ESPALHAMENTO DE ONDAS PLANAS TRANSVERSAIS ELETROMAGNETICAS TE_z E TM_z POR CILINDRO CONDUTOR IMPERFEITO VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Marcelo A. Canavez ⁽¹⁾ (marcelocanavez2@gmail.com), Jéssica B. Oliveira ⁽²⁾
(jessicabonoto@yahoo.com.br), Ramon S. Dornelas ⁽³⁾ (soares.ramon@ufsj.edu.br)

^(1,2) Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (UFSJ), Praça Frei Orlando, 170 – Centro, São João del-Rei - MG, Brasil

⁽³⁾ Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ) - DETEM - Rodovia MG-443, Km 7, Ouro Branco, MG, Brasil

RESUMO: *Este trabalho traz uma rápida revisão sobre o Método dos Elementos Finitos (FEM) e sua aplicação na resolução de problemas de espalhamento em cilindros condutores imperfeitos, além da evolução histórica dos métodos de análise deste problema. O espalhamento de ondas transversais é um problema clássico do Eletromagnetismo e apresenta vários métodos de análise e equacionamentos. Neste trabalho, o equacionamento da incidência e espalhamento de ondas transversais elétricas e transversais magnéticas por cilindros condutores imperfeitos é desenvolvido analiticamente e numericamente via FEM. Desta forma, busca-se um direcionamento no desenvolvimento do método, muitas vezes resumido demasiadamente pela literatura. Além do equacionamento, é apresentado um guia com 7 passos para desenvolvimento e análise do Método dos Elementos Finitos. Por fim são apresentados os resultados numéricos e analíticos para simulações para variações angulares entre 0 e π , com o intervalo sendo dividido em 2000 pontos nos dois casos. Para o método numérico, foi feita a aproximação por funções de base triangulares e no analítico o somatório foi limitado ao intervalo de -150 a +150 para cada ponto. As simulações numéricas e analíticas foram feitas no software MATLAB®.*

PALAVRAS-CHAVE: *Método dos Elementos Finitos, espalhamento de ondas transversais elétrica, espalhamento de ondas transversais magnéticas, cilindro condutor imperfeito, solução analítica, solução numérica.*

1. INTRODUÇÃO

O espalhamento de ondas eletromagnéticas no espaço livre através de um cilindro infinito é um problema de muitas décadas. Primeiramente foi resolvido por Lord Rayleigh em 1881 e por Seitz e Ignatowski in 1905. Teve sua generalização completada para incluir incidência oblíqua por Wellman em 1937, a qual Van de Hustl provou estar errada em 1957, tendo sua conclusão finalizada por Wait em 1955 (Wait, 1965). Contudo, em 1963 já haviam discussões sobre um método que pudesse calcular o campo elétrico total causado pela incidência e espalhamento de uma onda transversal eletromagnética por cilindros de secção transversal arbitrária circular ou elíptica. Existiam somente soluções para espalhamento por cilindros dielétricos homogêneos ou não, por um número finito de seções transversais (Richmond, 1965).

O espalhamento de onda plana através de cilindros em um meio isotrópico e homogêneo é um problema clássico que tem soluções apresentadas em vários livros de eletromagnetismo como Wait (1965), Richmond (1965), Borghi et. al (1996), Freni (1998) e Freeza (2009). Para resolver este entre outros problemas eletromagnéticos complexos para materiais condutores ou dielétricos, métodos numéricos são empregados por serem geometricamente independentes e poderem ser usados para

IX COEN – Congresso de Engenharias da UFSJ
Interconexão.

encontrar soluções aproximadas. Esses métodos são necessários principalmente quando a geometria do problema é modificada ou o cilindro é colocado próximo ao plano de descontinuidade para constantes eletromagnéticas, fazendo com que problema de espalhamento assuma uma forma mais complicada (Borghì et. al, 1996; Freeza, 2009; Ozgun, 2017).

Para isso, transformam o sistema original contínuo em um sistema discreto aproximado e produzem soluções precisas para uma parte dos problemas através de diferentes métodos. Estes são desenvolvidos a partir da aplicação em diferentes processos, aparentemente não correlacionados. Os métodos mais conhecidos de montagem e solução da matriz criada são o Método dos Momentos (MoM), da Equação Integral (EI), das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo (FDTD) e dos Elementos Finitos (FEM). O FEM e o Método das Diferenças Finitas são os métodos numéricos mais comumente usados em eletromagnetismo (Chen et. al, 2007).

