LII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional
João Pessoa - PB, 3 a 5 de novembro de 2020

UMA NOVA FORMULAÇÃO MATEMÁTICA PARA O PROBLEMA DAS P-MEDIANAS COM PREFERÊNCIAS

Fabrício Lacerda Biajoli
Universidade Federal de São Paulo, São José dos Campos - SP, Brasil
Av. Cesare Mansueto Giulio Lattes 1201 - Eugênio de Mello, CEP: 12247-014
fabricio.biajoli@gmail.com

Antônio Augusto Chaves
Universidade Federal de São Paulo, São José dos Campos - SP, Brasil
Av. Cesare Mansueto Giulio Lattes 1201 - Eugênio de Mello, CEP: 12247-014
antonio.chaves@unifesp.br

Luiz Antonio Nogueira Lorena
Universidade Federal de São Paulo, São José dos Campos - SP, Brasil
Av. Cesare Mansueto Giulio Lattes 1201 - Eugênio de Mello, CEP: 12247-014
luizlorena54@gmail.com

RESUMO

Este trabalho propõe uma nova formulação matemática para o problema das p-Medianas com preferências. Nessa variação do problema clássico das p-medianas é assumido que os consumidores são livres para escolher as facilidades que os atenderão, definindo uma ordem de preferência para elas. No modelo proposto, o tratamento das preferências é realizado a partir da aplicação de técnicas de Agregação de *Ranking*, cujo objetivo é atender as preferências dos consumidores de forma consensual, sendo esta abordagem ainda não explorada pela literatura. Além disso, um parâmetro de balanceamento também foi utilizado, permitindo ao modelo tratar os objetivos de custos e preferências com diferentes pesos. Experimentos computacionais foram realizados em um conjunto de instâncias de testes e os resultados apresentados para demonstrar o funcionamento do modelo proposto.

PALAVRAS CHAVE. Problema das p-Medianas, Preferências, Agregação de *Ranking*.

OC - Otimização Combinatória

ABSTRACT

This paper presents a new mathematical formulation for the p-medians problem with customers preferences. This variant of the classic p-medians problem is based on the assumption that customers are free to choose the facility that will serve them, by defining preferences towards the facilities. The formulation proposed uses Ranking Aggregation techniques to work with preferences in a consensual way and, as far as we know, this approach has never been reported in the literature. Besides that, the new approach uses a balancing parameter, thus allowing the model to work with different weight for cost and preferences. The computational experiments were performed using a set of test instances and the results presented to demonstrate the behavior of the proposed model.

KEYWORDS. p-Medians problem, Preferences, Ranking Aggregation.

CO - Combinatorial Optimization

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings

1. Introdução

Problemas relacionados ao planejamento estratégico da distribuição de produtos e prestação de serviços vem recebendo cada vez mais atenção de empresas do setor público e privado nos últimos anos. Isso se deve ao fato da análise da localização de entidades fornecedoras e centros de distribuição ser um dos desafios mais importantes, uma vez que ele lida com a definição dos melhores locais para as instalações com algum outro objetivo operacional atrelado. Na perspectiva do setor privado, por exemplo, o objetivo muitas vezes estará relacionado com a minimização dos custos de transporte. No setor público, por outro lado, uma das vertentes poderia ser maximizar a acessibilidade da população a hospitais, escolas, parques, etc. As decisões relacionadas com a instalação de facilidades visando o atendimento das demandas de um conjunto de consumidores são tratadas pela classe de problemas conhecida como Problemas de Localização de Facilidades (FLP, do inglês *Facility Location Problem*) [Drezner, 1995; Daskin, 1995].

Entre os problemas desta classe, o problema das p-Medianas é um dos mais estudados, pois ele pode ser utilizado na modelagem de uma grande quantidade de aplicações ([Eiselt e Marianov, 2011]). Diversas pesquisas tem sido publicadas com o objetivo de sumarizar e apresentar as diferenças entre as contribuições acerca deste problema (como por exemplo, [Farahani et al., 2012; Francis et al., 2009; Marianov e Serra, 2002; Mirchandani, 1990; ReVelle e Swain, 1970; Tansel et al., 1983]). Embora seja muito estudado, resolver o problema das p-Medianas não é uma tarefa simples, uma vez que este pertence a classe de problemas *NP-hard* ([Kariv e Hakimi, 1979]). Desta forma, métodos exatos e heurísticos eficientes tem sido desenvolvidos, como pode ser visto em [Reese, 2006] e [Mladenović et al., 2007].

Neste trabalho pretendemos contribuir com os estudos dos problemas de localização, principalmente o problema das p-Medianas. No entanto, será abordada uma vertente diferente em relação aos problemas clássicos, que consideram em sua formulação a alocação dos consumidores às facilidades mais próximas. Apesar da informação de distância ser um fator importante a ser considerado, em vários cenários práticos a preferência dos consumidores também deve ser considerada ao determinar a localização das facilidades. Em outras palavras, cada consumidor estabelece uma ordem de prioridade para as facilidades, baseando-se em seus próprios critérios.

