LII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional
João Pessoa - PB, 3 a 5 de novembro de 2020

MODELO DE PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA PARA UM PROBLEMA DE CORTE DE ITENS IRREGULARES

Layane Rodrigues de Souza Queiroz e Marina Andretta
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação,
Universidade de São Paulo - Campus São Carlos,
Av. Trabalhador São Carlense, 400, Centro, 13566-590, São Carlos - SP, Brasil.
layaner@usp.br, andretta@icmc.usp.br

RESUMO

Neste trabalho apresenta-se um modelo para o problema de corte em faixa de itens irregulares bidimensionais com incerteza na demanda dos itens a serem cortados. O modelo considera a faixa discretizada sobre uma malha de pontos e inclui restrições para evitar a sobreposição entre itens baseadas nos conceitos de *inner-fit raster* e *no-fit raster*. Para lidar com a incerteza nas demandas, desenvolve-se um modelo de programação estocástica de dois estágios, considerando um conjunto discreto e finito de cenários. O objetivo é minimizar o custo total associado ao preparo da faixa, considerando a produção de itens conhecidos (primeiro estágio) e itens futuros estimados (segundo estágio). Os resultados numéricos iniciais em instâncias geradas apontam que a solução do modelo de programação estocástica é vantajosa para obter soluções em conformidade com as incertezas presentes, indicando que a aleatoriedade impacta e é importante de ser considerada no problema.

PALAVRAS CHAVE. Programação Estocástica. Problema de Corte de Itens Irregulares. Incertezas.

POI - PO na Indústria. OC - Otimização Combinatória.

ABSTRACT

This work presents a model for the problem of cutting two-dimensional irregular items with uncertainty in demand for the items to be cut. The model considers the bin discretized over a grid of points and includes constraints to avoid overlap between items based on the concepts of inner-fit raster and no-fit raster. A two-stage stochastic programming model is proposed to deal with the demand uncertainty, considering a discrete and finite set of scenarios. The objective is to minimize the total cost associated with the strip's production, considering the production of known items (first stage) and the estimated future items (second stage). The preliminary numerical results on generated instances show that the stochastic programming model's solution is advantageous to obtain solutions following the given uncertainties, indicating that randomness impacts and is essential to be considered in the problem.

KEYWORDS. Stochastic Programming. Problem of Cutting Irregular Items. Uncertainties.

ORI - OR in Industry. CO - Combinatorial Optimization.

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings

1. Introdução

Vários problemas que surgem no contexto real têm sido resolvidos sobre à hipótese de que os dados são determinísticos e conhecidos *a priori*. Todavia, essa suposição tem levado, em muitos casos, a métodos e/ou soluções que não representam adequadamente a realidade, já que os dados podem estar sujeito a incertezas por diversas razões, como não existirem no momento em que o problema é resolvido, influência de fatores externos (mercado ou ações), ou não foram coletados ou medidos exatamente [Alem e Morabito, 2015b].

Problemas de corte e empacotamento estão relacionados com o corte de objetos ou o empacotamento de itens, para fins de otimizar algum objetivo. Esses problemas são de grande importância prática, sendo comumente encontrados em empresas e indústrias, como na metal-mecânica, na automotiva e de máquinas agrícolas, na têxtil, na de produção de móveis, e no transporte logístico e fretamento [Wäscher et al., 2007]. Esses problemas também estão sujeitos a incertezas, que podem surgir, por exemplo, no valor, no tamanho, no peso, na demanda e na qualidade dos itens e recipientes [Alem et al., 2010; Crainic et al., 2016].

Neste trabalho, investiga-se um problema corte de itens irregulares em que é preciso decidir qual o tamanho de área de faixa retangular para produzir itens demandados. A área da faixa é determinada pelos itens que vão ser cortados, havendo um conjunto conhecido de itens e outro incerto, que deve ser revelado no futuro. Como a faixa requer um determinado tempo de preparação, o preço por metro quadrado varia conforme o momento (inicial ou futuro) em que a área de faixa é preparada. Se mais área de faixa é solicitada no futuro, essa metragem adicional geralmente custa mais do que quando solicitada inicialmente. O objetivo é decidir quantos metros de área de faixa preparar (inicialmente e, se for o caso, no futuro) conforme a demanda de itens inicial e revelados no futuro, minimizando o custo total da faixa. Denomina-se esse problema de Problema de Corte de itens Irregulares em Faixa Bidimensional com Demanda Incerta (2PCIF-DI).

Problemas que envolvem o corte e empacotamento de itens irregulares possuem a dificuldade adicional relacionada à geometria dos itens, o que dificulta na proposta de métodos de resolução que sejam eficazes. Um tutorial de como lidar com a questão geométrica, em especial quando se deseja verificar sobreposição entre os itens, foi feito por Bennell e Oliveira [2008]. Esses autores destacaram os métodos: *raster*, que utiliza uma matriz de pontos para representar os itens e recipientes; *phi-function*, que verifica a posição relativa entre os itens a partir de funções de distância; trigonometria direta, que verifica a interseção entre segmentos de retas e inclusão de pontos; e *no-fit polygon*, que é o polígono obtido ao transladar um item ao redor de outro e traz a representação de onde os itens estão encostando, sobrepostos ou não. Outros métodos surgiram a partir da combinação dos anteriores, como é o caso do *no-fit raster*, que combina o *no-fit polygon* com o método *raster* [Toledo et al., 2013].

