LII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional
João Pessoa - PB, 3 a 5 de novembro de 2020

MODELO NÃO-LINEAR PARA O PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE BIDIMENSIONAL COM SOBRAS APROVEITÁVEIS

Douglas Nogueira do Nascimento
Departamento de Engenharia de Produção, FEB, UNESP, Bauru, SP, Brasil.
Av. Eng. Luiz Edmundo Carrijo Coube, 14-01, Vargem Limpa, Bauru, SP
douglas.nogueira@unesp.br

Adriana Cristina Cherri
Departamento de Matemática, FC, UNESP, Bauru SP, Brasil.
Av. Eng. Luiz Edmundo Carrijo Coube, 14-01, Vargem Limpa, Bauru, SP
adriana.cherri@unesp.br

José Fernando Oliveira
Departamento de Engenharia e Gestão Industrial, FEUP, Universidade do Porto, Portugal.
Rua Dr. Roberto Frias, s/n. 4200-465, Porto, Portugal
jfo@fe.up.pt

RESUMO

O problema de corte de estoque com sobras aproveitáveis (PCESA) consiste no corte de placas retangulares disponíveis em estoque para a produção de itens demandados, considerando a possibilidade de gerar sobras não demandadas que retornam ao estoque para serem usadas novamente em futuros processos de corte. O aproveitamento de sobras é uma técnica de grande importância prática para muitas empresas, com forte impacto econômico e ambiental, devido à redução no desperdício de matéria-prima. Neste trabalho é proposto um modelo matemático não-linear para representar o PCESA bidimensional. Este modelo é resolvido através de um solver exato. Testes computacionais foram realizados utilizando instâncias da literatura e os resultados mostraram que o modelo proposto representa adequadamente o problema abordado, tendo potencial para ser uma ferramenta de grande benefício se aplicada a situações reais.

PALAVRAS CHAVE. Problema de corte de estoque bidimensional, aproveitamento de sobras, modelo matemático, abordagem não-linear.

OC – Otimização Combinatória, PM – Programação Matemática

ABSTRACT

The cutting stock problem with usable leftovers (CSPUL) consists of cutting rectangular objects available in stock in order to produce a set of demanded items, considering the possibility of generating non-demanded usable leftovers that return to stock to be used in future cutting processes. Usable leftovers is a strategy with practical importance for many companies, with a strong economic and environmental impact, due to the reduction in waste of raw material. In this paper, a non-linear mathematical model is proposed to represent the two-dimensional CSPUL. This model is solved using an exact solver. Computational tests were performed using instances of the literature, and the results showed that the proposed model represents adequately the problem addressed, having the potential to be a tool of great benefit if applied to real situations.

KEYWORDS. Two-dimensional cutting stock problem, usable leftovers, mathematical model, non-linear approach.

Combinatorial optimization, Mathematical Programming

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings

1. Introdução

O problema de corte de estoque (PCE) é um problema muito estudado na literatura científica, com aplicação prática em várias indústrias em que a minimização do desperdício de matérias-primas é fundamental para o desempenho econômico e ambiental das empresas. Considerando problemas de corte de estoque bidimensionais, placas retangulares disponíveis em estoque devem ser cortadas visando a produção de itens retangulares menores. A quantidade de itens produzidos deve atender uma demanda, e o planejamento de todo o processo de corte deve ser feito de modo a minimizar uma função objetivo como, por exemplo, minimizar a perda de material ou minimizar o número de placas utilizadas.

Uma das variações do PCE bastante explorada e comum na prática indústrial é o problema de corte de estoque com sobras aproveitáveis (PCESA). Este problema considera a possibilidade de aproveitar no futuro sobras de processos de corte, ou seja, nem todo o material restante de um processo de corte é considerado desperdício. Neste caso, o processo de corte pode ser planejado de forma a gerar sobras com elevada probabilidade de utilização futura, minimizando as perdas em uma perspectiva multiperíodo. O aproveitamento dessas sobras, se planejado corretamente, pode contribuir com inúmeras vantagens à empresa, como discutido em [Coelho et al., 2017], em que um modelo matemático e duas heurísticas são propostos par resolverem o PCESA unidimensional. Os autores discutem as implicações sustentáveis, econômicas e sociais desse aproveitamento das sobras, que incluem a redução do impacto ambiental das indústrias, o aumento de seus lucros e uma melhora na imagem da empresa frente à sociedade, entre outras.

Ainda referente ao PCESA unidimensional, existem vários trabalhos na literatura, dentre os quais podemos citar [Scheithauer, 1991], [Gradišar et al., 1997], [Cherri et al., 2009] e [Cherri et al., 2013], que resolveram o problema utilizando abordagens heurísticas, além de [Abuabara e Morabito, 2009] que utilizaram o modelo de programação inteira mista proposto em [Gradišar et al., 1997]. Estes e outros trabalhos podem ser vistos com mais detalhes em [Cherri et al., 2014], que fizeram uma revisão de trabalhos da literatura que consideram o PCESA para o caso unidimensional. Em [Arenales et al., 2015] um modelo matemático foi proposto, de modo que as sobras eram geradas em quantidades limitadas e com comprimentos previamente definido. [Tomat e Gradišar, 2017] desenvolveram uma estratégia para determinar o comprimento ideal das novas sobras para que as mesmas não permanecessem muito tempo em estoque.

Relacionado ao PCESA bidimensional, [Cherri, 2009] modificou a abordagem grafo E/OU proposta por [Morabito, 1989], assim como procedimentos heurísticos da literatura para resolver o problema. Embora a perda de matéria prima tenha diminuído com a possibilidade de gerar sobras, por se tratar de problemas bidimensionais, muitas sobras eram geradas em cada padrão de corte.