Várias abordagens tem sido empregadas no tratamento de preferências dos consumidores em problemas de localização. Heurísticas foram empregadas com sucesso, como por exemplo em [Casas-Ramírez e Camacho-Vallejo, 2017], [Marić et al., 2015], [Camacho-Vallejo et al., 2014] e [Marić et al., 2012]. Entre as abordagens exatas, algumas tratam as preferências como restrições adicionais, sendo o trabalho de [Hanjoul e Peeters, 1987] o primeiro a utilizar essa estratégia. Mais tarde, [Cánovas et al., 2007] também propuseram novas restrições para as preferências. Em ambos os trabalhos, um modelo *single-level* (de nível único) foi proposto para resolver problemas específicos, adicionando as restrições e variáveis necessárias para o tratamento das preferências. Outra forma utilizada para abordar as preferências é a formulação dos problemas em modelos *bilevel* (binível). Em [Anandalingam e Friesz, 1992] é apresentada uma explicação bem detalhada sobre esse tipo de abordagem.

A proposta deste trabalho é apresentar uma nova formulação matemática *single-level* para o problema das p-Medianas com preferências. Uma nova abordagem para o tratamento das preferências será apresentada, através do uso de uma técnica conhecida como *Agregação de Ranking* (do inglês, *Ranking Aggregation*). A ideia desta técnica é combinar preferências diferentes e independentes de um mesmo conjunto de alternativas e agentes (quem ordena as alternativas) em um único conjunto de *rankings*. Como resultado, entende-se que este conjunto representa a opinião coletiva dos agentes que definiram as preferências, ou seja, um consenso. Pretende-se demonstrar que ao

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings

utilizar essa técnica é possível definir um conjunto de restrições que poderão ser empregadas em diversos problemas de localização de facilidades com preferências, de forma unificada e flexível.

Este artigo está organizada em cinco seções, sendo esta primeira a introdução. Na Seção 2 é definido o problema clássico das p-Medianas, seguido pela definição do problema das p-Medianas com Preferências na Seção 3. Na Seção 4 são apresentados os resultados computacionais e, por fim, as conclusões e propostas de trabalhos futuros são apresentadas na Seção 5.

2. Problema das p-Medianas

O problema das p-Medianas (não capacitadas) pode ser modelado como um problema de programação inteira $0-1$. Sem perda de generalidade, as medianas são escolhidas do conjunto de vértices ou pontos disponíveis. Uma das formulações mais utilizadas é a proposta em [ReVelle e Swain, 1970]. Para descrever o problema, considere $N = \{1, \ldots, n\}$, onde n é o número de vértices. Considere também x_{ij} uma variável binária que indica se o vértice i é atendido pelo centro j, com a seguinte condição:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o vértice é atendido pelo centro j,} \quad \text{i}\neq\text{j;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Por fim, considere y_i outra variável binária, que indica que o vértice i foi selecionado como um centro:

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{se o vértice } i \text{ é um centro;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Os parâmetros de entrada para o problema são: p o número de centros (medianas) a serem localizadas; e c_{ij} o custo (por exemplo, a distância) do vértice i para a mediana j.

Assim sendo, o modelo matemático proposto por [ReVelle e Swain, 1970] para o problema é apresentado:

$$Minimizar \quad \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

Sujeito a:

$$\sum_{i \in N} x_{ij} = 1, \qquad \forall j \in N \tag{2}$$

$$x_{ij} \leq y_i, \qquad \forall i \in N, \qquad \forall j \in N \tag{3}$$

$$\sum_{i \in N} y_i = p \tag{4}$$

$$y_i \in \{0, 1\}, \qquad \forall i \in N \tag{5}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \qquad \forall i \in N, \qquad \forall j \in N \tag{6}$$

A função objetivo (1) minimiza o custo total entre os vértices e as medianas. As restrições (2) e (3) garantem que cada vértice i será alocado a apenas um centro j, sendo este último a mediana. A restrição (4) define o número de medianas a serem localizadas e as restrições (5) e (6) impõe valores binários para as variáveis y_i e x_{ij}, respectivamente.

3. Modelagem para o Problema das p-Medianas com Preferências

A nova modelagem proposta para o problema das p-Medianas com Preferências altera o modelo clássico apresentado na Seção 2 a partir da inclusão de novas restrições. Para montagem dessas restrições a técnica Agregação de *Ranking* é utilizada, com o objetivo de se tratar as preferências de forma consensual. Nas próximas seções é explicada em detalhes a utilização dessa técnica.