A versão determinística do 2PCIF-DI está na classe NP-Difícil [Garey e Johnson, 1979] e tem sido resolvida por diferentes abordagens. Em Fischetti e Luzzi [2009] há um modelo de programação linear inteira mista que define a posição dos itens por meio de variáveis contínuas. Em Toledo et al. [2013] há um modelo de programação linear inteira mista que considera o recipiente discretizado sobre uma malha. Rodrigues e Toledo [2017] apresentaram melhorias sobre o modelo de Toledo et al. [2013], desenvolvendo restrições de clique para lidar com a não sobreposição de itens. Com relação a heurísticas, Gomes e Oliveira [2006] há um *simulated annealing*, com a heurística *bottom-left* para posicionar os itens. Uma heurística híbrida que combina *cuckoo search* e busca local guiada foi proposta por Elkeran [2013]. Mundim et al. [2017], por outro lado, desenvolveram um algoritmo genético de chaves aleatórias viciadas, que utiliza a heurística *bottom-left* para o posicionamento de itens.

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings

Não existem muitos trabalhos na literatura envolvendo problemas de corte e empacotamento com incertezas. No caso de itens irregulares, identificou-se apenas o trabalho de Mundim [2017]. Nesse trabalho há a consideração de incertezas na demanda dos itens, para o problema de corte de estoque, com a proposta de um modelo de programação estocástica de dois estágios. O modelo penaliza a falta e o excesso de itens produzidos a mais que o necessário nos cenários, e foi aplicado sobre seis instâncias criadas a partir da indústria têxtil. Alem e Morabito [2015b] comentam que a programação estocástica está associada com a otimização do valor esperado, permitindo incorporar diferentes medidas de robustez, embora seja limitada pela quantidade de cenários.

Em Alem et al. [2010] há resultados para o problema de corte de estoque unidimensional com demanda estocástica. Os autores propuseram um modelo de programação estocástica de dois estágios com o objetivo de minimizar o custo total esperado incorrido em ambos os estágios, devido a desperdícios e multas por retenção ou atraso de itens. A relaxação do modelo é resolvida por um método de geração de colunas e a avaliação das soluções ocorre por duas medidas para programação estocástica, mostrando que a solução do modelo é eficaz mesmo para pequenas varições dos parâmetros. Perboli et al. [2012] resolveram o problema de empacotamento em recipientes generalizado (do inglês, *generalized bin packing problem*), em que os itens possuem volume e valor, enquanto os recipientes têm custo e volume máximo de capacidade. Nesse problema, o valor dos itens é incerto, a depender das operações de manuseio que os recipientes recebem. Os autores utilizaram a teoria assintótica de valores extremos para obter uma aproximação determinística para o problema. Em Crainic et al. [2016], uma variante do problema de empacotamento em recipientes generalizado foi resolvida, considerando que a demanda dos itens é um parâmetro incerto, dada a incerteza sobre as necessidades futuras por itens e os custos associados às atividades de manuseio. Esses autores propuseram um modelo de programação estocástica de dois estágios, além de uma nova meta-heurística baseada em *progressive hedge* para acelerar as buscas por uma solução.

Outro problema que tem estudos considerando incertezas é o problema da mochila. Monaci et al. [2013] assumiram que o volume dos itens não é exatamente conhecido *a priori*, mas está definido em um intervalo. Os autores desenvolveram um algoritmo de programação dinâmica, além de técnicas para diminuir a complexidade de espaço e tempo. Em Rooderkerk e Heerde [2016] busca-se otimizar a variedade de itens para diferentes lojas por meio da resolução do problema da mochila binária. Esses autores consideraram uma medida de risco associada às variedades de itens, além de assumir que a demanda e o lucro por item são parâmetros incertos. A resolução do problema ocorreu por meio de uma heurística para construir a fronteira entre retorno e risco. Range et al. [2018] resolveram o problema da mochila considerando que o volume dos itens não é conhecido exatamente. Os autores utilizaram restrições que permitiam violar a capacidade da mochila dentro de um certa probabilidade, além de adicionarem uma penalidade na função objetivo. A resolução do problema se deu com um algoritmo de programação dinâmica para o problema do caminho mais curto com restrições de recurso.

A partir da revisão da literatura, observando a existência de poucos trabalhos que consideram incertezas em problemas de corte e empacotamento de itens irregulares, resolve-se o 2PCIF-DI por um modelo de programação estocástica de dois estágios. O *no-fit raster* é utilizado na construção das restrições para evitar a sobreposição entre itens. Na Seção 2 é descrito o problema e como o *no-fit raster* é empregado. A Seção 3 traz o modelo desenvolvido para o problema. Os experimentos numéricos e seus resultados sobre uma instância gerada aleatoriamente são discutidos na Seção 4, incluindo análises relativas ao valor esperado de informação perfeita e valor da solução estocástica. Por fim, tem-se as conclusões e direções de trabalhos futuros na Seção 5.

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings

2. Descrição do Problema

O Problema de Corte de itens Irregulares em Faixa Bidimensional com Demanda Incerta (isto é, 2PCIF-DI) é uma extensão do Problema de Corte de itens Irregulares em Faixa Bidimensional (2PCIF), que é NP-difícil mesmo quando os itens são retângulos. Esses problemas são definidos sobre o plano Cartesiano, em que se adota o primeiro quadrante para o posicionamento da faixa, com origem no ponto $(0, 0)$. O eixo das abscissas (eixo x) está associado com a dimensão da largura (L) e o eixo das ordenadas (eixo y) está associado com a dimensão da altura (H). Um item i possui área a_i, um número de cópias d_i, um vértice de referência, e uma envoltória retangular r_i. Esse item é posicionado pelo seu vértice de referência $vo_i = (vo_i^x, vo_i^y)$, que corresponde ao vértice de menor ordenada (eixo y) (em caso de empate, o vértice com menor abscissa). A envoltória retangular $r_i = (r_i^x, r_i^y)$ consiste no menor retângulo, em termos de dimensões e sem rotação, que circunscreve o item i.