Contudo, a criação do Método dos Elementos Finitos (FEM) começou a se desenvolver na mesma época que estava se estudando problemas de espalhamento, mas só foi aplicada de fato em problemas de eletromagnetismo anos depois. Na década de 1900, pesquisadores sugeriram a divisão de domínios contínuos para discretos para superar problemas oriundos do padrão de barras elásticas. Em 1943, Courant usou o princípio de energia potencial estacionária e um polinômio que interpolava sobre sub-regiões triangulares. Em 1953, começaram a serem escritas equações matriciais de rigidez sendo resolvidas em computadores digitais e a serem aplicados para modelagem aeroespacial de asas por Turner da Companhia Boeing Airplane, por estruturas planas triangulares. Em 1960, Clough terminou de desenvolver o FEM para aplicações na análise de tensões mecânicas através de diversos novos elementos e também mostrou que a solução de problemas variacionais estava ligada a problemas de minimização de funções (Cook et. al, 1974).

O método pode ser aplicado em sua forma variacional em diversos campos graças ao grande avanço tecnológico das décadas de 1960, 1970, e de 1980, inclusive com objetivo de otimização. Este, entre outros métodos numéricos, passou a ser aplicado ao eletromagnetismo a partir de 1968 (Cook et. al, 1974; Sadiku, 1989).

Diversas aplicações do Método dos Elementos Finitos no eletromagnetismo ou outras áreas, podem ser encontradas em Gordon et. al (1993), Freni (1998), Young (2007), Aiello et. al (2017) e Jia et. al (2017).

Os problemas de espalhamento de ondas eletromagnéticas através de guias levam a um sistema de equações de ordem proporcional a dimensão elétrica e complexidade destes guias, demandando um tempo computacional elevado para guias (dispersores) complexos, o que justifica o uso do FEM (Elsherbeni, 1992).

Neste trabalho será realizada uma aplicação do Método dos Elementos Finitos para calcular os campos eletromagnéticos provenientes da incidência e espalhamento de ondas eletromagnéticas no espaço livre através de um guia condutor cilíndrico, mais especificamente do espalhamento de uma onda plana transversal magnética (TM_z) e uma transversal elétrica (TE_z) em relação ao eixo z através deste guia. Na Seção *Metodologia* são apresentados separadamente os equacionamentos para o método analítico e para o método numérico para esta aplicação. Já na Seção *Resultados*, são apresentadas figuras comparando os resultados obtidos pelos dois métodos.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

O método analítico, de modo geral, apresenta maior exatidão na resolução dos modelos matemáticos de fenômenos que envolvem problemas complexos, geralmente obtidas a partir de fórmulas explícitas. Desta forma, possuem a vantagem de fornecer informações gerais e mais completas em relação a natureza e a dependência das funções envolvidas no modelo. Contudo, a modelagem requer conhecimento aprofundado sobre o fenômeno analisado, como as leis da física por exemplo e sobre ferramentas matemáticas. O resultado são equações matemáticas, muitas vezes se apresenta nas formas diferenciais ou integrais, relacionando quantidades de interesse e o processo físico, em alguns casos não lineares. Desta forma, a solução analítica pode envolver modelagem muito complexa, o que torna a solução desconhecida ou impossível de se obter em algumas aplicações, ou ainda que exija demasiado esforço (Reddy, 1993, Francisco e Jânio, 2010).

O método numérico é uma ferramenta importante que surge para suprir esta limitação, sendo aplicado quando é possível aceitar soluções aproximadas estes problemas. Este é constituído por uma sequência finita de operações aritméticas que, sob certas condições, aproximam a solução do problema. A aplicação das técnicas desenvolvidas no cálculo numérico para a resolução de problemas geralmente envolve grande volume de cálculos. Assim, este método apresenta a desvantagem da alta demanda de esforço computacional. Nas últimas décadas, entretanto, com o desenvolvimento de computadores rápidos e do avanço no ambiente de programação, a importância dos métodos numéricos têm aumentado, principalmente na resolução de problemas complexos (Reddy, 1993, Francisco e Jânio, 2010).

No contexto dos métodos numéricos, o Método dos Elementos Finitos apresenta entre suas vantagens a geração de uma matriz esparsa, a aplicabilidade a meios não homogêneos e o fato de apresentar soluções aproximadas de problemas de valores de contorno governados por equações diferenciais parciais. O domínio computacional pode ser discretizado pelo uso de elementos em uma dimensão através de funções simples como a rampa, em duas elementos triangulares ou quadrilaterais bilineares (ou combinações), para três dimensões são usados tetraedros, aumentando o nível de complexidade das funções para mais dimensões. A solução dos campos a serem determinados é expressa como a combinação linear das funções de base de cada elemento. Para cada elemento, a matriz é calculada pela forma fraca da equação diferencial usando o método residual de pesos. Os elementos das matrizes são agregados para construir o sistema global de equações, que é então resolvido para os campos desconhecidos dentro do domínio (Reddy, 1993; Ozgun, 2017).