[Andrade et al., 2014] trataram do problema de corte bidimensional não-guilhotinado com sobras aproveitáveis, e propuseram modelos de programação matemática multinível para representar o problema. [Chen et al., 2015] propuseram uma abordagem heurística para o problema de estoque de corte bidimensional 3-estágios com sobras aproveitáveis. [Andrade et al., 2016] apresentaram dois modelos matemáticos biníveis para resolver o problema de corte bidimensional guilhotinado 2-estágios não-exato com sobras aproveitáveis. A diferença entre os modelos reside na forma como cada um enxerga os itens, sendo que um considera os itens como em um problema de *bin-packing* (apenas demandas unitárias), e outro agrupa itens do mesmo tipo. Esses modelos biníveis foram reformulados de modo a serem representados por dois modelos de apenas um nível que buscam soluções utilizando um conjunto de placas com custo mínimo e, dentre essas soluções, escolher aquela que maximiza o valor da sobra gerada.

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings

Mais recentemente, [Clautiaux et al., 2019] propuseram um procedimento heurístico baseado no método de geração de colunas para resolver o PCESA bidimensional considerando diferentes lotes de produção, cujos itens podem ser combinados na criação de padrões de corte. [Birgin et al., 2020] estenderam a formulação de [Andrade et al., 2014] para o caso multiperíodo, considerando a necessidade de atender a uma série de demandas de itens em um horizonte de planejamento. [Sumetthapiwat et al., 2020] propuseram um modelo matemático que particiona o PCESA bidimensional original em sub-problemas que correspondem ao problema da mochila bidimensional. A abordagem proposta considera valores fixos para as possíveis sobras aproveitáveis geradas, e os autores utilizam uma técnica de geração de colunas para resolver o problema minimizando a perda de material.

Neste trabalho é proposto um modelo matemático não-linear para representar o PCESA bidimensional. Este modelo constrói padrões de corte e, simultaneamente, determina suas frequências de uso. Para a construção dos padrões de corte, as placas disponíveis em estoque são divididas em faixas horizontais, nas quais são alocados os itens demandados. Cada padrão de corte pode gerar no máximo uma sobra aproveitável obtida a partir de um corte guilhotinado horizontal, garantindo que ela tenha a mesma largura da placa cortada, e altura variável dentro de um intervalo pré-definido. Apesar de considerarmos a presença de sobras em estoque, apenas placas padronizadas podem gerar novas sobras aproveitáveis. O modelo proposto foi resolvido através de um solver não-linear exato, e sua eficiência foi verificada através de testes computacionais com instâncias da literatura.

As próximas seções deste trabalho estão divididas da seguinte forma: na Seção 2, definimos com mais detalhes o PCESA bidimensional. Na Seção 3, descrevemos o modelo não-linear proposto. Os resultados dos testes computacionais realizados com instâncias literatura são apresentados na Seção 4, bem como as conclusões referentes a esses resultados. E por último, a Seção 5 será reservada para as conclusões finais e pesquisas futuras.

2. Definição do problema

No PCESA bidimensional, um conjunto de S placas, cada placa $s, s = 1...S$, com dimensão $W_s \times H_s$, deve ser cortado para produzir I tipos de itens com dimensões $w_i \times h_i$ e atendendo uma demanda d_i para cada item $i, i = 1...I$, de modo a minimizar uma determinada função objetivo. Esse processo de corte deve ser planejado considerando a possibilidade de gerar sobras não demandadas que retornarão ao estoque para serem usadas novamente em futuros processos de cortes.

Para exemplificar, considere um PCESA bidimensional em que o estoque é composto por duas placas com dimensões (largura x altura) 51×36 e 48×30. Há quatro tipos de itens com dimensões Item 1 = 8×15, Item 2 = 10×14, Item 3 = 9×5 e Item 4 = 6×7, e demandados nas quantidades $d_1 = 8$, $d_2 = 8$, $d_3 = 2$ e $d_4 = 5$, respectivamente. Como há apenas duas placas disponíveis e a área total dos itens demandados é maior do que a área de cada placa, as duas placas serão usadas na produção dos itens. A Figura 1 mostra dois possíveis padrões de corte que atendem a demanda e geram uma perda de 27,35% de matéria prima.

Inserindo no problema a possibilidade de gerar uma sobra aproveitável, podemos realocar os itens de forma a concentrar uma quantidade maior de itens em um dos padrões de corte e, consequentemente, aumentar o espaço disponível no outro padrão, gerando uma sobra. A Figura 2 exemplifica essa estratégia mostrando uma nova solução que gera uma sobra com dimensão 48×15 e que diminui a perda de material para 5,37%. Seguindo a definição do problema, esta sobra deve retornar ao estoque para atender futuras demandas, não sendo computada como perda.

Observe que os padrões de corte da Figura 2 foram obtidos a partir de cortes *guilhotinados*. Um corte é dito guilhotinado quando ele divide a placa em duas novas partes, ou seja, o corte é

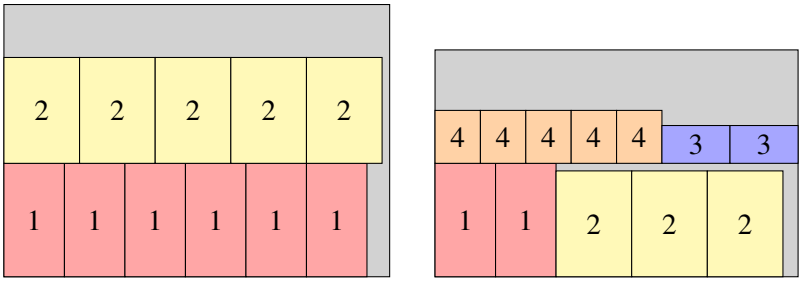


Figura 1: Possível solução para o PCE bidimensional.