O objetivo do 2PCIF é obter um posicionamento viável de todos os itens, atendendo exatamente às demandas d_i de cada item i, de forma que a largura total L seja mínima para uma altura H fixa. Um posicionamento dos itens é viável quando não há sobreposição entre quaisquer pares de itens, os itens estão inteiramente contidos dentro da faixa e as demandas são atendidas. Nota-se que a largura L pode ser determinada observando o vértice que está mais a direita possível, dentre todos os vértices de todos os itens posicionados.

Para identificar a não sobreposição entre itens, utiliza-se o *no-fit raster*. Ele foi calculado entre todos os pares de itens i e j, para o item i fixo e o item j orbital, sendo representado por NFP_{ij}. Neste caso, a cada *no-fit polygon*, associa-se uma matriz cujas posições com o valor "um" indicam que os itens estão se sobrepondo, caso contrário, tem-se o valor "zero". No caso de verificar se os itens estão contidos dentro da faixa, utiliza-se o *inner-fit polygon*. Ele foi calculado transladando cada item pelo seu vértice de referência, de forma que o item esteja encostado em pelo menos uma das bordas da faixa. O *inner-fit raster* de cada item i é denotado por IFP_i.

No 2PCIF-DI, para a produção de itens irregulares, considera-se a preparação da faixa em dois momentos. No momento t_0, informa-se a área de faixa HL_0, com um custo c_0 por metro quadrado. Pode-se ainda solicitar um acréscimo HL_1 de área inicial, no momento t_1, com custo $c_1 > c_0$ (por motivos operacionais, toda área adicional, solicitada no momento t_1 custa mais). A entrega da faixa ocorre após o momento t_1. No momento t_0, conhece-se exatamente a demanda dos itens do conjunto I_0, denominado de itens conhecidos, que se precisa cortar. Além desses itens, existe um outro conjunto I_1, com os itens futuros, cuja demanda passa a ser conhecida somente no momento t_1 para a produção. O objetivo é determinar qual área HL de faixa preparar, a um custo mínimo, a fim de produzir os itens do conjunto $I_0 \cup I_1$.

A área da faixa HL é determinada pela área inicial HL_0 mais a área adicional HL_1. Se a demanda dos itens do conjunto $I_0 \cup I_1$ fosse conhecida com certeza no momento t_0, a faixa poderia ser determinada exatamente e teria um custo $c_0(HL_0)$. Embora não se conheça a demanda dos itens em I_1 no momento t_0, seria importante preparar uma área inicial HL_0 capaz de também permitir (parcialmente ou por completo) a produção dos itens em I_1, sem ter que preparar muito mais área adicional HL_1 no momento t_1.

3. Modelo de Dois Estágios

No 2PCIF-DI, a demanda dos itens a serem cortados no futuro, do conjunto I_1, é considerada uma variável aleatória com realizações discretas conforme uma distribuição de probabilidade conhecida. Para tanto, propõe-se para o problema um modelo de programação estocástica de dois estágios, sendo $\Omega = \{1, 2, \ldots, S\}$ o conjunto de possíveis estados (cenários), tal que $s \in \Omega$ define a ocorrência particular de um estado (cenário).

No primeiro estágio é determinada a área inicial da faixa conforme o corte dos itens conhecidos e uma previsão dos itens futuros (decisões *here-and-now*). No segundo estágio, após a realização das variáveis aleatórias, têm-se ações para ajustar a área da faixa, isto é, preparar largura adicional de faixa (decisões *wait-and-see*). Os parâmetros e as variáveis de decisão do modelo para o 2PCIF-DI são:

- I_0: conjunto de itens irregulares bidimensionais, que é conhecido no instante t_0 e deve ser cortado;
- H: altura da faixa, que é sempre fixa;
- c_0: custo unitário de área da faixa se preparada no instante t_0;
- c_1: custo unitário de área da faixa se preparada no instante t_1;
- M: número suficientemente grande;
- π^s: probabilidade de ocorrência do cenário $s \in \Omega$;
- I_1^s: conjunto de itens irregulares bidimensionais do cenário $s \in \Omega$.
- y_{ipq}: variável binária que vale 1 se o item $i \in I_0$ tem o seu vértice de referência posicionado no ponto (p, q) da malha associada a faixa. Caso contrário, possui o valor 0;
- L_0: variável contínua que denota a largura inicial de faixa para suprir, pelo menos, a demanda dos itens do conjunto I_0;
- x_{ipq}^s: variável binária que tem valor 1 se o item $i \in I_1^s$, do cenário $s \in \Omega$, tem o seu vértice de referência posicionado no ponto (p, q) da malha associada a faixa. Caso contrário, possui valor 0;
- L_f^s: variável contínua que denota a largura adicional para suprir a demanda dos itens do conjunto $I_0 \cup I_1^s$, para o cenário $s \in \Omega$.

