlt. na fábrica f para o CD p no período t;
Parâmetros:

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings

np: Número de períodos analisado;
nc: Número de CDs;
nf: Número de Fábricas;
m: Validade Máxima do Produto;
h: Custo de Estoque Individual referente ao CD p;
w: Custo de Destruição referente ao CD p;
c: Custo Unitário de Produção referente à Fábrica f;
K: Custo Unitário de Transporte da Fábrica f para o CD p;
DC: Dias de Consumo no CD p;
DR: Dias de Recebimento no CD p;
d: Demanda do CD p no período t;
β_1: Parâmetro que controla a existência de produção quando existe lead time da Fábrica f para o CD p;
β_2: Parâmetro que controla a existência de produção quando não existe lead time da Fábrica f para o CD p;
α: Tabela de Cortes referente ao CD p e à Validade v;
M: Número grande;
L_{Min}: Lote mínimo.
L_{Mult}: Lote múltiplo.

5. Ilustração do modelo implementado

A ferramenta computacional implementada tem por objetivo a otimização do nível de estoque dos Centros de Distribuição. Foi desenvolvida baseada nas características de uma empresa de laticínios, de forma a encontrar a minimização de custos de armazenagem e atendimento das demandas previamente estabelecidas. A Tabela 1 apresenta um exemplo da demanda (em toneladas) para um determina SKU no período de quatro dias. A tabela de cortes, distinta para cada CD, segmenta a demanda do período em demandas menores de acordo com a validade máxima aceita por seus consumidores. Por exemplo, uma demanda de 100 para um CD que possui cortes em 25%, 50% e 75% da validade, nos valores de 15%, 60% e 25% da sua demanda, teria a demanda do período representada por: 15 aceitam, no máximo, produtos com 25% de sua vida útil decorrida; 60 aceitam, no máximo, produtos com 50% de sua vida útil decorrida; e 25 aceitam, no máximo, produtos com 75% de sua vida útil decorrida.

Tabela 1- Exemplo de demanda (em toneladas) para um determinado SKU no período de quatro dias.

	Centro de Distribuição						
Dia	CD1	CD2	CD3	CD4	CD5	CD6	CD7
1	0	0	0	0	0	0	257.256
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0.05832	0.19116	0.52488	0.1134	0.162	0.19116
4	0.09396	0.0648	0.52812	0.63504	209.304	0.02916	0.72252

Fonte: [Autores, 2020]

O modelo foi implementado utilizando o solver CPLEX por meio da ferramenta computacional AMPL. A fim de verificar as possíveis variações de situações apresentadas no problema proposto pela proponente deste trabalho, identificou-se três diferentes cenários que abrangem o fluxo de mercadorias entre as fábricas e os CDs. A seguir são apresentados os cenários que foram rodados como ambiente de teste. Para todos os cenários foi adotado um horizonte de cinco meses de planejamento.

O cenário 1 apresenta os casos nos quais os SKU são produzidos apenas em uma fábrica e distribuído pelos 7 CDs. O cenário 2 apresenta os casos nos quais os produtos são produzidos

apenas em 1 fábrica e distribuído por 4 CDs. A Tabela 2 apresenta algumas das informações de entrada dos cenários 1 e 2. O terceiro cenário consiste na situação problema na qual a fábrica 2 atende as demandas dos CDS 1, 2 , 3 e a fábrica 1 atende as demandas dos CDs 4, 5, 6 e 7. Os resultados foram similares aos obtidos nos cenários 1 e 2 conforme apresentado nas Tabelas 5 e 6.

Tabela 2- Informações disponibilizada para um SKU que foi usado como ambiente de teste do cenário 1.