3.1. Agregação de *Ranking*

Agregação de *Ranking* é um problema clássico da teoria de votos e escolhas sociais e vem sendo aplicada em várias pesquisas, nas mais diversas áreas ([Korba et al., 2017]), desde seus primeiros estudos no século XVIII ([Borda, 1781] e [Condorcet, 1785]). A teoria das escolhas sociais estuda como as preferências individuais se agregam para formar uma preferência coletiva. Logo, pode-se descrever resumidamente o problema de agregação de *rankings* como a combinação de uma coleção de *rankings* para um conjunto de candidatos, sumarizando essa coleção em um único *ranking* consensual.

Para os problemas de localização os candidatos são as facilidades e os *rankings* dessas facilidades estão relacionados a alguma ordenação realizada em função dos critérios dos consumidores. Para demonstrar essa associação, considere os valores apresentados na Tabela 1, contendo sete facilidades ($f1 \dots f7$) e quatro consumidores ($c1 \dots c4$). Os valores em negrito nas linhas representam as facilidades, sendo os valores das colunas as preferências associadas pelos consumidores a cada uma das facilidades. Por exemplo, para o consumidor $c1$ a facilidade $f5$ é a prioritária (prioridade 1), enquanto a facilidade $f7$ foi a última a ser priorizada (prioridade 7).

Tabela 1: Tabela com exemplo de preferências dos consumidores para as facilidades

	c1	***c2***	***c3***	***c4***
f1	6	1	3	4
f2	3	3	6	6
f3	5	7	2	7
f4	4	5	5	5
f5	1	2	1	1
f6	2	4	4	3
f7	7	6	7	2

A partir da tabela de preferências, podemos extrair uma permutação para cada consumidor: $(6, 3, 5, 4, 1, 2, 7)$, $(1, 3, 7, 5, 2, 4, 6)$, $(3, 6, 2, 5, 1, 4, 7)$ e $(4, 6, 7, 5, 1, 3, 2)$. A ideia é encontrar a permutação mediana dessas permutações, obtendo uma matriz de preferências medianas, neste trabalho chamada de matriz de preferências p:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 3/4 & 1/2 & 3/4 & 1/4 & 1/2 & 3/4 \\ 1/4 & 1 & 3/4 & 1/2 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 & 1 & 0 & 0 & 3/4 \\ 3/4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 3/4 & 3/4 & 1 & 0 & 1 & 3/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

A matriz p é uma matriz quadrada, cujas dimensões são iguais ao número de vértices ($n \times n$), que demonstra quantas vezes uma facilidade foi priorizada em relação às outras. Por exemplo, o valor de $p[1][2] = 3/4$, pois a facilidade $f1$ foi priorizada em relação a $f2$ em três das quatro permutações dos consumidores ($c2$, $c3$ e $c4$). Logo, podemos concluir que $p[2][1] = 1/4$, pois foi priorizada em relação às outras apenas pelo consumidor $c1$. Neste trabalho, a matriz p é utilizada na aplicação de uma técnica de agregação conhecida como Contagem de Borda.

O método de Contagem de Borda, também conhecido como Método de Borda, foi proposto por [Borda, 1781] para processos eleitorais. Segundo o autor, eleições definidas por voto

representam o real desejo dos eleitores apenas quando é disputada por apenas dois candidatos. Em todos os outros casos, a simples contagem de votos para eleger o mais votado pode resultar em um erro na representação da vontade dos eleitores. Neste contexto, o Método de Borda visa a eleição de candidatos que sejam amplamente aceitáveis, não levando em consideração apenas a primeira escolha de cada eleitor. Para isso, ele sugere que os eleitores ordenem os candidatos de acordo com sua preferência, sendo atribuído uma pontuação a cada posição. No final da apuração, o candidato com mais pontos é o vencedor. Por isso, frequentemente o método é descrito como um sistema de votação por consenso e não por contagem simples, pois nem sempre o candidato colocado em primeiro lugar mais vezes pelos eleitores é o vencedor.

A aplicação do Método de Borda consiste em ordenar os candidatos em ordem decrescente de pontuação, o que é equivalente a somar as linhas da matriz de preferências p e ordenar a permutação resultante em ordem decrescente. Cada linha, portanto, terá um valor de *borda*, que representa a priorização média de uma facilidade em relação a todas as outras. Por exemplo, para a linha $p[1]$ temos $1 + 3/4 + 1/2 + 3/4 + 1/4 + 1/2 + 3/4 = 9/2$ e para $p[5]$ temos $3/4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 27/4$, logo podemos concluir que a facilidade $f5$ foi priorizada mais vezes que a $f1$ (quanto maior o valor, melhor foi a priorização).