O 2PCIF-DI é formulado como um modelo de programação inteira mista em dois estágios com risco neutro. O objetivo é minimizar o custo total associado ao preparo da faixa, considerando a produção da demanda dos itens conhecidos (primeiro estágio) e a demanda estimada dos itens futuros (segundo estágio). O modelo do primeiro estágio tem função objetivo (1), que está relacionada com o custo da área da faixa de primeiro de estágio e os custos esperados do problema de segundo estágio para todos os cenários $s \in \Omega$. Note que $\boldsymbol{\xi} = [\xi_s]$, em que $\xi_s = \{L_1^s, x_{ipq}^s\}$ representa o vetor aleatório relativo ao cenário s.

$$\text{Minimizar } c_0(HL_0) + Q(L_0, y, \boldsymbol{\xi}) \tag{1}$$

$$(p + (r_i^x - vo_i^x))y_{ipq} \leq L_0, \qquad \forall\, i \in I_0,\ (p,q) \in IFP_i; \tag{2}$$

$$\sum_{(p,q)\in IFP_i} y_{ipq} = d_i, \qquad \forall\, i \in I_0; \tag{3}$$

$$L_0 \geq 0, \tag{4}$$

$$y_{ipq} \in \{0, 1\}, \qquad \forall\, i \in I_0. \tag{5}$$

Na função objetivo (1) do primeiro estágio, $Q(L_0, y, \boldsymbol{\xi})$ representa o custo esperado total pela área de faixa que é adicionada no segundo estágio, dadas as decisões de primeiro estágio e os cenários $s \in \Omega$. As restrições (2) impõem que a largura usada L_0 da faixa é determinada pelo item i, dentre todos aqueles do conjunto I_0, que tem seu vértice de referência posicionado em (p, q) e seu término em $p + (r_i^x - vo_i^x)$. As restrições (3) garantem que a demanda de cada item $i \in I_0$ deve ser atendida exatamente, ou seja, que o item i deve ter d_i cópias posicionadas em exatamente d_i pontos distintos do IFP_i. As restrições (4) e (5) definem o domínio das variáveis de decisão, de forma que a largura usada L_0 da faixa deve ser não-negativa e as variáveis y_{ipq} são binárias, respectivamente.

O modelo de segundo estágio possui função objetivo (6), que visa minimizar a soma dos custos esperados da área adicional a ser preparada da faixa, considerando a probabilidade de ocorrência π_s de cada cenário $s \in S$.

$$Q(L_0, y, \boldsymbol{\xi}) = \text{Minimizar} \sum_{s \in \Omega} \pi_s (c_1(HL_1^s)) \tag{6}$$

$$(p + (r_i^x - vo_i^x)) x_{ipq}^s \leq L_0 + L_1^s, \qquad \forall\, s \in \Omega,\ i \in I_1^s,\ (p,q) \in IFP_i; \tag{7}$$

$$\sum_{j \in I_0} \sum_{(u,v) \in NFP_{ij}^{(p,q)}} y_{juv} + \sum_{s \in \Omega} \sum_{j \in I_1^s} \sum_{(u,v) \in NFP_{ij}^{(p,q)}} x_{juv}^s \leq (1 - y_{ipq}) M, \qquad \forall\, i \in I_0,\ (p,q) \in IFP_i; \tag{8}$$

$$\sum_{j \in I_0} \sum_{(u,v) \in NFP_{ij}^{(p,q)}} y_{juv} + \sum_{j \in I_1^s} \sum_{(u,v) \in NFP_{ij}^{(p,q)}} x_{juv}^s \leq (1 - x_{ipq}^s) M, \qquad \forall\, s \in \Omega,\ i \in I_1^s,\ (p,q) \in IFP_i; \tag{9}$$

$$\sum_{(p,q) \in IFP_i} x_{ipq}^s = d_i^s, \qquad \forall\, s \in \Omega,\ i \in I_1^s; \tag{10}$$

$$L_1^s \geq 0, \qquad \forall\, s \in \Omega; \tag{11}$$

$$x_{ipq}^s \in \{0, 1\}, \qquad \forall\, s \in \Omega,\ i \in I_1^s. \tag{12}$$

As restrições do modelo de segundo estágio (7) impõem que a largura adicional L_1^s, de cada cenário $s \in \Omega$, é determinada pelo item i, dentre todos aqueles de I_1^s, que tem seu vértice de referência posicionado em (p, q) e seu término em $p + (r_i^x - vo_i^x)$, levando em consideração a largura inicial L_0 da faixa. Por sua vez, as restrições (8) asseguram que se o item $i \in I_0$ está posicionado em (p, q), então o item j, seja do conjunto I_0 ou I_1^s, para qualquer cenário $s \in \Omega$, não pode ficar posicionado em qualquer um dos pontos (u, v) do cojunto $NFP_{ij}^{(p,q)}$. As restrições (9) asseguram que se o item $i \in I_1^s$, para cada cenário $s \in \Omega$, está posicionado em (p, q), então o item j, seja do conjunto I_0 ou I_1^s, não pode ficar posicionado em qualquer um dos pontos (u, v) do cojunto $NFP_{ij}^{(p,q)}$. As restrições (10) impõem que a demanda de cada item $i \in I_1^s$, para cada cenário $s \in \Omega$, deve ser atendida exatamente. Por fim, as restrições (11) e (12) definem que a largura adicional L_1^s, para cada cenário $s \in \Omega$, deve ser não-negativa e as variáveis x_{ipq}^s, para cada cenário $s \in \Omega$, são binárias, respectivamente.

Nas restrições (9) e (10), define-se o $NFP_{i,j}^{(p,q)}$ como sendo o conjunto de pontos (u, v) que estão no interior do *no-fit raster* entre i (item fixo) e j (item orbital), dado que o item i está posicionado em (p, q). Os pontos (u, v) são aqueles em que o item j, se posicionado em algum deles, faz com que haja interseção com i posicionado em (p, q).