SKU (1)	Fábrica	CD	Mín (Kg)	Mult (Kg)	SKU (2)	Fábrica	CD	Mín (Kg)	Mult (Kg)
Val (55dias)	1 Freq.Prod. (3dias) Qualidade (3dias)	1	43,2	43,2	Val (65dias)	1 Freq.Prod. (3 dias)	1	57,6	57,6
		2	43,2	43,2			2	921,6	921,6
		3	43,2	43,2			3	691,2	230,4
		4	43,2	43,2		2 Sem produção	-	-	-
		5	43,2	43,2			-	-	-
		6	43,2	43,2			-	-	-
		7	302,4	43,2			-	-	-

Fonte: [Autores, 2020]

Os três cenários foram testados, de acordo com o modelo matemático, na ferramenta computacional AMPL por meio do solver CPLEX. Em virtude da complexidade dos cenários os testes foram realizados relaxando as variáveis binária e inteira relacionadas aos lotes, e a variável Y, que controla a existência de demanda residual ou estoque e limitando o tempo de processamento em 1 hora, obtendo-se assim não o valor ótimo, mas o melhor valor dentro do tempo de processamento adotado. Também foram executados testes com tempo de processamento superiores, mas não foram obtidos ganhos em relação ao tempo adotado. Os resultados para o cenário 1 são apresentados na Tabela 3.

Os resultados apresentados nas primeiras e segundas colunas da Tabela 3 apresentam os dias, indicados pela solução, nos quais ocorrerão produção de acordo com o horizonte de demanda adotado no teste do cenário 1. As demais colunas indicam o ponto de ressuprimento (quantidade, em toneladas, e em quais dias ocorrerão ressuprimento do estoque) dos CD1, CD2, CD3, CD4, CD5, CD6 e CD7. Em virtude da ausência de uma base de dados para comparação dos resultados, foi realizado a análise do comportamento do modelo matemático. Considerando o *lead time* de cada CD e a frequência de produção das fábricas, verifica-se que o modelo matemático forneceu resultados de acordo com os comportamentos esperados. Analisando, por exemplo a Tabela 3, verifica-se que o ressuprimento ocorre respeitando os *lead time* de cada CD, assim a produção que foi realizada no dia 2, segundo os resultados obtidos, irá atender o CD 1 no dia 11, visto que o LT entre a Fábrica e o CD 1 é de 9 dias, da mesma forma a produção do dia 7 irá atender o CD 1 dia 16 (LT= 9 dias), o CD 5 dia 9 (LT=2 dias), o CD 6 dia 9 (LT=2 dias) e o CD 7 dia 9 (LT=2 dias). O mesmo se observa com os resultados do cenário 2 conforme apresentado na Tabela 4.

Tabela 3- Resultados obtidos com o cenário 1 de teste. A tabela informa os dias e as quantidades que serão produzidas e os dias que ocorrerão ressuprimento nos CDs de acordo com os *Lead Times* (LT) entre a fábrica e CDs.