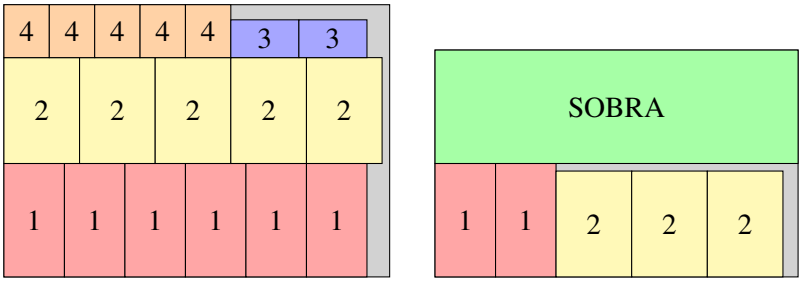


Figura 2: Possível solução para o PCESA bidimensional.

aplicado de uma extremidade a outra da placa e pode ser realizado tanto na direção horizontal quanto na vertical. Um corte que que não possui essa característica é chamado de corte *não-guilhotinado*. A estratégia de solução proposta neste trabalho considera apenas cortes guilhotinados. Na próxima seção, além da estratégia para a elaboração dos padrões de corte, o modelo matemático não-linear é apresentado.

3. Modelo matemático não-linear

Para a formulação do PCESA bidimensional, consideramos S tipos de placas padronizadas e R tipos de sobras disponíveis em estoque. As placas do tipo $s, s = 1...S + R$, possuem largura W_s, altura H_s e disponibilidade e_s. Placas padronizadas podem produzir apenas itens ou produzir itens e uma sobra que retornará ao estoque. As sobras disponíveis em estoque podem ser cortadas apenas para produzir itens, não sendo permitido gerar uma sobra a partir de outra sobra. Uma demanda d_i deve ser atendida considerando os I tipos de itens, $i, i = 1, ..., I$, sendo w_i e h_i suas respectivas larguras e alturas. Por conveniência, os itens são ordenados de modo não-crescente pela altura ($h_1 \geq h_2 \geq h_3 \geq ... \geq h_m$).

O modelo proposto cria padrões de corte considerando o conceito de faixas, ou prateleiras ([Lodi e Monaci, 2003]). Para gerar cada padrão de corte j, primeiramente a placa é dividida em faixas horizontais. Essa divisão é feita de acordo com a altura do maior item em cada faixa. Se um item do tipo i é o maior item em uma faixa f, dizemos que o item *inicializa* a faixa f. Cada tipo de item pode inicializar mais de uma faixa em um padrão de corte.

Após cada faixa ser inicializada, os demais itens, com alturas iguais ou inferiores, são alocados à direita dos itens já posicionados. Nesta abordagem, a rotação dos itens não será considerada. A Figura (3) ilustra um exemplo de padrão de corte inicial, que divide a placa em quatro faixas. Como a faixa 1 é inicializada pelo item A, todos os outros itens que serão alocados nesta faixa devem ter altura menor ou igual a altura do item A. Essa restrição se aplica a cada faixa de cada padrão de corte.

Devido à diversidade de tipos de itens, uma outra estratégia proposta para a composição

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings

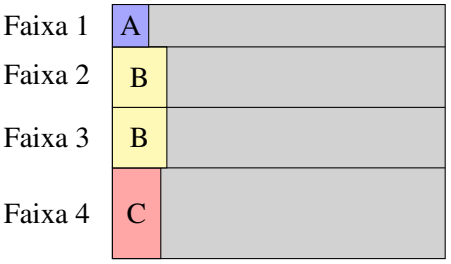


Figura 3: Padrão de corte dividido em faixas horizontais.

dos padrões de corte é a possibilidade de gerar *macro-itens*. Neste trabalho, um macro-item é formado sempre que um item é alocado acima do outro e a altura resultante não ultrapassa a altura do maior item demandado. Cada possível combinação de itens seguindo esta restrição é considerada como um novo tipo de item. Essa estratégia de combinação de itens foi abordada inicialmente por [Wang, 1983], que permitia a combinação vertical e horizontal entre cada par de itens, desde que a perda gerada no retângulo formado pelos itens não excedesse um valor máximo.

Apesar de a utilização de macro-itens aumentar consideravelmente a complexidade do problema e piorar o tempo computacional de resolução, ela é muito importante na minimização da perda de material nos problemas de corte bidimensionais, que é o foco deste trabalho. Aumentando a diversidade de itens, melhores padrões de corte podem ser gerados e, consequentemente, soluções melhores podem ser encontradas. Dessa forma, cabe a esta pesquisa desenvolver e encontrar na literatura métodos de solução que resolvam o modelo proposto com macro-itens de modo eficiente.

Todos os K possíveis macro-itens são definidos *a priori* para o conjunto de itens demandados. A altura h_k^K de um macro-item k é igual a soma das alturas de todos os itens em k. Considerando n_{ik} o número de itens i no macro-item k, então h_k^K é calculada da seguinte forma:

$$h_k^K = \sum_{i=1}^{I} n_{ik} h_i$$

E a largura w_k^K de cada macro-item k é igual a largura máxima entre todos os itens que o compõe, e é calculada por:

$$w_k^K = \max\{w_i \mid n_{ik} \geq 0,\ \forall i = 2, ..., m \mid h_i \leq h_1\}$$

Para ilustrar o conceito de macro-item, a Figura (4) apresenta todos os K = 5 possíveis macro-itens para uma instância com I = 4 tipos de itens. Como a altura do maior item é h_i = 20, este é o limitante superior para a altura dos macro-itens e, consequentemente, o item com maior altura, i = 1, nunca estará em um macro-item.