No modelo de programação estocástica, o valor ótimo corresponde a uma composição de custos mínimos, conforme os cenários e as suas probabilidades de ocorrência, resultando em um custo mínimo esperado. Além disso, tem-se diferentes maneiras de cortar a faixa, conforme

cada cenário. Para avaliar a melhoria que esse modelo produz sobre um modelo puramente determinístico, pode-se utilizar o Valor Esperado da Informação Perfeita (*Expected Value of Perfect Information - EVPI*) e o Valor da Solução Estocástica (*Value of Stochastic Solution - VSS*) [Alem e Morabito, 2015a].

O EVPI representa o quanto o decisor estaria disposto a pagar em troca de informação perfeita e precisa sobre o futuro. Com essa medida, pode-se verificar a importância de considerar (ou não) a aleatoriedade. Assim, se o valor do EVPI é baixo, pode-se não ser tão importante considerar a aleatoriedade no problema. Para tanto, leva-se em consideração o Valor do Problema Estocástico (*Recourse Problem - RP*), que é a solução ótima do modelo de dois estágios, e o valor esperado das soluções *wait-and-see* (WS). O valor $WS = \sum_{s\in\Omega} \pi_s WS_s^*$, tal que WS_s^* é o valor ótimo do problema *wait-and-see* para cada cenário $s \in \Omega$. Ou seja, resolve-se o modelo de dois estágios considerando apenas o cenário s, que é o mesmo que resolver um problema determinístico com os itens conhecidos do conjunto I_0 e os itens futuros I_1^s. Logo, EVPI = RP - WS.

O VSS representa o custo de ignorar a aleatoriedade dos parâmetros na escolha de uma decisão. Assim, se o valor de VSS é baixo, o ganho ao se resolver o problema estocástico RP é desprezível em comparação a um problema de Valor Esperado (EV) (ou seja, quão ruim é a decisão EV em comparação com a solução de RP). O EV representa um problema em que as variáveis aleatórias são substituídas pelos seus respectivos valores esperados (ou por um cenário de referência). A partir da solução do EV, obtém-se o resultado esperado, isto é, o *Expectation of the Expected Value Problem - EVV*. O valor EVV é obtido ao fixar as variáveis de primeiro estágio pela solução dada pelo EV e, assim, resolver o problema estocástico RP. Logo, VSS = EVV - RP.

4. Experimentos Computacionais

O objetivo dos experimentos iniciais é avaliar o modelo de dois estágios e suas variações para obter o EVPI e o EVV, além das soluções geradas e o impacto em se considerar ou não incertezas no problema. Todos os modelos foram codificados na linguagem C++, juntamente com os métodos para calcular o *inner-fit raster* e *no-fit raster*. A resolução dos modelos ocorreu com o algoritmo *branch-and-cut* do Gurobi Optimizer na versão 8.1.1, com os parâmetros padrões. Não foi definido um tempo máximo para a resolução dos modelos, isto é, a resolução foi finalizada quando o solver obteve a solução ótima. O computador usado nos experimentos tem sistema operacional Linux Ubuntu 14.04 LTS, processador Intel Core i7 de 4 GHz e 32 GB de memória RAM.

Por não serem conhecidas instâncias para o 2PCIF-DI, utilizaram-se os dados da instância BLAZEWICZ1 de Toledo et al. [2013], que foi resolvida pelos autores quando lidando com a versão determinística (isto é, o 2PCIF). A escolha dessa instância se deu pela necessidade da solução ótima para que se possa realizar as análises adequadas do modelo estocástico proposto, uma vez que própria resolução do 2PCIF por modelos matemáticos tem se limitado a instâncias de pequeno porte [Rodrigues e Toledo, 2017].

A partir disso, gerou-se a instância base BLAZ, que possui os itens da Figura 1. Outros detalhes da instância BLAZ são dados na Tabela 1, considerando uma faixa de altura fixa $H = 9$, o custo inicial de área da faixa $c_0 = 1$ por metro quadrado e o custo adicional de área de faixa $c_1 = 1,5$ por metro quadrado (isto é, de 50% a mais do que o custo inicial). A geração dos cenários é baseada em Pan e Nagi [2010], consistindo na enumeração de algumas realizações discretas e equiprováveis. Cada cenário que é incluído pode ser visto como uma "instância" do 2PCIF, o que pode aumentar consideravelmente o tempo necessário para obter uma solução ótima para o 2PCIF-DI. Por isso, três cenários foram incluídos, usando os itens não presentes no conjunto conhecido I_0 e sem repetição entre os cenários, sendo a demanda de cada item gerada de forma uniforme no conjunto $\{0, \ldots, 10\}$.

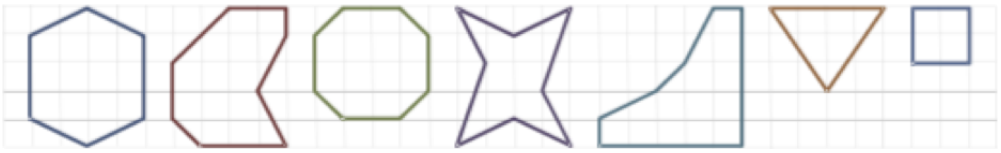


Figura 1: Tipos de itens da instância BLAZEWICZ.

Tabela 1: Dados da instância BLAZ.