Dias de produção	Qtd (ton)	Res. CD1 (LT 9 dias)	Qtd (ton)	Res. CD2 (LT 6 dias)	Qtd (ton)	Res. CD3 (LT 6 dias)	Qtd (ton)	Res. CD4 (LT 4 dias)	Qtd (ton)	Res. CD5 (LT 2 dias)	Qtd (ton)	Res. CD6 (LT 2 dias)	Qtd (ton)	Res. CD7 (LT 2 dias)	Qtd (ton)
2	0,03	11	0,03	18	0,22	13	0,72	11	0,02	9	0,17	9	0,53	9	0,39
7	2,57	16	0,70	24	2,10	18	0,58	16	1,25	20	0,15	20	0,98	14	1,15
12	3,67	32	0,05	39	0,26	24	0,61	27	0,55	25	0,09	30	1,31	20	1,13
18	5,58	37	0,62	45	0,63	34	0,25	32	0,27	30	0,61	41	0,51	25	1,86
23	2,93	53	0,05	60	0,11	39	0,56	37	1,85	46	0,07	51	1,13	30	2,42
28	6,05	58	0,60	66	0,47	45	0,58	48	0,15	51	0,47	62	0,64	35	0,87
33	4,24	74	0,02	81	0,08	55	0,33	53	0,02	62	0,22	72	0,52	41	0,48
39	2,74	79	0,74	86	1,14	60	0,16	58	1,25	67	0,42	82	0,98	46	1,17
44	1,80	95	0,18	102	0,39	66	1,07	69	0,27	72	0,22	93	1,81	51	1,51
49	4,57	100	0,71	108	0,73	76	0,23	74	0,22	82	0,28	104	0,50	56	2,04
54	3,97	116	0,11	130	0,26	81	0,35	79	2,02	93	0,18	114	0,27	62	0,82
60	3,86	121	0,29	136	0,82	86	0,79	90	0,31	104	0,08	121	0,83	67	0,69
65	1,83	128	0,81	151	0,22	97	0,37	95	0,03	109	0,06	132	0,27	72	0,59
70	3,46	144	0,17	156	1,10	102	0,41	100	0,90	114	0,17	142	1,13	77	109,68
75	112,41	149	0,99			108	0,83	111	0,26	121	0,23	152	0,84	82	2,15
80	5,85	165	0,00			118	0,44	116	0,16	132	0,03	163	0,25	88	1,09
86	2,19					125	0,06	123	0,20	137	0,12			93	1,34
91	5,12					130	0,17	128	0,40	142	0,21			98	106,85
96	109,09					136	1,32	139	0,37	152	0,08			104	0,31
102	3,34					146	0,37	144	0,10	158	0,07			109	5,04
107	5,77					151	0,09	149	0,84	163	0,04			114	117,83
112	120,00					156	1,03	160	0,26					121	1,51
119	4,27													126	0,94
124	2,33													132	0,46
130	3,17													137	0,98
135	1,79													142	109,41
140	112,82													147	1,06
145	2,32													152	1,51
150	4,84													158	1,56
156	2,35													163	1,22
161	2,32														

Fonte: [Autores, 2020]

Tabela 4- Resultados obtidos com o cenário 2 para o planejamento dos primeiros 23 dias no horizonte de cinco meses. A tabela informa os dias e as quantidades que serão produzidas e os dias que ocorrerão ressuprimento nos CDs de acordo com os *Lead Times* (LT) entre a fábrica e os CDs.

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings

Dias de produção	Qtd (ton)	Res. CD1 (LT 4 dias)	Qtd (ton)	Res. CD2 (LT 3 dias)	Qtd (ton)	Res. CD3 (LT 4 dias)	Qtd (ton)
1	0,098	9	0,905	4	0,098	9	1,661
5	2,566	18	1,037	12	1,399	13	0,391
9	2,614	23	0,797	17	56,191	18	2,429
14	59,911	32	0,547	26	11,666	23	40,200
19	40,997	37	0,809	31	48,082	32	63,649
23	15,695	46	1,159	40	42,098	37	12,650

Fonte: [Autores, 2020]

Tabela 5- Resultados obtidos com o cenário 3 corresponde a Fábrica 2 que alimenta os CDs 1, 2 e 3 para o planejamento dos primeiros 28 dias no horizonte de cinco meses. A tabela informa os dias e as quantidades que serão produzidas e os dias que ocorrerão ressuprimento nos CDs de acordo com os *Lead Times* (LT) entre a fábrica e CDs.

Dias de produção	Qtd (ton)	Res. CD1 (LT 4 dias)	Qtd (ton)	Res. CD2 (LT 3 dias)	Qtd (ton)	Res. CD3 (LT 4 dias)	Qtd (ton)
2	0,191	11	0,446	10	1,150	6	0,191
7	2,549	25	0,244	16	1,607	11	0,761
13	3,500	32	0,305	24	1,017	17	1,893
21	2,266	39	0,336	31	1,170	25	0,828
28	2,711	53	0,302	38	0,632	32	1,053

Fonte: [Autores, 2020]

Tabela 6- Resultados obtidos com o cenário 3 corresponde a Fábrica 1 que alimenta os CDs 4, 5, 6 e 7 para o planejamento dos primeiros 28 dias no horizonte de cinco meses. A tabela informa os dias e as quantidades que serão produzidas e os dias que ocorrerão ressuprimento nos CDs de acordo com os *Lead Times* (LT) entre a fábrica e CDs.