No exemplo da Figura (4), os parâmetros relativos aos macro-itens seriam:

- Número de possíveis macro-itens: K = 5.
- Altura dos macro-itens: h_k^K = [20 20 17 15 10].
- Largura dos macro-itens: w_k^K = [11 11 11 11 11].
- Número de cada tipo de item nos macro-itens: $n_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

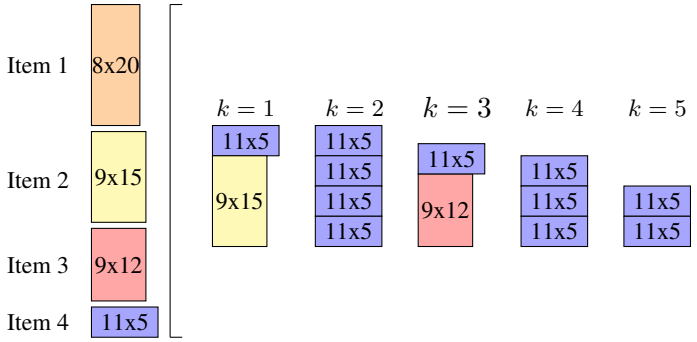


Figura 4: Macro-itens para uma instância com quatro itens.

Como os macro-itens são novos tipos de itens, e suas alturas podem ser diferentes das alturas dos itens originalmente demandados, é possível e permitido que macro-itens inicializem faixas em padrões de corte. Dessa forma, temos um conjunto de H^F possíveis alturas para as faixas, incluindo as diferentes alturas de itens e macro-itens.

No exemplo da Figura 4, temos $H^F = 6$ possíveis alturas para faixas, representadas pelo vetor h_l^F = (20, 17, 15, 12, 10, 5), $l = 1...H^F$. A Figura 5 mostra a inicialização de um padrão de corte com uma faixa inicializada por um macro-item e duas faixas inicializadas por itens.

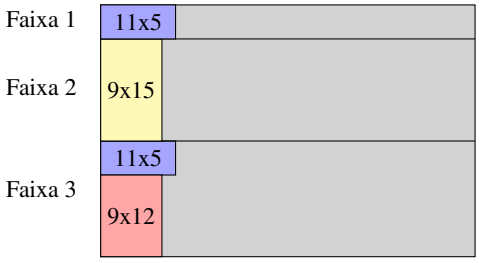


Figura 5: Diferentes itens e macro-itens inicializando faixas em um padrão de corte.

Após uma das possíveis alturas ser atribuída a uma determinada faixa, itens e macro-itens poderão ser alocados nesta faixa, desde que suas alturas não sejam maiores do que a altura da faixa. Para auxiliar nessa restrição, são utilizados os parâmetros m_{il} e m_{kl}^K que indicam, respectivamente, se um item i ou um macro-item k podem ser alocados em uma faixa com a altura l. A definição desses parâmetros é realizada da seguinte forma:

$$m_{il} = \begin{cases} 1, & \text{se a altura do item } i \text{ é igual ou menor do que a altura } l, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$m_{kl}^K = \begin{cases} 1, & \text{se a altura do macro-item } k \text{ é igual ou menor do que a altura } l, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Com relação às sobras aproveitáveis, cada padrão de corte j pode gerar no máximo uma sobra a partir de uma placa padronizada s. Essa sobra obrigatoriamente terá a mesma largura da placa a ser cortada, e altura variável, com valor inteiro, dentro de um intervalo $[h_{min}^R H_s, h_{max}^R H_s]$,

em que $h^R_{max} > h^R_{min}$ e ambos assumem valores no intervalo [0,1]. Desta forma, as alturas máximas e mínimas para as sobras serão proporcionais às alturas das placas cortadas. A Figura (6) ilustra essa estratégia, considerando os parâmetros (h^R_{min}, h^R_{max}) = (0.25, 0.40) e uma placa com dimensões ($W_s \times H_s$) = (30 x 20). Neste cenário, o intervalo para a altura das sobras é [$h^R_{min}H_s$, $h^R_{max}H_s$] = [0.25*20, 0.40*20] = [5, 8]. Assim, as possíveis alturas para sobras serão os valores inteiros neste intervalo, que são 5, 6, 7, 8.

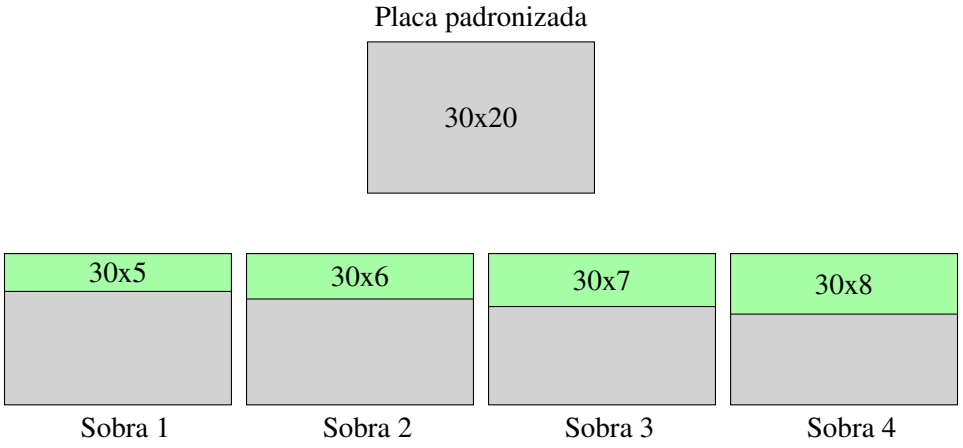


Figura 6: Possíveis sobras para uma placa padronizada.