Os passos para implementação da análise dos elementos finitos ao eletromagnetismo são (Cook et. al, 1974; Ney, 1985; Sadiku, 1989; Reddy, 1993; Taylor et. al, 2005):

1. Definir o problema a ser resolvido em termos das equações diferenciais e construir a forma integral do problema como uma forma virtual, variacional ou forma fraca.
2. Discretizar a solução contínua em um número finito de elementos, selecionando o tipo, ordem e geometria das funções dos elementos a serem usados na análise, de modo a ter uma boa aproximação do comportamento das distribuições das variáveis contínuas. Se isto é feito computacionalmente, o processo pode ser simplificado, mas o computador demandará um tempo maior para determinação de novos coeficientes.
3. Desenvolver as equações dos elementos finitos através da aplicação das leis de Maxwell para o domínio contínuo, associar estas a cada elemento e alocar os mesmos na matriz global, assegurando que todos estejam dentro da região de solução.

4. Computar os elementos e montar as matrizes dos mesmos.
5. Inserir as condições de contorno prescritas na matriz final já preenchida e incorporar às funções.
6. Resolver o sistema resultante de equações algébricas para encontrar o campo elétrico e magnético para ondas transversais eletromagnéticas.
7. Imprimir e interpretar os resultados obtidos que podem ser melhor observados a partir de um gráfico.

Existem formas de simplificar o FEM, entre elas o método de Galerkin, que simplifica as equações utilizados no FEM, que passa a ser chamado de Método dos Elementos Finitos Generalizado, além de ser vastamente usado, este facilita a obtenção dos resultados permitindo que as equações nas formas integrais possam ser obtidas pelo somatório das contribuições de diversos subdomínios, com pesos residuais diferentes (Taylor et. al 2005). Este método pode ser encontrado de forma mais detalhada em Ney (1985), com suas principais vantagens e desvantagens, bem como aplicações no Método dos Momentos. Existem exemplos que mostram como pode ser útil o método de Galerkin juntamente com o FEM aplicado às condições de contorno e equações de Maxwell de forma a obter um conjunto de equações lineares para cálculo dos campos eletromagnéticos, avaliando o efeito de ondas planas obliquamente incidentes em cilindros axialmente periódicos de geometria e materiais arbitrários (Freni et. al, 1998).

Problemas de simulação do espalhamento do guia no espaço infinito tem domínio infinito, por isso devem limitados de forma a não causar reflexões não físicas do campo espalhado. Para isso são criadas as condições de contorno apropriadas para radiação em planos distantes, assim, o guia não deve ser afetado por outras ondas espalhadas viajantes (Kriegsmann et. al 1987; Young et. al 2007).

Para resolução do Método dos Elementos Finitos, geralmente emprega-se condições de contorno integrais (FE-BI) ou absorventes (FE-ABC ou OSRC). O FE-BI é útil para analisar antenas conformes no sistema de curva generalizado e é versátil para descrever estruturas irregulares. As condições de contorno absorventes apresentam um maior custo operacional pois alargam o domínio computacional, entretanto, tem a vantagem de ser mais simples e flexível que o FE-BI devido à não inclusão de integrais muito complexas (Ozgun, 2017).

As OSRCs são aplicáveis a cilindros de seção transversal arbitrária, permitindo equacionar tanto o efeito de ondas transversais elétricas quanto magnéticas. Ela foi motivada por experimentos das décadas de 1960 e 1970 que usaram a o modelo das diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD) para equacionar a propagação de ondas eletromagnéticas (Young et. al, 2007). O OSRC é baseado na expansão das condições de radiação diretamente na superfície do guia condutor e leva a grande simplificação do problema dos campos espalhados nas integrais no domínio da frequência. As ondas que saíam pelas laterais do guia são assumidas como existentes somente na superfície do mesmo, por isso podem levar a erros elevados onde isto não puder ser aplicado (Konidaris, 1990). Essa abordagem preserva a esparsidade, ao contrário das condições de contorno híbridas que fornecem matriz de elementos cheia. Além disso, o erro causado por essa aproximação pode ser minimizado distanciando o contorno do guia, o que causa a desvantagem de aumentar o número de incógnitas e o tamanho das matrizes (Gordon et. al, 1993).

Existem técnicas mais avançadas a serem testadas nas abordagens do FEM, ao se aplicar o método de fronteira (BEM) por elemento em conjunto com o FEM, reduz-se a complexidade, mas tem uma limitação devido ao aumento moderado no tamanho elétrico. Por isso aplicam-se técnicas mais avançadas como a Decomposição do Domínio sem Sobreposição (DDM) devido ao

funcionamento como pré-condicionador, permitindo que cada subdomínio seja discretizado de forma independente (Jia et. al, 2017).

Existem outras variações do método FEM, pertencentes aos métodos híbridos e que fazem iterações nas condições de contorno e pertencem aos métodos híbridos, tendo uso apropriado, por exemplo, em otimização estocástica, por precisar de menos tempo computacional, contudo com resultados menos precisos que o FEM-BEM (Aiello et. al, 2017). (Hu et. al, 2009) utiliza ainda o FE-BI como método híbrido de forma a combinar os métodos baseados em equações diferenciais, integrais e HF, através da consideração das iterações mútuas entre domínios do FEM.