Por simplicidade, se fosse aplicado o Método de Borda ao problema das p-Medianas com preferências, poderíamos dizer que os vértices com maior valor de *borda* poderiam ser escolhidos como medianas se o objetivo do problema fosse apenas relacionado com as preferências. No entanto, existe o custo de alocação de um vértice às medianas e a própria alocação em si. Portanto, foi necessária uma solução diferente, que permitisse que o modelo proposto considerasse as preferências e custos na definição das medianas.

A informação de borda foi então utilizada como base para a montagem de uma segunda matriz, chamada de matriz r, que foi utilizada nas novas restrições propostas para o modelo matemático das p-Medianas com preferências. A matriz r é utilizada para relacionar duas facilidades, considerando a priorização das duas em conjunto. Cada posição da matriz é preenchida com a soma do valor de *borda* dos pares de facilidades, ou seja, cada uma das posições seria preenchida da seguinte forma:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a posição está na diagonal da matriz(i = j);} \\ \sum\limits_{k \in N} p[i][k] + p[j][k], & \text{caso contrário(i}\neq\text{j).} \end{cases}$$

Como resultado, tem-se uma matriz simétrica que permitirá ao modelo considerar pares de vértices em conjunto, sem priorização entre eles, pois $r_{ij} = r_{ji}$ para todos os pares.

3.2. Modelagem Matemática

O modelo matemático para o problema das p-Medianas com Preferências foi construído a partir da inclusão de novas restrições e da alteração da função objetivo. Novas variáveis e parâmetros de entrada foram definidos, conforme apresentado abaixo:

- O parâmetro r_{ij} contendo a priorização média dos vértices i e j, conforme definição da matriz r (Seção 3.1);
- O parâmetro $\alpha \in [0, 1]$, usado na função objetivo para balanceamento entre custos e preferências;
- A variável $u \in \mathbb{R}$, utilizada pelo modelo para relacionar a seleção de centros com as preferências.

Assim sendo, o modelo matemático proposto para o problema é apresentado a seguir:

$$Minimizar \quad (1-\alpha)\sum_{i\in N}\sum_{j\in N} c_{ij}x_{ij} + \alpha u \tag{7}$$

Sujeito a:

$$\sum_{i\in N}\sum_{j\in N} |r_{ij}-1|(y_i+y_j-1) \leq u \tag{8}$$

$$\sum_{i\in N} x_{ij} = 1, \qquad \forall j \in N \tag{9}$$

$$x_{ij} \leq y_i, \qquad \forall i \in N, \qquad \forall j \in N \tag{10}$$

$$\sum_{i\in N} y_i = p \tag{11}$$

$$y_i \in \{0,1\}, \qquad \forall i \in N \tag{12}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad \forall i \in N, \qquad \forall j \in N \tag{13}$$

$$u \in \mathbb{R} \tag{14}$$

No modelo proposto, a função objetivo (7) minimiza o custo total entre as medianas e os vértices alocados somado aos valores atribuídos à variável auxiliar u, utilizando o parâmetro α no balanceamento entre estes dois componentes.

A variável u é determinada pela restrição (8), fazendo com que a seleção das medianas seja influenciada pelos valores das preferências, que são representados pelo parâmetro r_{ij}. A componente $(y_i + y_j - 1)$ assume valor 1 somente quando os vértices i e j forem medianas e, neste caso, manterá o valor de r_{ij} na equação. Considerando a restrição completa temos que, quanto maior o valor de r_{ij}, maior será a probabilidade dos vértices i e j serem selecionados como medianas, pois o lado esquerdo da restrição será menor, consequentemente o valor da variável u também, favorecendo a função objetivo de minimização.

As demais restrições seguem o definido no modelo clássico: (9) e (10) garantem que cada vértice i será alocado a apenas um centro j, (11) define o número de medianas a serem localizadas e as restrições (12) e (13) impõe valores binários para as variáveis y_i e x_{ij}, respectivamente. Por fim, a restrição (14) define o conjunto de números reais para a variável u.