Ainda com relação as sobras, apesar de não serem consideradas perda, não podemos garantir que elas serão usadas em sua totalidade em futuros processos de corte. Desta forma, o parâmetro $0 \leq \alpha \leq 1$ foi definido para indicar a taxa de aproveitamento das sobras.

Os índices, parâmetros e variáveis utilizadas no modelo matemático são definidos a seguir.

Índices:

- $\{i = 1, ..., I\}$: tipos de itens;
- $\{k = 1, ..., K\}$: tipos de macro-itens;
- $\{f = 1, ..., F_s\}$: máximo número faixas para a placa $s = 1, ..., S + R$;
- $\{l = 1, ..., H^F\}$: possíveis alturas para faixas;
- $\{j = 1, ..., J_s\}$: máximo número de padrões de corte para a placa $s = 1, ..., S + R$. A princípio, consideramos esse parâmetro igual ao número de placas s disponíveis em estoque. Entretanto, outros critérios podem ser usados se a quantidade de placas em estoque for proibitiva.

Parâmetros:

- S: número de tipos de placas padronizadas em estoque;
- R: número de tipos de sobras em estoque;
- W_s: largura da placa tipo s, $s = 1, ..., S + R$;
- H_s: altura da placa tipo s, $s = 1, ..., S + R$;
- e_s: quantidade de sobras do tipo s disponível em estoque, $s = 1, ..., S + R$;
- w_i: largura do item tipo i;

- h_i: altura do item tipo i;
- d_i: demanda para itens do tipo i;
- A_{is}: número máximo de itens do tipo i alocados em uma mesma faixa da placa tipo s, $s = 1, ..., S + R$;
- A^N_{ks}: número máximo de macro-itens do tipo k alocados em uma mesma faixa da placa tipo s, $s = 1, ..., S + R$;
- w^K_k: largura do macro-item tipo k;
- h^K_k: altura do macro-item tipo k;
- n_{ik}: número de itens tipo i no macro-item tipo k;
- h^F_l: altura l para faixas;
- m_{il}: parâmetro binário que indica se a altura do item i é igual ou menor do que a altura l;
- m^K_{kl}: parâmetro binário que indica se a altura do macro-item k é igual ou menor do que a altura l;
- h^R_{min}: altura mínima para sobras geradas;
- h^R_{max}: altura máxima para sobras geradas;
- U: quantidade máxima permitida de sobras geradas;
- α: taxa de aproveitamento para sobras geradas.

Variáveis:

- $y_{lfjs} = \begin{cases} 1, & \text{se a altura } l \text{ é atribuída à faixa } f \text{ do padrão de corte } j \text{ para a placa } s, \\ & s = 1, ..., S + R\,. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$
- a_{ifjs}: número de itens do tipo i alocados na faixa f do padrão de corte j para a placa s, $s = 1, ..., S + R$;
- a^K_{kfjs}: número de macro-itens tipo k alocados na faixa f do padrão de corte j para a placa s, $s = 1, ..., S + R$;
- x_{js}: número de placas tipo s cortadas no padrão de corte j, $s = 1, ..., S + R$;
- g_{js} = $\begin{cases} 1, & \text{se uma sobra é gerada no padrão de corte } j \text{ para a placa } s,\ s = 1, ..., S. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$
- lo_{js}: altura da sobra gerada no padrão de corte j para a placa $s = 1, ..., S$.

Modelo matemático não-linear:

$$\text{Min}: \quad \sum_{s=1}^{S+R} \sum_{j=1}^{J_s} W_s H_s x_{js} - \alpha \sum_{s=1}^{S} \sum_{j=1}^{J_s} W_s lo_{js} x_{js} \tag{1}$$

$$\text{Sujeito a}: \quad \sum_{l=1}^{H^F} y_{lfjs} \leq 1, \qquad \forall f, j, s = 1, ..., S + R \tag{2}$$

$$\sum_{l=1}^{H^F}\sum_{f=1}^{F_s} h_l^F y_{lfjs} + lo_{js} \leq H_s, \quad \forall j, s = 1, ..., S \tag{3}$$

$$\sum_{l=1}^{H^F}\sum_{f=1}^{F_s} h_l^F y_{lfjs} \leq H_s, \quad \forall j, s = S+1, ..., S+R \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{I} w_i a_{ifjs} + \sum_{k=1}^{K} w_k^K a_{kfjs}^K \leq W_s, \quad \forall f, j, s = 1, ..., S+R \tag{5}$$

$$a_{ifjs} \leq A_{is} \sum_{l=1}^{H^F} m_{il} y_{lfjs}, \quad \forall i, f, j, s = 1, ..., S+R \tag{6}$$

$$a_{kfjs}^K \leq A_{ks}^N \sum_{l=1}^{H^F} m_{kl}^K y_{lfjs}, \quad \forall k, f, j, s = 1, ..., S+R \tag{7}$$

$$\sum_{s=1}^{S+R}\sum_{f=1}^{F_s}\sum_{j=1}^{J_s} a_{ifjs} x_{js} + \sum_{k=1}^{K}\sum_{s=1}^{S+R}\sum_{f=1}^{F_s}\sum_{j=1}^{J_s} n_{ik} a_{kfjs}^K x_{js} = d_i, \quad \forall i \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{J_s} x_{js} \leq e_s, \quad \forall s = 1, ..., S+R \tag{9}$$