3. METODOLOGIA

Geralmente o guia de onda é localizado longitudinalmente a direção z e assume-se $E_z = 0$ para o caso transversal elétrico (TE^z) e $H_z = 0$ para o transversal magnético (TM^z). Os vetores de campo elétrico e magnético, em conjunto com o vetor de Poynting utilizam um sistema de orientação pela mão direita, igual ao usado no sistema cartesiano. Estas definições se baseiam no fato de a onda ser emitida transversalmente, mas se propagar longitudinalmente. Todas as derivadas de campos e componentes em outras direções são deduzidas da componente H_z para o caso TE^z e E_z para o caso TM^z (Sevgi, 2008).

Analicamente, o estudo desse espalhamento requer todo um formalismo que será esboçado logo abaixo para os dois casos (Harrington, 1961; Jin, 2002; Balanis, 2012):

Será analisado primeiramente o espalhamento de uma onda plana TE^z por um cilindro infinito feito de material condutor imperfeito e posteriormente para a TM^z . Para os dois casos, consideram-se as constantes de propagação $k_z = 0$, $k = k_\rho$ e $k^2 = k_\rho^2 + 0 = \omega^2 \mu \epsilon$, e o vetor de Poynting é dado por:

$$k_i = k\hat{x} \quad (1)$$

3.1 Caso TE^z

O campo magnético total pode ser obtido pela soma do campo incidente e espalhado.

$$\vec{H} = \vec{H}_i + \vec{H}_s \quad (2)$$

O campo incidente pode ser encontrado pelo produto entre uma constante e exponencial complexa do vetor de Poynting:

$$\vec{H}_i = H_0 e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \hat{z} = H_0 e^{-jkx} \hat{z} = H_0 e^{-jk\rho \cos\theta} \hat{z} = H_z^i \quad (3)$$

A função exponencial pode ser aproximada através do somatório (4), sendo J_n a função de Bessel de primeira espécie e ordem n :

$$H_z^i = H_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} J_n(k\rho) e^{jn\varphi} \quad (4)$$

Para se encontrar a solução do caso TE^z , admite-se uma função do campo magnético espalhado (5) e obtém-se a expressão completa após passar pelas identidades (6) e (8), sendo C_n uma constante e $\mathcal{H}_n^2$ a função de Hankel de segunda espécie e ordem n :

$$\psi_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \mathcal{H}_n^2(k\rho) e^{jn\varphi} \quad (5)$$

Para o caso TE^z , ψ_s deve atender a identidade:

$$\vec{H}_s = H_z^s = \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k^2 \psi \right] = \frac{k^2 \psi_s}{j\omega\mu\varepsilon} \quad (6)$$

Substituindo-se a Equação 5 na Equação 6 e substituindo o valor de k :

$$\vec{H}_s = H_z^s = \frac{k^2}{j\omega\mu\varepsilon} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \mathcal{H}_n^2(k\rho) e^{jn\varphi} = -j\omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \mathcal{H}_n^2(k\rho) e^{jn\varphi} \quad (7)$$

Determina-se C_n usando as condições de contorno tangenciais, sendo ε_r a permissividade elétrica relativa e η a impedância intrínseca do meio:

$$\frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = jk\eta H_z \quad (8)$$

Substituindo a Equação 2 na Equação 9:

$$\frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial H_z^i}{\partial \rho} - jk\eta H_z^i = \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial H_z^s}{\partial \rho} - jk\eta H_z^s \quad (9)$$

Seja $\varepsilon_r = 1$:

$$\frac{\partial H_z^i}{\partial \rho} - jk\eta H_z^i = \frac{\partial H_z^s}{\partial \rho} - jk\eta H_z^s \quad (10)$$

Derivando os campos magnéticos em relação a ρ :

$$\frac{\partial H_z^i}{\partial \rho} = kH_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} \mathcal{J}_n'(k\rho) e^{jn\varphi} \quad (11)$$

$$\frac{\partial H_z^s}{\partial \rho} = -j\omega k \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \mathcal{H}_n'^2(k\rho) e^{jn\varphi} \quad (12)$$

Substituindo as derivadas e agrupando, em $\rho = a$:

$$kH_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} e^{jn\varphi} \mathcal{J}_n'(k\rho) (\mathcal{J}_n'(ka) - \mathcal{J}_n(ka)) j\eta = -j\omega k \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\varphi} j\eta C_n (\mathcal{H}_n'^2(ka) - \mathcal{H}_n^2(ka)) \quad (13)$$

Resultando em um valor de C_n de:

$$C_n = \frac{H_0 j^{-n} e^{jn\varphi}}{j\omega} \left(\frac{\mathcal{J}_n'(ka) - \mathcal{J}_n(ka) j\eta}{\mathcal{H}_n'^2(ka) - \mathcal{H}_n^2(ka) j\eta} \right) \quad (14)$$