4. Experimentos Computacionais

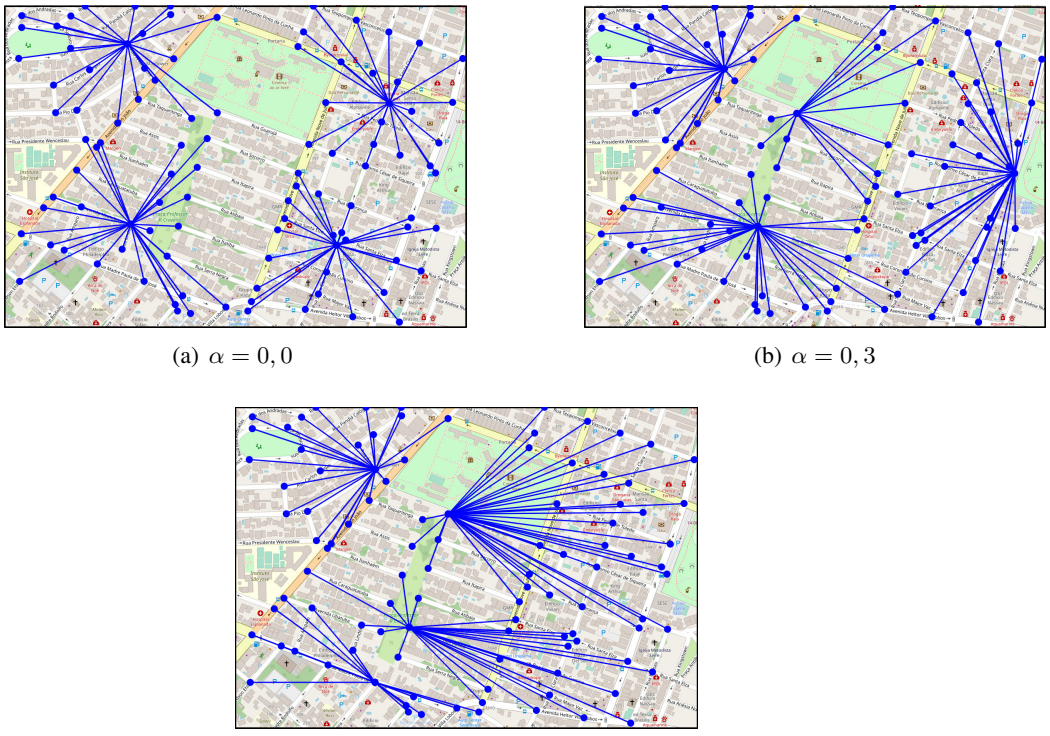
Os experimentos computacionais foram realizados em um computador com processador Intel i7 3.6GHz, 32GB de memória RAM em um ambiente com Windows 10, utilizando o *solver* CPLEX 12.8 com a configuração padrão. Para a validação do funcionamento do modelo foi gerada uma instância contendo 102 pontos geográficos da cidade de São José dos Campos-SP, para os quais foram calculadas as distâncias Euclidianas para serem utilizadas como custo de alocação. Também foi gerado um conjunto de instâncias baseado no conjunto proposto por [Lorena et al., 2001] para o problema clássico das p-Medianas contendo 324 vértices[1], com seleção de 5 medianas. Em todas as instâncias foram adicionadas as informações de preferências utilizando o pacote PerMallows ([Irurozki et al., 2016]) do software estatístico R. Este pacote implementa o Modelo de Mallows ([Mallows, 1957]), que é muito utilizado para distribuições de dados de *ranking*. Cada instância foi complementada com as preferências a partir das seguintes operações: 1) foi gerada uma permutação

[1] Instâncias do problema clássico disponíveis em *http://www.lac.inpe.br/~lorena/instancias.html*

inicial (aleatória) com as preferências de um consumidor para cada facilidade; e 2) foi executado o método *rmm*[2] do pacote PerMallows para geração das permutações de preferências dos demais consumidores, com base na primeira permutação e seguindo a distribuição do Modelo de Mallows.

O principal objetivo dos experimentos foi demonstrar o funcionamento da nova abordagem utilizando a teoria de Agregação de *Ranking*. Dessa forma, os dois objetivos do problema foram analisados isoladamente, sendo seu comportamento comparado para diferentes soluções intermediárias, obtidas pela variação do valor do parâmetro α utilizado na função objetivo (vide equação 7). A variação deste parâmetro foi realizada dentro do intervalo $0 \leq \alpha < 1$, permitindo a solução do problema com base apenas na medição de custo ($\alpha = 0$) e com base em ambos os objetivos ($0 < \alpha < 1$). Soluções para $\alpha = 1$ também são possíveis pelo modelo, que consideraria apenas as preferências na solução. No entanto, as alocações dos pontos às medianas seriam realizadas de forma aleatória em relação aos custos, podendo gerar medianas abertas mas sem pontos associados.

Nos testes realizados com parâmetro $\alpha = 0$ o comportamento do modelo foi idêntico ao do modelo clássico, apresentando a mesma solução. Esse era o resultado esperado, pois tanto as restrições, quanto a parcela da função objetivo relacionada às preferências, não interferem na seleção das medianas e, consequentemente, na alocação dos vértices a elas. A Figura 1(a) apresenta o resultado da execução do modelo na instância com 102 vértices com o parâmetro $\alpha = 0$, ou seja, a solução do problema clássico das p-Medianas.