Conjunto	Itens	Demanda	Probabilidade
I_0	$\{2,4,5\}$	$\{1,1,1\}$	-
I_1^1	$\{1\}$	$\{5\}$	33,33%
I_1^2	$\{3\}$	$\{3\}$	33,33%
I_1^3	$\{6\}$	$\{8\}$	33,34%
$\bar{I}_{ref}$	$\{1,3,6\}$	$\{1,1,2\}$	-

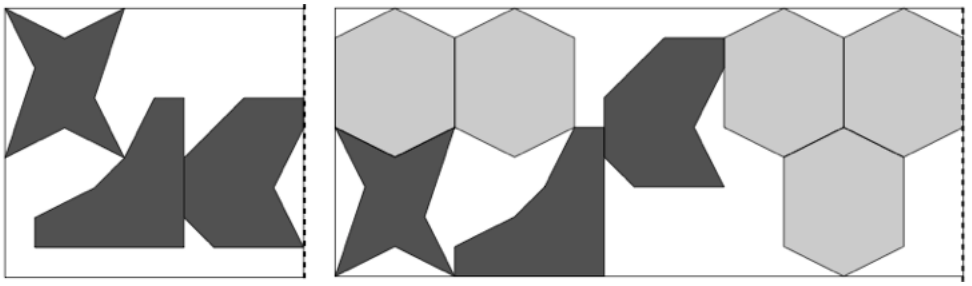
Para a resolução da instância BLAZ, a escala adotada para a discretização e construção dos NFPs e IFPs foi de 1 ponto a cada 1 unidade de distância, conforme definido em Toledo et al. [2013]. Nessa instância, o modelo de dois estágios possui 19280 variáveis, sendo 4 contínuas e as demais binárias, além de 40802 restrições. Uma solução ótima computada pelo modelo de dois estágios para a BLAZ é apresentada na Tabela 2, com custo total de $170,82$, sendo obtida em 893,48 segundos. A Figura 2 mostra como os itens estão posicionados em cada cenário. Os itens em cinza escuro representam os itens conhecidos I_0.

Tabela 2: Solução da instância BLAZ.

	Modelo de dois estágios			Valor EPVI		
Cenário	L_0	L_1^s	Custo	L_0	L_1^s	WS_s^*
I_0	10	-	90	10	-	-
I_1^1	17	4	207	10	10	134,99
I_1^2	17	0	153	10	4	107,99
I_1^3	17	0	153	10	8	126,01
WS	-	-	-	10	-	123,00
RP	-	-	-	17	-	170,82

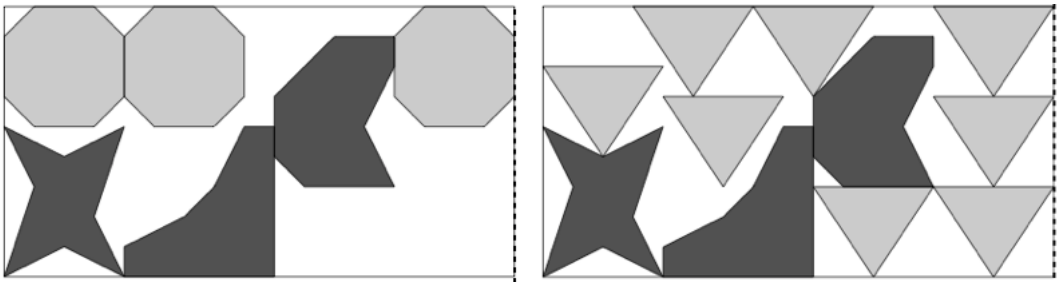
Na Figura 2(a) é apresentada a solução da instância BLAZ considerando apenas o conjunto de itens conhecidos I_0. Neste caso, o problema se reduz ao 2PCIF e a solução requer largura (inicial) $L_0 = 10$, com custo total de $90,00$. Por outro lado, na presença de incertezas (isto é, o 2PCIF-DI), a solução obtida tem largura inicial $L_0 = 17$, resultando em um custo de $153,00$. Nota-se pelas Figuras 2(b)-2(d) que os itens conhecidos I_0 são posicionados de forma diferente, já que visa atender aos cenários, do que na Figura 2(a). Além disso, a largura inicial encontrada para o problema com incertezas ($L_0 = 17$) consegue atender aos cenários 2 e 3 sem a necessidade de preparar uma área adicional de faixa. Esse preparo adicional seria preciso apenas para o cenário 1, exigindo uma largura adicional $L_1^1 = 4$ e resultando em um custo total de $207,00$.

A Tabela 2 traz as soluções RP e WS para obter o EVPI (isto é, o valor esperado da informação perfeita). Assim, tem-se EVPI = RP - WS = 170,82 - 123,00 = 47,82, medindo o custo (isto é, quanto) que o decisor estaria disposto a desembolsar em troca de informação precisa



(a) Com apenas I_0: $L_0 = 10$ e custo 90.

(b) Cenário 1, com I_0 e I_1^1: $L_0 = 17$, $L_1^1 = 4$ e custo 207.



(c) Cenário 2, com I_0 e I_2^1: $L_0 = 17$, $L_1^2 = 0$ e custo 153.

(d) Cenário 3, com I_0 e I_3^1: $L_0 = 17$, $L_1^3 = 0$ e custo 153.