Substituindo a Equação 15 nas Equações 2, 4 e 7 e agrupando, têm-se:

$$H = H_z = H_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} e^{jn\varphi} (\mathcal{J}_n(k\rho) - \mathcal{H}_n^2(k\rho) \left(\frac{\mathcal{J}_n'(ka) - \mathcal{J}_n(ka) j\eta}{\mathcal{H}_n'^2(ka) - \mathcal{H}_n^2(ka) j\eta} \right)) \quad (15)$$

3.2 Caso TM^z

O campo elétrico total pode ser obtido pela soma do campo incidente e espalhado:

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_s \quad (16)$$

O campo incidente pode ser encontrado pelo produto entre uma constante e exponencial complexa do vetor de Poynting:

$$\vec{E}_i = E_0 e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \hat{z} = E_0 e^{-jkx} \hat{z} = E_0 e^{-jk\rho \cos\theta} \hat{z} = E_z^i \quad (17)$$

A função exponencial pode ser aproximada através do somatório (4), sendo $\mathcal{J}_n$ a função de Bessel de primeira espécie e ordem n :

$$E_z^i = E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} \mathcal{J}_n(k\rho) e^{jn\varphi} \quad (18)$$

Para se encontrar a solução do caso TM^z , admite-se uma função do campo elétrico espalhado (19) e obtém-se a expressão completa após passar pelas identidades (20) e (22), sendo C_n uma constante e $\mathcal{H}_n^2$ a função de Hankel de segunda espécie e ordem n :

$$\psi_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \mathcal{H}_n^{(2)}(k\rho) e^{jn\varphi} \quad (19)$$

Para o caso TM^z , ψ_s deve atender a identidade:

$$\vec{E}_s = E_z^s = \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k^2 \psi \right] = \frac{k^2 \psi_s}{j\omega\mu\epsilon} \quad (20)$$

Substituindo a Equação 20 na Equação 21 e substituindo o valor de k :

$$E_z^s = \frac{k^2}{j\omega\mu\epsilon} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \mathcal{H}_n^2(k\rho) e^{jn\varphi} = -j\omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \mathcal{H}_n^2(k\rho) e^{jn\varphi} \quad (21)$$

Determina-se C_n usando as condições de contorno tangenciais, sendo μ_r a permeabilidade magnética relativa.

$$\frac{1}{\mu_r} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = \frac{jk}{\eta} E_z \quad (22)$$

Seja $\mu_r = 1$:

$$\frac{\partial E_z}{\partial \rho} - \frac{jk}{\eta} E_z = 0 \quad (23)$$

Substituindo a Equação 16 na Equação 23:

$$\frac{\partial E_z^i}{\partial \rho} - \frac{jk}{\eta} E_z^i = \frac{\partial E_z^s}{\partial \rho} - \frac{jk}{\eta} E_z^s \quad (24)$$

Derivando os campos elétricos em relação a ρ :

$$\frac{\partial E_z^i}{\partial \rho} = k E_o \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_n'(k\rho) e^{jn\varphi} j^{-n} \quad (25)$$

$$\frac{\partial E_z^s}{\partial \rho} = -j\omega k \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \mathcal{H}_n^{2'}(k\rho) e^{jn\varphi} \quad (26)$$

Substituindo as derivadas e agrupando, em $\rho = a$:

$$E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} k j^{-n} \left[\mathcal{J}_n'(ka) - \frac{j}{\eta} \mathcal{J}_n(ka) \right] e^{jn\varphi} = \frac{k^3}{j\omega\mu\epsilon} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \left[\mathcal{H}_n^{2'}(ka) - \frac{j}{\eta} \mathcal{H}_n^2(ka) \right] e^{jn\varphi} \quad (27)$$

Resultando em um valor de C_n de:

$$C_n = \frac{j^{-n} E_0 \left[\mathcal{J}_n'(ka) - \frac{j}{\eta} \mathcal{J}_n(ka) \right]}{j\omega \left[\mathcal{H}_n^{2'}(ka) - \frac{j}{\eta} \mathcal{H}_n^2(ka) \right]} \quad (28)$$

Substituindo o valor da Equação 28 nas Equações 16, 18 e 21, têm-se:

$$E_z = E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} e^{jn\varphi} \mathcal{J}_n(k\rho) - j\omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\varphi} C_n \mathcal{H}_n^2(k\rho) \quad (29)$$

$$E = E_z = E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} e^{jn\varphi} \left(\mathcal{J}_n(k\rho) - \mathcal{H}_n^2(k\rho) \frac{\left(\mathcal{J}_n'(ka) - \mathcal{J}_n(ka) \frac{j}{\eta} \right)}{\left(\mathcal{H}_n^{2'}(ka) - \mathcal{H}_n^2(ka) \frac{j}{\eta} \right)} \right) \quad (30)$$

As soluções analíticas são dadas pelas Equações 15 e 30.

3.3 Soluções numéricas

A solução numérica para o espalhamento da onda plana por um cilindro constituído de condutor elétrico imperfeito é analisada através do equacionamento que segue abaixo. As etapas elaboração e resolução deste problema em uma dimensão, como determinação das funções de base (neste caso triangulares), método de Galerkin, e condições de contorno absorventes serão omitidas e podem ser encontradas de forma detalhada em Kriegsmann (1987) e Jin (2002). Nas equações, tem-se Φ , que é campo total, sendo feita a consideração seguinte: $\Phi = E_z$ para o caso do espalhamento de onda TM^z e $\Phi = Hz$ para o espalhamento de onda TE^z . Nas equações, κ representa a curvatura da superfície no ponto s e k_o é a constante de propagação no espaço livre.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \left[jk_o + \frac{\kappa}{2} - \frac{j\kappa^2}{8(j\kappa - k_o)} \right] \Phi - \frac{j}{2(j\kappa - k_o)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} \\ = \frac{\partial \Phi^i}{\partial n} + \left[jk_o + \frac{\kappa}{2} - \frac{j\kappa^2}{8(j\kappa - k_o)} \right] \Phi^i - \frac{j}{2(j\kappa - k_o)} \frac{\partial^2 \Phi^i}{\partial s^2} \end{aligned} \quad (31)$$

Através da Equação 31, pode-se perceber a presença de condições de contorno absorventes para o campo espalhado incidente e campo espalhado total. No modelo apresentando no trabalho, a análise é feita para uma dimensão, sendo os resultados mostrados na Seção *Resultados*. A aplicação

do Método dos Elementos Finitos em conjunto com a condição de contorno para os campos no condutor elétrico imperfeito, segue o equacionamento:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = j k_o \xi \Phi \quad (32)$$

Sendo,

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{\eta}, \text{ quando o campo } E_z \text{ for incidente} \\ \xi &= \eta, \text{ quando o campo } H_z \text{ for incidente} \end{aligned}$$

O valor estipulado para η , que é a impedância intrínseca do meio 2, no caso para o condutor elétrico imperfeito é de $\eta = \sqrt{\mu_{r2} \epsilon_{r2}}$. Após aplicar essa condição a Equação 31, tem-se:

$$\begin{aligned} \left[j k_o (1 + \xi) + \frac{\kappa}{2} - \frac{j \kappa^2}{8(j\kappa - k_o)} \right] \Phi - \frac{j}{2(j\kappa - k_o)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} \\ = \frac{\partial \Phi^i}{\partial n} + \left[j k_o (1 + \xi) + \frac{\kappa}{2} - \frac{j \kappa^2}{8(j\kappa - k_o)} \right] \Phi^i - \frac{j}{2(j\kappa - k_o)} \frac{\partial^2 \Phi^i}{\partial s^2} \end{aligned} \quad (33)$$

Multiplicando (33) por $-2j(j\kappa - k_o)$:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} - 2j(j\kappa - k_o) \left[j k_o (1 + \xi) + \frac{\kappa}{2} - \frac{j \kappa^2}{8(j\kappa - k_o)} \right] \Phi \\ = -2j(j\kappa - k_o) \frac{\partial \Phi^i}{\partial n} - 2j(j\kappa - k_o) \\ - 2j(j\kappa - k_o) \left[j k_o + \frac{\kappa}{2} - \frac{j \kappa^2}{8(j\kappa - k_o)} \right] \Phi^i - \frac{\partial^2 \Phi^i}{\partial s^2} \end{aligned} \quad (34)$$

Reescrevendo, têm-se:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \beta \Phi = f \quad (35)$$

Comparando as Equações 35 e 34, para $\Phi = \Phi$ e $\alpha = 1$, têm-se:

$$\beta = -2j(j\kappa - k_o) \left[j k_o (1 + \xi) + \frac{\kappa}{2} - \frac{j \kappa^2}{8(j\kappa - k_o)} \right] \quad (36)$$

$$f = -2j(j\kappa - k_o) \frac{\partial \Phi^i}{\partial n} - 2j(j\kappa - k_o) \left[j k_o + \frac{\kappa}{2} - \frac{j \kappa^2}{8(j\kappa - k_o)} \right] \Phi^i - \frac{\partial^2 \Phi^i}{\partial s^2} \quad (37)$$

Para usar equações diferenciais de 2ª ordem no Método dos Elementos Finitos em uma dimensão, é necessário que essas estejam na sua forma fraca, portanto deve haver a conversão da

forma forte para a fraca, que é feita através dos método dos resíduos ponderados. Nesta, usa-se uma função teste que será multiplicada pela equação diferencial, para que a integral do domínio possa ser calculada. Essa conversão é dada a partir da Equação 35, sendo multiplicada pela função base v e integrada:

$$\int_a^b -v \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + v \beta \Phi dx = \int_a^b v f dx \quad (38)$$

$$\int_a^b \frac{\partial v}{\partial x} \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(v \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + v \beta \Phi dx = \int_a^b v f dx \quad (39)$$

$$\int_a^b v f dx = \int_a^b \frac{\partial v}{\partial x} \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx - \left[v \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_a^b + \int_a^b v \beta \Phi dx \quad (40)$$

Adotando o valor de $\left[v \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_a^b = 0$, a qual se deve a condição de Neumann Homogênea nas duas extremidades. Neste caso, v representa as funções de base escolhidas para os elementos.

$$\int \frac{\partial v}{\partial x} \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \int v \beta \Phi dx = \int v f dx \quad (41)$$

Por simplicidade as fórmulas das derivadas dos campos elétrico e magnético em relação a ρ e Φ não serão apresentadas, podendo ser obtidas analiticamente a partir das derivadas dos termos das fontes, nas Equações 4 e 18.

4. RESULTADOS

As soluções analíticas são obtidas considerando os somatórios de n variando de -150 a +150, dividindo o intervalo de 0 a π em 2000 partes iguais, nas Equações 15 e 30, com $ka = 2\pi$, $k\rho = 2\pi$ e $\eta = 2$. As constantes E_0 e H_0 são iguais a 1. Para a solução numérica, o intervalo e as constantes serão as mesmas, com exceção do somatório, através da aplicação das Equações 4 e 18 e suas derivadas na Equação 31. Ambas soluções são feitas e comparadas através do software MATLAB.

Primeiramente são apresentados os resultados para TM^z obtendo o campo elétrico para as soluções numérica e analítica, na Figura 1. Analogamente, são apresentados na Figura 2 as soluções numérica e analítica para TE^z , obtendo o campo magnético.

As Figuras 1 e 2, mostram que a solução numérica torna uma melhor aproximação para analítica à medida que as defasagens angulares se aproximam de π , ou 180° , para a dispersão da onda em ambas polaridades. Os resultados obtidos corroboram com Kriegsmann (1987) e Jin (2002), que utilizam as mesmas condições iniciais.

Figura 1. Campo elétrico total para condutor imperfeito para onda plana em TM^z .

Figura 2. Campo magnético total para condutor imperfeito para onda plana em TE^z .

5. CONCLUSÃO

Este artigo faz uma breve revisão sobre o Método dos Elementos Finitos, além de apresentar um guia para facilitar a sua aplicação. Apresenta também o equacionamento completo para o método analítico do espalhamento de ondas polarizadas transversalmente ao campo elétrico e também para ondas transversais ao campo magnético em cilindros condutores imperfeitos. No caso do método numérico, o equacionamento foi apresentado de forma mais condensada através de aproximações feitas para uma dimensão. Os resultados obtidos, estão de acordo com as referências consultadas na literatura e mostram que os campos elétricos e magnéticos obtidos numericamente pelo FEM em uma dimensão são uma boa aproximação para seu valor calculado pelo método analítico, principalmente na medida em que a defasagem angular de dispersão tende a π . Em ambos os casos, para valores angulares tendendo a zero esta aproximação se mostra menos precisa. É aconselhável, nos casos em que se exige um menor erro para estes valores, aumentar o número de dimensões utilizadas como forma de se aumentar a precisão do FEM.

6. REFERÊNCIAS

- AIELLO, G. et al. Finite element—Boundary condition iteration: A set of hybrid methods for the computation of electromagnetic fields in open boundaries. In: 2017 AEIT International Annual Conference. IEEE, 2017. p. 1-6.
- BALANIS, Constantine A. Advanced engineering electromagnetics (2nd ed). John Wiley & Sons, 2012.
- BORGHI, R. et al. Plane-wave scattering by a perfectly conducting circular cylinder near a plane surface: cylindrical-wave approach. JOSA A, v. 13, n. 3, p. 483-493, 1996.
- CHEN, Zhizhang; NEY, Michel M. Method of moments: A general framework for frequency-and time-domain numerical methods. In: 2007 Workshop on Computational Electromagnetics in Time-Domain. IEEE, 2007. p. 1-4.
- COOK, Robert D. et al. Concepts and applications of finite element analysis. New York: Wiley, 1974.
- CUNHA, F. G. M. ; CASTRO, J. K. S. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE. Universidade Aberta do Brasil, 2010. Disponível em <<https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/430185/2/CalculoNumerico.pdf>> Acesso em: 21 ago. 2019.
- ELSHARBENI, Atef Z.; KISHK, Ahmed A. Modeling of cylindrical objects by circular dielectric and conducting cylinders. IEEE transactions on antennas and propagation, v. 40, n. 1, p. 96-99, 1992.
- FRENI, Angelo; MIAS, Christos; FERRARI, Ronald L. Hybrid finite-element analysis of electromagnetic plane wave scattering from axially periodic cylindrical structures. IEEE Transactions on antennas and propagation, v. 46, n. 12, p. 1859-1866, 1998.
- FREZZA, Fabrizio et al. Scattering by perfectly conducting circular cylinders buried in a dielectric slab through the cylindrical wave approach. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, v. 57, n. 4, p. 1208-1217, 2009.

GORDON, R. K.; LEE, J.-F. A finite element method that employs an absorbing boundary condition for determining the electromagnetic scattering by inhomogeneous cylindrical structures that are illuminated by an obliquely incident field. IEEE transactions on magnetics, v. 29, n. 2, p. 1820-1825, 1993.

HARRINGTON, Roger F. Time-harmonic electromagnetic fields. McGraw-Hill, 1961.

HU, Huilin et al. Analysis of conformal bow-tie antenna scattering by using the hybrid FE-BI method. 2009.

JIA, Ping-Hao et al. Computations of electromagnetic wave scattering using FEM-BEM-DDM with H-matrices. In: 2017 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation & USNC/URSI National Radio Science Meeting. IEEE, 2017. p. 1335-1336.

JIN, Jian-Ming. The finite element method in electromagnetics (2nd ed). John Wiley & Sons, 2002.

KONIDARIS, Spyridon G. Electromagnetic scattering from rough surfaces using the On-Surface Radiation Boundary Condition (OSRC) method. NAVAL POSTGRADUATE SCHOOL MONTEREY CA, 1990.

KRIEGSMANN, GREGORYA; TAFLOVE, Allen; UMASHANKAR, KORADARR. A new formulation of electromagnetic wave scattering using an on-surface radiation boundary condition approach. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, v. 35, n. 2, p. 153-161, 1987.

NEY, Michel M. Method of moments as applied to electromagnetic problems. IEEE transactions on microwave theory and techniques, v. 33, n. 10, p. 972-980, 1985.

OZGUN, Ozlem. Advanced finite element analysis for EMC engineering. In: 2017 IV International Electromagnetic Compatibility Conference (EMC Turkiye). IEEE, 2017. p. 1-4.

REDDY, Junuthula Narasimha. An introduction to the finite element method. New York, McGraw-Hill, v. 2, n. 2.2, 1993.

RICHMOND, Jack. Scattering by a dielectric cylinder of arbitrary cross section shape. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, v. 13, n. 3, p. 334-341, 1965.

SADIKU, Matthew NO. A simple introduction to finite element analysis of electromagnetic problems. IEEE Transactions on Education, v. 32, n. 2, p. 85-93, 1989.

SEVGI, Levent. Guided waves and transverse fields: Transverse to what?. IEEE Antennas and Propagation Magazine, v. 50, n. 6, p. 221-225, 2008.

WAIT, James R. Scattering of electromagnetic and electroacoustic waves by a cylindrical object in a compressible plasma. Sea, v. 69, n. 2, 1965.

YOUNG, Andre; DAVIDSON, David B. A comparison of mesh termination schemes for 2D scattering analysis using the finite element method. In: AFRICON 2007. IEEE, 2007. p. 1-6.

ZIENKIEWICZ, Olek C.; TAYLOR, Robert L.; ZHU, Jian Z. The finite element method: its basis and fundamentals. Elsevier, 2005.

SCATTERING OF PLANE ELETROMAGNETIC TRANSVERSAL WAVES TEz AND TMz BY A CYLINDER MADE OF IMPERFECT ELETRIC CONDUCTOR VIA FINITE ELEMENT METHOD

Marcelo A. Canavez ⁽¹⁾ (marcelocanavez2@gmail.com), Jéssica B. Oliveira ⁽²⁾ (jessicabonoto@yahoo.com.br), Ramon S. Dornelas ⁽³⁾ (soares.ramon@ufsj.edu.br)

^(1,2) Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (UFSJ), Praça Frei Orlando, 170 – Centro, São João del-Rei - MG, Brazil

⁽³⁾ Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ) - DETEM - Highway, MG-443, Km 7, Ouro Branco, MG, Brazil

ABSTRACT: *This paper presents a fast review of Finite Element Method (FEM) and its application in the solution of problems of scattering in imperfect conductor cylinders, and it also presents the evolution of methods of analysis of this problem. The scattering of transversal waves is classic problem of Electromagnetism and presents several methods of analysis and equations. The equations of incidence and scattering of transversal electric waves and transversal magnetic waves through imperfect conductor cylinders is developed, analytically and numerically (via FEM). That developing processes was intended to explore the methodology that many times on scientific literature is overly summarized. Besides, a guide with 7 passes for developing and analyzing the Finite Element Method was presented. There were presented numerical and analytical simulation results for angular variations from 0 to π , in which the interval was divided on 2000 points in both cases. For the numerical method, an approximation via triangular based functions was made, and on analytical case the summation was limited to an interval from -150 to +150 for each point. The numerical and analytical simulations were made on MATLAB®.*

KEYWORDS: *Finite Element Method, scattering of transversal electric waves, scattering of transversal magnetic waves, imperfect conductor cylinder, analytical solution, numerical solution.*