Dias de produção	Qtd (ton)	Res. CD4 (LT 4 dias)	Qtd (ton)	Res. CD5 (LT 2 dias)	Qtd (ton)	Res. CD6 (LT 2 dias)	Qtd (ton)	Res. CD7 (LT 2 dias)	Qtd (ton)
1	444,063	5	146,717	3	209,417	3	1,254	3	86,674
5	530,000	9	78,058	16	166,893	12	0,677	7	451,942
10	530,000	18	348,620	26	0,188	16	0,060	12	331,944
14	530,000	23	160,636	30	1,776	26	1,672	16	12,933
19	530,000	32	265,984	39	135,092	30	0,250	21	231,988
24	530,000	37	170,247	44	23,937	44	1,595	26	318,444
28	530,000	46	191,216	48	154,448	48	0,187	30	118,234

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings

Fonte: [Autores, 2020]

Analisando os resultados de I (Quantidade em estoque para CD com determinada validade em um determinado dia) pode-se observar o comportamento de envelhecimento do estoque. A Tabela 7 apresenta um exemplo do comportamento de envelhecimento de acordo com as restrições do problema tratado. O cenário apresentado corresponde ao CD 2 do cenário 2. Analisando a Tabela 4 observamos que o produto é produzido no dia 1 e enviado ao CD 2, o LD do CD principal para o CD 2 é de 4 dias, assim ao chegar no CD 2, o produto já apresenta 4 dias de vida conforme apresentado na tabela 7. O produto fica então estocado até ser enviado aos clientes nos dias 09 e 10.

Tabela 7- Exemplo de envelhecimento de produto em estoque com o decorrer dos dias (cenário 3 CD2)

Dia	Vida1	Vida2	Vida3	Vida4	Vida5	Vida6	Vida7	Vida8	Vida9	Vida10	Vida11
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0,094	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0,094	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0,094	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0,094	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0,094	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0,094	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,055	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Fonte: [Autores, 2020]

Alguns pedidos não foram atendidos de acordo com os testes rodados limitados à uma hora de processamento, ainda assim para todos os cenários e todos os CDs os níveis de serviços obtidos foram superiores à 98%.

6. Conclusões

O modelo matemático apresentado propõe a otimização de níveis de estoque de uma empresa de laticínios compreendendo características de produção e estoque. Trata-se de um problema no qual é necessário definir quando e em qual quantidade deverão ocorrer as reposições de estoque de cada SKU nos CDs da empresa fabricante, considerando diversos aspectos como: custos de estocagem, custos de transporte, custos de descarte, custos de produção, frequência de produção, quantidade mínima e múltipla na qual deverão ocorrer as reposições, descarte do produto ao final do tempo de vida do mesmo, e datas específicas para os CDs realizarem recebimentos e vendas.

O modelo desenvolvido apresentou elevado nível de complexidade tendo sido estruturado de forma a envelhecer os produtos de acordo com seus prazos de validade, considerando o corte de datas previstas de acordo com a exigências dos clientes, abrangendo a produção em lotes, descartando produtos vencidos e calculando o nível de estoque desejado. Dada a integridade de parte das variáveis, o cálculo de uma solução ótima tornou-se uma tarefa de elevado custo computacional.

Os experimentos com os três cenários foram conduzidos utilizando a ferramenta CPLEX com 1 hora de execução, relaxando as variáveis binária e inteira relacionadas aos lotes, e a variável

Y, que controla a existência de demanda residual ou estoque, dados período, validade e CD. Ainda assim foram obtidos níveis de serviço da ordem de 98%, demonstrando que o modelo implementado pode ser útil a realização do planejamento da produção de acordo com as características apresentadas.