(a) $\alpha = 0,0$ (b) $\alpha = 0,3$

(c) $\alpha = 0,5$

Figura 1: Soluções para o problema com 102 pontos e 4 medianas, considerando diferentes valores de α

A Figura 1(b) apresenta as medianas e alocações para um valor intermediário do parâmetro α. Nesta imagem é possível identificar que as medianas foram diferentes das encontradas pelo

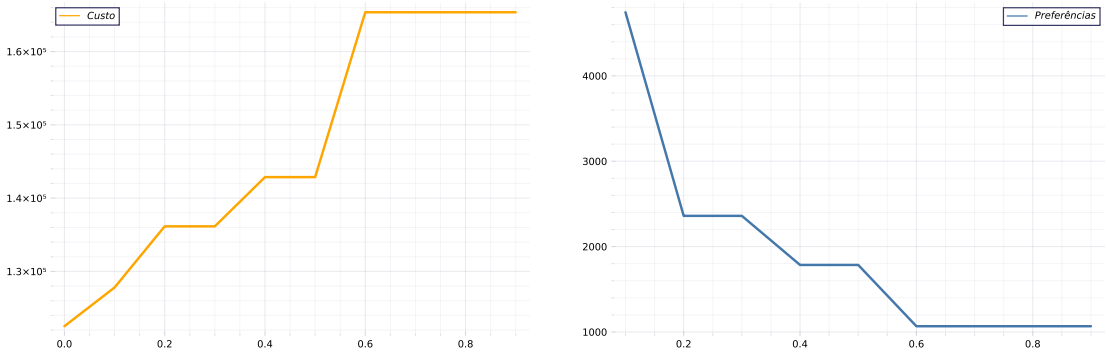
[2]Exemplo do comando *rmm* para 324 vértices: *rmm(324, permutacaoInicial, 1, "kendall", "multistage")*

modelo clássico, o que demonstra que as preferências já representam uma interferência na seleção das medianas. Para $\alpha = 0,5$, a solução prioriza as preferências dos clientes, resultando em medianas e alocações bem diferentes, conforme apresentado na Figura 1(c) . Este último valor de α foi definido após análise das medianas selecionadas e dos valores de borda, sendo as medianas selecionadas as que possuem os maiores valores de borda entre todos os vértices. Portanto, podemos concluir que para $\alpha \geq 0,5$ o modelo já seleciona as melhoras medianas para a instância com 102 vértices segundo o método de Contagem de Borda.

O balanceamento de objetivos a partir do parâmetro α traz flexibilidade ao modelo, permitindo que os tomadores de decisão priorizarem custos ou preferências de acordo com sua necessidade. No entanto, a diferença entre os valores de custos e preferências pode ser muito grande, o que pode dificultar a utilização deste parâmetro. A solução para essa questão foi a normalização dos dados de entrada, permitindo a solução de ambos os objetivos dentro de uma mesma escala de valores. Portanto, em todas as instâncias utilizadas nos testes os dados de custo e preferências (matriz r com valores de borda) foram normalizados utilizando a seguinte fórmula:

$$Valor_{normalizado} = \frac{Valor - Valor_{min}}{Valor_{max} - Valor_{min}} \tag{15}$$

Os gráficos da Figura 2 apresentam os valores não normalizados dos custos e preferências da instância com 324 vértices e 5 medianas, demonstrando o comportamento do modelo em relação aos dados reais. Nos gráficos foi considerado o intervalo $0 \leq \alpha \leq 0,9$ para representar a variação dos custos e $0,1 \leq \alpha \leq 0,9$ para preferências, pois quando $\alpha = 0$ o modelo não considera as preferências em sua solução. É possível observar, a partir dos resultados, que o balanceamento entre os objetivos ocorre a medida que o valor do parâmetro α é alterado. A Figura 2(a) demonstra que a componente dos custos aumenta a medida que o valor do parâmetro α aumenta, evidenciando uma priorização das preferências cada vez maior na solução. Já na Figura 2(b) fica evidenciado que o comportamento da componente das preferências é o inverso da componente dos custos, ou seja, ela diminui a medida que o valor de α aumenta. Além disso, nota-se que para $\alpha \geq 0,6$ os valores de custo e preferências se mantém constante, pois o modelo já havia encontrado as medianas com os melhores valores de borda.



(a) Variação da soma dos custos das soluções

(b) Variação da soma das preferências das soluções

Figura 2: Variação das componentes da função objetivo em função do valor do parâmetro α

Os resultados detalhados da execução do modelo proposto para a instância com 324 vértices e 5 medianas pode ser visto na Tabela 2. A primeira coluna da tabela apresenta o valor do

parâmetro α. A segunda coluna apresenta o valor da função objetivo, que utiliza a variável auxiliar u para representar as preferências. A terceira e quarta colunas apresentam respectivamente o valor real dos custos e preferências da solução encontrada. O tempo de execução do modelo é apresentado na quinta coluna e, por fim, a última coluna da tabela apresenta as medianas selecionadas com destaque em negrito para representar as alterações na solução.

Tabela 2: Resultados para a instância com 324 vértices e 5 medianas

α	FO	Custos	Preferências	Tempo (s)	Medianas
0	38,1832	122518,0196	63106	12,040	61, 108, 141, 210, 280
0,1	-2537,7519	127804,8030	4745	9,313	10, 115, 132, 208, 289
0,2	-5116,3003	136150,9747	2360	9,067	115, 132, **173, 229**, 289
0,3	-7695,6664	136150,9747	2360	8,425	115, 132, **173, 229**, 289
0,4	-10275,5695	142867,7262	1785	8,364	67, **103, 173, 229**, 289
0,5	-12855,5932	142867,7262	1785	8,598	67, **103, 173, 229**, 289
0,6	-15436,6213	165362,8133	1067	7,945	**103, 115, 173, 229, 318**
0,7	-18017,9809	165362,8133	1067	7,033	103, 115, 173, 229, 318
0,8	-20599,3404	165362,8133	1067	6,783	103, 115, 173, 229, 318
0,9	-23180,6999	165362,8133	1067	7,149	103, 115, 173, 229, 318
0,995	-25632,9915	165362,8133	1067	6,893	103, 115, 173, 229, 318

Além dos valores de custos e preferências apresentados na Tabela 2, destaca-se a informação da coluna Tempo, cujo valor médio é de $\approx$ 8,3 segundos. Apenas para $\alpha = 0$, o que representa a solução do problema clássico das p-Medianas, o modelo apresentou um tempo um pouco superior (12,04 segundos). É importante destacar que alguns modelos matemáticos da literatura apresentam resultados em tempo computacional razoável apenas para instâncias de pequeno porte. Por exemplo, o modelo proposto por [Casas-Ramírez e Camacho-Vallejo, 2017] foi executado em instâncias com 50, 75, 100, 300 e 500 vértices, tendo encontrado solução apenas para as instâncias com 100 ou menos vértices dentro de um limite de 6 horas de execução. Este modelo da literatura foi executado com a instância contendo 324 vértices no mesmo ambiente computacional utilizado neste trabalho, porém não encontrou uma solução para esta instância em um período de execução superior a 10 horas. Apesar da abordagem deste trabalho para as preferências (voltada ao consenso e apoiada na teoria da Agregação de *Ranking*) ser diferente da apresentada em [Casas-Ramírez e Camacho-Vallejo, 2017], o fato do modelo proposto encontrar soluções em um tempo computacional competitivo representa uma diferença significativa em termos de performance quando comparada com outros modelos matemáticos da literatura.

5. Conclusão

Neste trabalho foi apresentada uma nova formulação matemática para o problema das p-Medianas com preferências, diferenciando-se de outros trabalhos ao utilizar técnicas de Agregação de *Ranking* para o tratamento das preferências. Uma revisão da literatura demonstrou que este é o primeiro trabalho a utilizar essa abordagem, sendo esse um dos principais diferenciais do modelo proposto. O uso destas técnicas permitiu que o objetivo relacionado com as preferências fosse tratado com base no consenso geral, ou seja, priorizando as medianas amplamente aceitáveis por todo o conjunto de consumidores, ao invés daquelas melhor priorizadas por cada um deles. O

problema em considerar as facilidades melhor priorizadas por cada consumidor individualmente é que a solução pode ter medianas que atendam de forma satisfatória apenas um subconjunto dos consumidores, possibilitando que outros consumidores não tenham suas preferências atendidas. Por isso, a utilização de um modelo consensual se apresenta como boa alternativa. Além disso, a utilização do parâmetro de balanceamento permite que tomadas de decisão sejam realizadas em função das demandas de negócio, seja priorizando custos ou preferências, o que traz flexibilidade ao modelo.

Foram realizados experimentos computacionais com duas instâncias de teste, uma com 102 vértices e outra com 324 vértices. Tais experimentos demonstraram que o modelo proposto consegue encontrar boas soluções em tempo computacional competitivo. Observou-se também que o modelo consegue obter soluções intermediárias a partir da variação do valor do parâmetro de balanceamento (α), o que valida a sua flexibilidade em relação aos objetivos de custo e preferências.

Embora o modelo tenha sido aplicado apenas ao problema das p-Medianas com preferências, o conjunto de restrições proposto como solução pode ser aplicado em outros problemas de localização, como a localização de facilidades capacitadas, localização de facilidades em dois níveis, máxima cobertura, entre outros. Portanto, considera-se como trabalhos futuros a aplicação da abordagem nestas variações de problemas de localização, bem como a implementação de uma solução heurística para resolução de instâncias maiores e comparação dos resultados.

Agradecimentos

Essa pesquisa foi parcialmente financiada pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq (processos 423694/2018-9, 303736/2018-6, 301752/2019-2 e 302261/2019-2), Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP (processo 2018/15417-8), e pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências

Anandalingam, G. e Friesz, T. L. (1992). Hierarchical optimization: An introduction. *Annals of Operations Research*, 34(1):1–11. ISSN 1572-9338.