$$\sum_{s=1}^{S}\sum_{j=1}^{J_s} g_{js} x_{js} \leq U \tag{10}$$

$$lo_{js} \geq h_{min} H_s g_{js}, \quad \forall j, s = 1, ..., S \tag{11}$$

$$lo_{js} \leq h_{max} H_s g_{js}, \quad \forall j, s = 1, ..., S \tag{12}$$

$$lo_{js} \in Z, \quad \forall j, s = 1, ..., S \tag{13}$$

$$y_{ifjs} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, f, j, s = 1, ..., S+R, \tag{14}$$

$$a_{ifjs} \in [0, A_{is}] \text{ and integer}, \quad \forall i, f, j, s = 1, ..., S+R, \tag{15}$$

$$a_{kfjs}^K \in [0, A_{ks}^N] \text{ and integer}, \quad \forall k, f, j, s = 1, ..., S+R, \tag{16}$$

$$x_{js} \in [0, e_s] \text{ and integer}, \quad \forall j, s = 1, ..., S+R, \tag{17}$$

$$g_{js} \in \{0, 1\}, \quad \forall j, s = 1, ..., S. \tag{18}$$

No modelo (1)–(18), a função objetivo (1) minimiza a área total das placas usadas subtraindo a área das sobras aproveitáveis geradas. Essa função objetivo é equivalente a minimizar a perda de material, uma vez que a perda é calculada por $TAP - TAS - TAI$, em que TAP é a área total de placas usadas (padronizadas ou sobras), TAS é a área total de sobras aproveitáveis geradas, e TAI é a área total de itens demandados. Como o conjunto de itens demandados em cada instância é constante, minimizar $TAP - TAS - TAI$ é equivalente a minimizar $TAP - TAS$.

A restrição (2) garante que apenas uma das possíveis alturas seja atribuída a cada faixa, caso ela seja inicializada. As restrições (3) e (4) se referem às alturas das placas padronizadas e das sobras em estoque, respectivamente. São necessárias duas restrições pois, no caso dos padrões de corte para placas padronizadas (Restrição (3)), a soma das alturas de todas as faixas inicializadas e da sobra aproveitável gerada não pode ser maior do que a altura da placa. Enquanto que para os padrões de corte referentes às sobras em estoque (Restrição (4)), apenas as alturas das faixas são

consideradas. A restrição (5) garante que, para cada faixa inicializada em todos os padrões de corte criados, a soma das larguras de todos os itens e macro-itens alocados na faixa não seja maior do que a largura da placa.

As restrições (6) e (7) se referem à altura das faixas, impedindo que itens e macro-itens sejam alocados em faixas com altura menor do que suas próprias alturas. Na restrição (6), se a altura da faixa f em um padrão de corte j para a placa s é menor do que a altura do item i, o lado direito da restrição assume valor 0, forçando a variável a_{ifjs} a também assumir 0 (nenhum item i alocado na faixa). A mesma estratégia foi usada na restrição (7), mas considerando os macro-itens.

A restrição de demanda é dada por (8), que considera a produção de itens e macro-itens. A restrição de estoque (9) garante que a quantidade de placas padronizados e sobras usadas durante o processo de corte não ultrapasse a disponibilidade em estoque, e a restrição (10) limita a quantidade de sobras geradas. As restrições (11) e (12) determinam a alturas mínima e máxima para as sobras geradas. Em ambas restrições, se o padrão de corte j para a placa s não gera sobra aproveitável, a variável binária g_{js} assume valor 0, forçando o lado direito da restrição a ter valor 0. Consequentemente, a variável lo_{js} (altura da sobra aproveitável gerada) também assumirá valor 0.

As variáveis de decisão e seus domínios são definidos em (13)–(18).

O modelo (1)–(18) é não-linear, uma vez que a função objetivo (1), a restrição de demanda (8) e a restrição (10) que limita a quantidade de sobras aproveitáveis geradas possuem multiplicações entre duas variáveis de decisão. Dessa forma, buscamos dois dos principais solvers *open source* de problemas não-lineares. Utilizamos os solvers SCIP, através de uma interface elaborada na linguagem de programação Python, e COUENNE. Ambos os solvers têm como foco a resolução de problemas lineares e não lineares de programação inteira mista (MIP e MINLP) utilizando técnicas de ramificação (*branch-and-bound* e *branch-cut-and-price*), relaxações lineares e métodos para encontrar os melhores limitantes inferiores.

Em todos os testes realizados preliminarmente, mesmo com instâncias pequenas, o solver COUENNE apresentou dificuldade para atingir a solução ótima em um tempo aceitável. Portanto, todos os resultados apresentados na Seção 4 foram obtidos através do solver SCIP. Todos os testes computacionais foram realizados em um notebook com processador Intel(R) Core(TM) i7-7700HQ CPU @ 2.80GHz, 16 GB de memória RAM e sistema operacional Windows 10.

4. Testes computacionais

Para verificar o desempenho do modelo, testes computacionais foram realizados com 20 instâncias de [Andrade et al., 2016] (os parâmetros de cada instância podem ser vistos no próprio artigo). Nesse artigo são propostos dois modelos para resolver o PCESA bidimensional, que aqui serão chamados de M_1 e M_2. A única diferença entre os dois modelos está na forma como eles lidam com os itens demandados. Em M_1, os itens têm demandas unitárias, enquanto que em M_2, itens do mesmo tipo são agrupados, resultando em demandas não unitárias.

Algumas adaptações foram feitas ao modelo não-linear apresentado na Seção 3 para a realização desses testes. A função objetivo de M_1 e M_2 minimiza a área total das placas usadas e, entre as soluções de valor minímo, escolher aquela que maximiza a área de sobras aproveitáveis. Considerando $A1$ a área total das placas usadas, $A2$ a área total de sobras geradas e $A3$ a área total de placas em estoque, a função objetivo de M_1 e M_2 minimiza $[A1 - A2/A3]$. Desta forma, a função objetivo limita o número de sobras geradas, pois o modelo não usará uma placa a mais em estoque para gerar sobra mesmo que isso diminua a área de desperdício. Para que houvesse coerência na comparação dos resultados, consideramos essa função objetivo no modelo não-linear proposto no presente trabalho. Com relação à geração de sobras aproveitáveis, [Andrade et al.,

2016] determinou a altura mínima igual à altura do menor item demandado e a altura máxima igual à altura da placa cortada.

A Tabela 1 apresenta os resultados para os modelos M_1, M_2 e para o modelo não-linear apresentado na Seção 3 considerando dois cenários, com e sem a presença de macro-itens. No cenário sem macro-itens, as soluções são compostas por padrões de corte obtidos através de 2-estágios de corte, sendo que no primeiro estágio ocorrem os cortes horizontais na altura de cada faixa, e no segundo estágio ocorrem os cortes verticais que separam cada item na faixa. Essa mesma estratégia é utilizada em M_1 e M_2. Porém, no cenário com macro-itens há um terceiro estágio, novamente com cortes horizontais, que separam cada item incluído nos macro-itens. Essa estratégia com 3-estágios de corte permite que seja criada uma variedade maior de padrões de corte e, consequentemente, permite que soluções melhores sejam encontradas.

Na Tabela 1, a coluna "Placa"indica a área total das placas utilizadas, a coluna "Sobras"indica a área total de sobras aproveitáveis geradas e a coluna "FO"apresenta o valor da função objetivo. As soluções encontradas por M_1, M_2 e pelo modelo não-linear sem macro-itens são as mesmas. As colunas "Tempo 1", "Tempo 2", "Tempo 3"e "Tempo 4"indicam o tempo de resolução (em segundos) de cada instância pelos modelos M_1, M_2, não-linear sem macro-itens e não-linear com macro-itens, respectivamente. O tempo máximo de resolução permitido para o modelo não-linear foi de 3600 segundos, e os valores marcados com um * indicam que o teste atingiu o tempo máximo de resolução sem chegar à otimalidade. No caso do valor "2319,25*"referente à instância 11 para o modelo M_1, os autores explicaram que a execução foi interrompida pelo solver por falta de memória. E por último, a coluna "Macro"indica a quantidade de possíveis macro-itens para cada instância.

Tabela 1: Comparação do modelo não-linear com M_1 e M_2.

Inst.	M_1/M_2/NL sem macro-itens						NL com macro-itens				
	Placa	Sobra	FO	Tempo 1	Tempo 2	Tempo 3	Macro	Placa	Sobras	FO	Tempo 4
1	5512	520	5511,94	171,06	171,35	768,03	818	5512	572	5511,93	3600*
2	7560	2898	7559,62	1,23	1,51	6,04	249	7560	3087	7559,59	488,11
3	260	52	259,96	1,88	1,9	8,81	350	180	0	180	238,08
4	360	0	360	1286,04	247,56	147,12	952	-	-	-	3600*
5	466	0	466	8752,14	10138,93	294,12	2171	-	-	-	3600*
6	492	48	491,98	451,53	514,95	247,02	1554	-	-	-	3600*
7	180	108	179,87	0,07	0,04	0,06	11	180	108	179,87	0,11
8	864	64	863,98	30,07	12,68	58,23	70	775	26	774,99	112,13
9	380	0	380	1,5	1,5	2,18	291	380	76	379,93	41.82
10	51216	12998	51215,92	0,29	0,26	12,65	19	51216	14938	51215,91	48,23
11	1746	60	1745,99	2319,25*	602	7,18	5	1746	120	1745,98	11,41
12	266	154	265,42	0	0,03	0,03	0	266	154	265,42	0,03
13	684	100	683,95	7,43	0,28	0,21	0	684	100	683,95	0,21
14	180	18	179,98	0,67	0,38	0,11	0	180	18	179,98	0,11
15	1506	0	1506	2981,3	2298,26	8,19	1	1494	0	1494	8,52
16	1365	36	1364,99	7,46	3,55	10,29	7	1362	0	1362	27,02
17	266	168	265,37	0,03	0	0,03	0	266	168	265,37	0,03
18	748	0	748	0,38	0,17	0,09	1	748	132	747,93	0,33
19	2010	0	2010	43,92	5,79	3,29	0	2010	0	2010	3,29
20	1168	132	1167,96	7,95	2,57	1,05	1	1168	132	1167,96	2,71

Pela Tabela 1 é possível observar que o modelo não-linear sem macro-itens encontrou a

solução ótima após um tempo de resolução consideravelmente menor do que M_1 e/ou M_2 em seis instâncias (4, 5, 6, 11, 15 e 19), enquanto para outras cinco instâncias (1, 2, 3, 8 e 10) o modelo não linear foi significantemente mais lento. Nas nove instâncias restantes o tempo de resolução foi similar entre os três modelos.

Considerando a presença de macro-itens, o modelo não-linear não encontrou soluções após o tempo máximo de execução para três instâncias (4, 5, e 6), que são aquelas com as maiores quantidades de possíveis macro-itens (952, 2171 e 1554). Para a Instância 1, o modelo não atingiu a otimalidade após o tempo máximo de execução, mas encontrou uma solução melhor do que os modelos em 2-estágios. No total, o modelo não-linear com macro-itens encontrou soluções melhores para dez instâncias, sendo que para as instâncias 1, 2, 9, 10, 11 e 18 foi possível aumentar a área das sobras geradas, e para as instâncias 3, 8, 15 e 16 a área total de placas usadas foi menor.

5. Conclusão

Neste trabalho, foi proposto um modelo matemático não-linear para resolver o problema de corte de estoque bidimensional com sobras aproveitáveis. A estratégia do modelo é, simultaneamente, criar padrões de corte para cada tipo de placa em estoque e determinar suas frequências. Os padrões de corte são criados dividindo as placas em faixas horizontais, em que itens e macro-itens (novos tipos de itens gerados a partir da combinação dos itens originalmente demandados) serão alocados. De acordo com a abordagem proposta, cada padrão de corte pode gerar até uma sobra aproveitável a partir de um corte horizontal guilhotinado em placas padronizadas disponíveis em estoque. A quantidade de sobras geradas é limitada, e a demanda dos itens deve ser atendida de modo a minimizar a área total utilizada. Para avaliar a eficiência dos modelo não-linear proposto, testes computacionais foram realizados com instâncias de [Andrade et al., 2016]. Os resultados do modelo não-linear com e sem a presença de macro-itens foram comparados com os resultados obtidos pelos dois modelos propostos por [Andrade et al., 2016]. As soluções obtidas pelo modelo não-linear sem macro-itens foram as mesmas apresentadas por [Andrade et al., 2016], em um tempo computacional próximo na maioria dos testes. Com a presença de macro-itens, soluções melhores foram encontradas e o tempo computacional se manteve aceitável para a maioria das instâncias.

6. Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro da FAPESP durante o período de desenvolvimento deste trabalho (Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP [2018/16600-0], [2018/07240-0] e [2016/01860-1]) e CNPq [421130/2018-0, 306558/2018-1].

Referências

Abuabara, A. e Morabito, R. (2009). Cutting optimization of structural tubes to build agricultural light aircrafts. *Annals of Operations Research*, 169(1):149–165.

Andrade, R., Birgin, E. G., e Morabito, R. (2016). Two-stage two-dimensional guillotine cutting stock problems with usable leftover. *International Transactions in Operational Research*, 23: 121–145.

Andrade, R., Birgin, E. G., Morabito, R., e Ronconi, D. P. (2014). Mip models for two-dimensional non-guillotine cutting problems with usable leftovers. *Journal of the Operational Research Society*, 65(11):1649–1663.

Arenales, M. N., Cherri, A. C., Nascimento, D. N. d., e Vianna, A. (2015). A new mathematical model for the cutting stock/leftover problem. *Pesquisa Operacional*, 35(3):509–522.

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings

Birgin, E. G., Romão, O. C., e Ronconi, D. P. (2020). The multiperiod two-dimensional non-guillotine cutting stock problem with usable leftovers. *International Transactions in Operational Research*, 27(3):1392–1418.

Chen, Q., Chen, Y., Cui, Y., Lu, X., e Li, L. (2015). A heuristic for the 3-staged 2d cutting stock problem with usable leftover.

Cherri, A. C. (2009). *Algumas extensões do problema de corte de estoque com sobras de material aproveitáveis*. PhD thesis, ICMC - USP, São Carlos.

Cherri, A. C., Arenales, M. N., e Yanasse, H. H. (2009). The one-dimensional cutting stock problem with usable leftover–a heuristic approach. *European Journal of Operational Research*, 196(3): 897–908.

Cherri, A. C., Arenales, M. N., e Yanasse, H. H. (2013). The usable leftover one-dimensional cutting stock problem—a priority-in-use heuristic. *International Transactions in Operational Research*, 20(2):189–199.

Cherri, A. C., Arenales, M. N., Yanasse, H. H., Poldi, K. C., e Goncalves Vianna, A. C. (2014). The one-dimensional cutting stock problem with usable leftovers - a survey. *European Journal of Operational Research*, 236(2):395–402.

Clautiaux, F., Sadykov, R., Vanderbeck, F., e Viaud, Q. (2019). Pattern-based diving heuristics for a two-dimensional guillotine cutting-stock problem with leftovers. *EURO Journal on Computational Optimization*, 7(3):265–297.

Coelho, K. R., Cherri, A. C., Baptista, E. C., Jabbour, C. J. C., e Soler, E. M. (2017). Sustainable operations: The cutting stock problem with usable leftovers from a sustainable perspective. *Journal of Cleaner Production*, 167:545 – 552.

Gradišar, M., Jesenko, J., e Resinovič, G. (1997). Optimization of roll cutting in clothing industry. *Computers & Operations Research*, 24(10):945–953.

Lodi, A. e Monaci, M. (2003). Integer linear programming models for 2-staged two-dimensional knapsack problems. *Mathematical Programming*, 94(2-3):257–278.

Morabito, R. (1989). Corte de estoque bidimensional. Master's thesis, ICMC - USP, São Carlos.

Scheithauer, G. (1991). A note on handling residual lengths. *Optimization*, 22(3):461–466.

Sumetthapiwat, S., Intiyot, B., e Jeenanunta, C. (2020). A column generation on two-dimensional cutting stock problem with fixed-size usable leftover and multiple stock sizes. *International Journal of Logistics Systems and Management*, 35(2):273 – 288.

Tomat, L. e Gradišar, M. (2017). One-dimensional stock cutting: optimization of usable leftovers in consecutive orders. *Central European Journal of Operations Research*, 25(2):473–489.

Wang, P. Y. (1983). Two algorithms for constrained two-dimensional cutting stock problems. *Operations Research*, 31(3):573–586.

Galoá { Este trabalho foi publicado utilizando o **Galoá** proceedings