Os resultados obtidos nos testes realizados demonstraram que o modelo matemático é capaz de sugerir soluções condizentes com as características apresentadas para cada SKU-Arco analisado, mesmo para instâncias com grandes quantidades de dados, como as utilizadas nos cenários testados. Por meio dos diferentes parâmetros presentes, o modelo matemático implementado também permite a criação de cenários alternativos de simulação, possibilitando a utilização da ferramenta no apoio à tomada de decisões.

Existe ainda uma vasta gama de possíveis testes que podem ser realizados por meio da utilização dos parâmetros apresentados no modelo. Tais simulações possibilitaria a criação e análise de novos cenários e, possivelmente, a descoberta de importantes características envolvidas nos diferentes sistemas de estocagem de empresas de produtos perecíveis.

Agradecimentos

Os autores agradecem a empresa proponente Linear Softwares Matemáticos, que além da apresentação da situação problema, também forneceu suporte na compreensão de questões surgidas ao longo do trabalho. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências

ARAUJO, S. A. Modelos e métodos para o planejamento e programação da produção aplicados no setor de fundições. 2003. 143 f. 2003. Tese de Doutorado. Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos.

Arrow K., Karlin S. e Scarf H. (1958), Studies in the mathematical theory of inventory and production. Stanford University Press, Standford, California.

Artmann, F. G. (2011), Otimização de níveis de estoque de uma rede varejista através do uso de modelos previsores, simulação discreta determinística e metaheurísticas. Dissertação de mestrado em Computação Aplicada, Universidade do Vale do Rio dos Sinos, Porto Alegre.

Barany, I., van Roy, T. J. e Wolsey, L. A. (1984), Strong Formulation for Multi-Item Capacitated Lotsizing, Management Science, v. 30, p. 1255-1261.

Drexl, A. e Kimms, A. (1997), Lot Sizing and Scheduling - Survey and Extentions, European Journal of Operational Research, v. 99, p. 221-235.

Eppen, G. D. e Martin, R. K. (1987). Solving Multi-Item Capacitated Lotsizing Problems Using Variable Redefinition. Operations Research, v. 35, p. 832-848.

Evans, J. R. (1985). An Efficient Implementation of the Wagner-Whitin Algorithm for Dynamic Lot-Sizing. Journal of Operational Management, v. 5, n. 2, p. 229-235.

Federgruen, A. e Tzur, M. (1991), A Simple Forward Algorithm to Solve General Dynamic Lot Sizing Models with n Periods in O(n log n) or O(n) Time, Management Science, v.37, p. 909-925.

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings

Fries, B.E., 1975. Optimal Ordering Policy for a Perishable Commodity with Fixed Lifetime. Operations Research 23, 46-61.

Gallego, G.; Shaw, D. X. (1997) Complexity of the ELSP with general cyclic schedules. IIE transactions, v. 29, n. 2, p. 109-113.

Hindi, K. S. (1995). Computationally Efficient Solution of the Multi-Item, Capacitated LotSizing Problem. Computers and Industrial Engineering, v. 28, p. 709-719.

Karimi, B. et al (2003). The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms Omega, 31(5), 365 – 378.

Pauls-Worm, K. G., Hendrix, E. M. T., Haijema, R., & van der Vorst, J. G. A. J. (2013). Inventory control for a perishable product with non-stationary demand and service level constraints. Group Operations Research and Logistics, Wageningen University.

Potts, C. N. e van Wassenhove, L. N. (1992), Integrating Scheduling with Batching and LotSizing: A Review of Algorithms and Complexity, Journal of Operational Research Society, v. 43, n. 5, p. 395-406.

Potts, C. N. e Kovalyov, M. Y. (2000). Scheduling with Batching: a review. European Journal of Operational Research, v. 120, p. 228-249.

SLACK, N. et al. (2009) Administração da produção. São Paulo: Atlas.

Wagner, H. M. e Whitin, T. M. (1958), Dynamic Version of the Economic Lot Size Model Management Science, v.5, n.1, p. 89-96.

Wagelmans, A.,et al (1992), Economic Lot Sizing: an O(n log n) Algorithm that Runs in Linear Time in the Wagner-Whitin Case, Operations Research, v. 40.