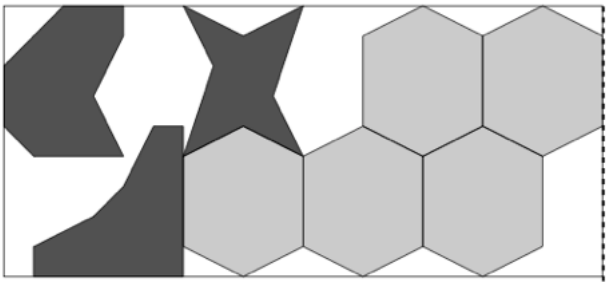
Figura 2: Solução da instância BLAZ pelo modelo estocástico de dois estágios.

sobre o futuro. O valor relativo percentual do EVPI é dado por 100(EVPI/RP) = 27,99%, o que certamente não indica um valor pequeno de desvio e, por isso, a aleatoriedade impacta no problema e não pode ser desconsiderada. A Figura 3 mostra as soluções WS obtidas para cada cenário. Devido à probabilidade de ocorrência dos cenários, as soluções WS têm retornado uma largura inicial $L_0 = 10$, com a necessidade de preparar uma área adicional de faixa para cada cenário (isto é, exigindo uma largura adicional $L_1^1 = 10$, $L_1^2 = 4$ e $L_1^3 = 8$).

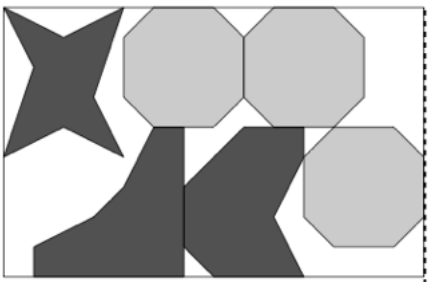
Com relação ao VSS (isto é, o valor da solução estocástica), tem-se inicialmente a solução do cenário de referência EV, dada pela resolução do 2PCIF para os itens dos conjuntos I_0 e $\bar{I}_{ref}$, resultando na largura inicial $L_0 = 12$, custo total de 108,00 e os itens conhecidos I_0, isto é, 2, 4 e 5, foram posicionados em $(3, 5)$, $(4, 0)$ e $(0, 7)$, respectivamente. Assim, a solução EVV, que considera os itens 2, 4 e 5 posicionados conforme a solução EV, tem a largura inicial $L_0 = 12$, custo total de 202,50, a largura adicional $L_1^1 = 10$ (com custo de 243,00), $L_1^2 = 4$ (com custo de 162,00) e $L_1^3 = 7$ (com custo de 202,50). Com isso, o valor VSS = EVV - RP = 202,50 - 170,82 = 31,86, representando uma diferença de 15,64% entre o EVV e o RP, indicando que é vantajoso considerar as incertezas do problema e, assim, resolver o modelo estocástico de dois estágios. A Figura 4 apresenta as soluções do cenário de referência EV e do problema EVV. Nota-se que na solução EVV, como os itens conhecidos I_0 são fixados pela solução EV, a faixa pode conter áreas não bem ocupadas.

5. Conclusões e Trabalhos Futuros

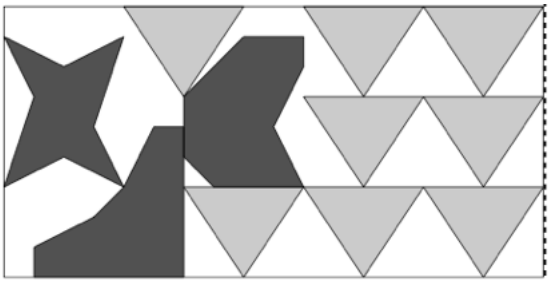
O problema de corte de itens irregulares em faixa bidimensional com demanda incerta foi resolvido através de um modelo de programação estocástica de dois estágios. O objetivo do modelo é determinar o tamanho da faixa a preparar, que seja de menor custo, para atender a demanda de itens conhecidos e a demanda estimada de itens futuros. No primeiro estágio, o modelo obtém o



(a) Cenário $s = 1$, com I_1^1: $L_0 = 10$, $L_1^1 = 10$ e $WS_1^* = 134,99$.

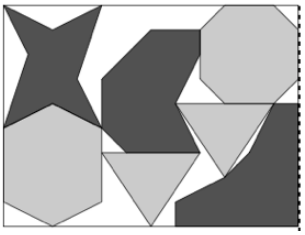


(b) Cenário $s = 2$, com I_2^1: $L_0 = 10$, $L_1^2 = 4$ e $WS_1^* = 107,99$.

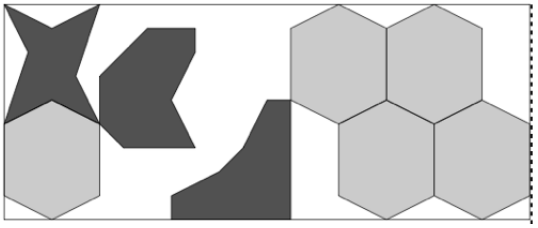


(c) Cenário $s = 3$, com I_3^1: $L_0 = 10$, $L_1^3 = 8$ e $WS_1^* = 126,01$.

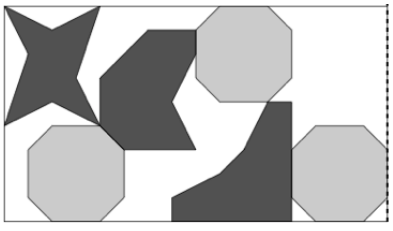
Figura 3: Solução WS_s^* (*wait-and-see*) para cada cenário $s \in \Omega$.



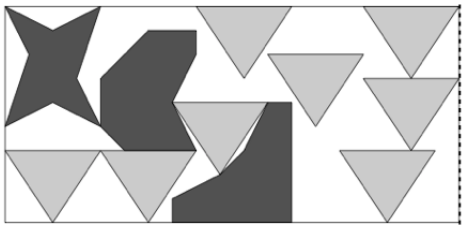
(a) EV, com $I_0 \cup \bar{I}_{ref}$: $L_0 = 12$ e custo de 108,00.