Borda, J. C. (1781). Mémoire sur les Élections au scrutin. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Paris. [Translated by Alfred de Grazia , "Mathematical Derivation of an Election System.", Isis, June 1953, 44, p. 42-51].*

Camacho-Vallejo, J.-F., Cordero-Franco, Á., e González-Ramírez, R. (2014). Solving the bilevel facility location problem under preferences by a stackelberg-evolutionary algorithm. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014.

Casas-Ramírez, M.-S. e Camacho-Vallejo, J.-F. (2017). Solving the p-median bilevel problem with order through a hybrid heuristic. *Applied Soft Computing Journal*, 60:73–86.

Condorcet, N. (1785). Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix. *L'imprimerie royale, Paris*.

Cánovas, L., García, S., Labbé, M., e Marín, A. (2007). A strengthened formulation for the simple plant location problem with order. *Operations Research Letters*, 35(2):141 – 150. ISSN 0167-6377.

Daskin, M. (1995). *Network and Discrete Location: Models, Algorithms, and Applications*. John Wiley & Sons, New York. ISBN 978-0-471-01897-1.

Drezner, Z. (1995). *Facility Location: A Survey of Applications and Methods*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer-Verlag New York, 1 edition. ISBN 978-0-387-94545-3.

Eiselt, H. A. e Marianov, V. (2011). *Foundations of Location Analysis*, volume 155. Elsevier US.

Farahani, R. Z., Asgari, N., Heidari, N., Hosseininia, M., e Goh, M. (2012). Covering problems in facility location: A review. *Computers & Industrial Engineering*, 62(1):368 – 407. ISSN 0360-8352.

Francis, R. L., Lowe, T. J., Rayco, M. B., e Tamir, A. (2009). Aggregation error for location models: survey and analysis. *Annals of Operations Research*, 167(1):171–208. ISSN 1572-9338.

Hanjoul, P. e Peeters, D. (1987). A facility location problem with clients' preference orderings. *Regional Science and Urban Economics*, 17(3):451–473.

Irurozki, E., Calvo, B., e Lozano, J. (2016). Permallows: An r package for mallows and generalized mallows models. *Journal of Statistical Software, Articles*, 71(12):1–30. ISSN 1548-7660.

Kariv, O. e Hakimi, S. L. (1979). An algorithmic approach to network location problems. ii: The p-medians. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 37(3):539–560. ISSN 00361399.

Korba, A., Clemencon, S., e Sibony, E. (2017). A Learning Theory of Ranking Aggregation. In Singh, A. e Zhu, J., editors, *Proceedings of the 20th International Conference on Artificial Intelligence and Statistics*, volume 54 of *Proceedings of Machine Learning Research*, p. 1001–1010, Fort Lauderdale, FL, USA. PMLR.

Lorena, L. A. N., Senne, E. L. F., Paiva, J. A. C., e A., P. M. (2001). Integração de modelos de localização a sistemas de informações geográficas. *Gestão e Produção*, 8(2):180–195.

Mallows, C. L. (1957). Non-null Ranking Models. I. *Biometrika*, 44(1-2):114–130. ISSN 0006-3444.

Marianov, V. e Serra, D. (2002). Location problem in the public sector. *Facility Location: Applications and Theory*, XVI(1):119 – 143. ISSN 978-3-540-42172-6.

Marić, M., Stanimirović, Z., e Milenković, N. (2012). Metaheuristic methods for solving the bilevel uncapacitated facility location problem with clients' preferences. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 39:43–50.

Marić, M., Stanimirović, Z., Milenković, N., e Djenić, A. (2015). Metaheuristic approaches to solving large-scale bilevel uncapacitated facility location problem with clients' preferences. *Yugoslav Journal of Operations Research*, 25(3):361–378.

Mirchandani, P. (1990). The p-median problem and generalizations. In Mirchandani, P. e Francis, R., editors, *Discrete Location Theory*, p. 121–127. Wiley, New York.

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings

Mladenović, N., Brimberg, J., Hansen, P., e Moreno-Pérez, J. A. (2007). The p-median problem: A survey of metaheuristic approaches. *European Journal of Operational Research*, 179(3):927 – 939. ISSN 0377-2217.

Reese, J. (2006). Solution methods for the p-median problem: An annotated bibliography. *Networks*, 48(3):125–142.

ReVelle, C. S. e Swain, R. W. (1970). Central facilities location. *Geographical Analysis*, 2(1): 30–42.

Tansel, B. C., Francis, R. L., e Lowe, T. J. (1983). State of the art—location on networks: A survey. part i: The p-center and p-median problems. *Management Science*, 29(4):482–497.