(b) EVV para $s = 1$, com I_0 e I_1^1: $L_0 = 12$, $L_1^1 = 10$ e custo $243,00$.



(c) EVV para $s = 2$, com I_0 e I_2^1: $L_0 = 12$, $L_1^2 = 4$ e custo $162,00$.



(d) EVV para $s = 3$, com I_0 e I_3^1: $L_0 = 12$, $L_1^3 = 7$ e custo $202,50$.

Figura 4: Soluções do cenário de referência EV e do problema EVV.

custo total da faixa, que depende do custo esperado total dado pelo modelo de segundo estágio, em conformidade com os cenários utilizados. O problema traz uma dificuldade intrínseca relacionada a não sobreposição de itens, sendo utilizado os métodos *no-fit raster* e *inner-fit raster* para tal fim.

Embora os resultados computacionais sejam iniciais sobre o modelo proposto, tem sido possível observar que ele pode requerer bastante tempo computacional a fim de obter a solução ótima do problema. Essa necessidade de tempo computacional advém, principalmente, das restrições de não sobreposição, indicando que instâncias com mais cenários ou mais itens devem precisar de bastante tempo para ter uma solução ótima. Considerando as análises de valor esperado da informação perfeita e o valor da solução estocástica, observa-se um desvio percentual de 38,88% e 15,64%, respectivamente. Esses valores apontam que as incertezas afetam o problema e, por conseguinte, a resolução do modelo de programação estocástica, por mais que requeira bastante tempo computacional, é vantajosa para obter soluções mais condizentes com a realidade.

Os trabalhos futuros devem focar na proposta de métodos heurísticos para o problema, visando diminuir o tempo de resolução e resolver instâncias maiores. Pretende-se também estender o modelo para resolver outras variantes de problemas de corte e empacotamento de itens irregulares com aplicação na indústria de couro.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq - 409043/2016-8) e Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP - 2013/07375-0 e 2016/01860-1).

Referências

Alem, D., Munari, P., Arenales, M., e Ferreira, P. (2010). On the cutting stock problem under stochastic demand. *Annals of Operations Research*, 179(1):169–186.

Alem, D. e Morabito, R. (2015a). Modelos de programação estocástica no planejamento da produçã de empresas moveleiras. *Production*, 25:657 – 677. ISSN 0103-6513.

Alem, D. e Morabito, R. (2015b). Planejamento da produção sob incerteza: programação estocástica versus otimização robusta. *Gestão & Produção*, 22(3):539–551.

Bennell, J. e Oliveira, J. (2008). The geometry of nesting problems: A tutorial. *European Journal of Operational Research*, 184(2):397 – 415.

Crainic, T. G., Gobbato, L., Perboli, G., e Rei, W. (2016). Logistics capacity planning: A stochastic bin packing formulation and a progressive hedging meta-heuristic. *European Journal of Operational Research*, 253(2):404–417.

Elkeran, A. (2013). A new approach for sheet nesting problem using guided cuckoo search and pairwise clustering. *European Journal of Operational Research*, 231(3):757 – 769.

Fischetti, M. e Luzzi, I. (2009). Mixed-integer programming models for nesting problems. *Journal Heuristics*, 15:201–226.

Garey, M. R. e Johnson, D. S. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. San Francisco: Freeman.

Gomes, A. M. e Oliveira, J. F. (2006). Solving irregular strip packing problems by hybridising simulated annealing and linear programming. *European Journal of Operational Research*, 171 (3):811 – 829.

Monaci, M., Pferschy, U., e Serafini, P. (2013). Exact solution of the robust knapsack problem. *Computers & Operations Research*, 40(11):2625 – 2631.

Mundim, L. R., Andretta, M., e de Queiroz, T. A. (2017). A biased random key genetic algorithm for open dimension nesting problems using no-fit raster. *Expert Systems with Applications*, 81: 358 – 371.

Mundim, L. R. (2017). *Mathematical models and heuristic methods for nesting problems*. Doutorado em ciências da computação e matemática computacional, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.

Pan, F. e Nagi, R. (2010). Robust supply chain design under uncertain demand in agile manufacturing. *Computers & Operations Research*, 37(4):668–683.

Perboli, G., Tadei, R., e Baldi, M. M. (2012). The stochastic generalized bin packing problem. *Discrete Applied Mathematics*, 160(7):1291 – 1297.

Range, T. M., Kozlowski, D., e Petersen, N. C. (2018). A shortest-path-based approach for the stochastic knapsack problem with non-decreasing expected overfilling costs. *Computers & Operations Research*, 97:111 – 124.

Rodrigues, M. O. e Toledo, F. M. (2017). A clique covering mip model for the irregular strip packing problem. *Computers & Operations Research*, 87:221 – 234.

Rooderkerk, R. P. e Heerde, H. J. (2016). Robust optimization of the 0-1 knapsack problem: Balancing risk and return in assortment optimization. *European Journal of Operational Research*, 250 (3):842 – 854.

Toledo, F. M. B., Carravilla, M. A., Ribeiro, C., Oliveira, J. F., e Gomes, A. M. (2013). The dotted-board model: a new mip model for nesting irregular shapes. *International Journal of Production Economics*, 145:478–487.

Wäscher, G., Haubner, H., e Schumann, H. (2007). An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, 183(3):1109 – 1130.

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings