Controle *Fuzzy* Evolutivo com Alocação Ótima Robusta de Autoestruturas

Rodrigo Possidônio Noronha*
Ginalber Luiz de Oliveira Serra**

* *Av. dos Portugueses, s/n, Bacanga, CEP:65001-970, Universidade Federal do Maranhão, MA, (e-mail: possidonio_789@hotmail.com)*

** *Av. Getúlio Vargas, 04, Monte Castelo, CEP: 65030-005, Instituto Federal do Maranhão, MA (e-mail: ginalber@ifma.edu.br)*

Abstract: In this article, is proposed a new control methodology based on the evolving fuzzy Takagi-Sugeno model in the context of the space of states, obtained directly from experimental data. The control methodology is given by obtaining a state feedback gain matrix, which ensures the robust optimal allocation of eigenvalues in regions specified in the complex plane. Conditions are presented for the proposed control methodology to be met in a robust and flexible manner. For validation of the proposed methodology, a case study is performed on a SISO thermal system, in the following scenario: parametric uncertainties in the state matrix.

Resumo: Neste artigo, é proposta uma nova metodologia de controle baseada em modelo *fuzzy* Takagi-Sugeno evolutivo no contexto do espaço de estados, obtido diretamente de dados experimentais. A metodologia de controle é dada pela obtenção de uma matriz de ganho de realimentação de estados, que garante a alocação ótima robusta de autovalores em regiões especificadas no plano complexo. São apresentadas condições para que a metodologia de controle proposta seja satisfeita de forma robusta e flexível. Para validação da metodologia proposta, é realizado um estudo de caso em um sistema térmico SISO, no seguinte cenário: incertezas paramétricas na matriz de estados.

Keywords: Evolving Fuzzy Identification; Intelligent Control; Optimal Control; Optimal Allocation of Eigenvalues; Robust Regional Eigenvalues Allocation.

Palavras-chaves: Identificação *Fuzzy* Evolutiva; Controle Inteligente; Controle Ótimo; Alocação Ótima de Autovalores; Alocação Robusta Regional de Autovalores.

1. INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, o projeto de sistemas de controle ótimo com alocação de autovalores têm recebido considerável atenção. Em Abdulhamed and El-Gaafary (2017), é utilizado controle descentralizado, onde para cada sistema local desacoplado há um controlador projetado através da técnica de controle ótimo com alocação de polos. Em Bajodah and Mibar (2016), é proposta uma metodologia de controle baseada na inversão de dinâmica generalizada para restrições de igualdade de estado linear, que é utilizada no problema de alocação parcial de autovalores em controladores LQR.

Nota-se, que uma desvantagem das técnicas de controle ótimo com alocação de autovalores é a não consideração de incertezas nos modelos obtidos, fazendo com que o critério multiobjetivo não seja satisfeito. Uma solução para esse problema são as técnicas de alocação robusta de autovalores, podendo-se destacar Le and Wang (2014) e dos Santos et al. (2018). Estas técnicas apresentam grande vantagem combinadas com controle ótimo, pois o critério multiobjetivo é satisfeito mesmo na presença de incertezas.

À vista disso, neste artigo, é proposta uma nova metodologia de controle ótimo LQR com alocação de autovalores, que é baseada em modelo *fuzzy* Takagi-Sugeno evolutivo no espaço de estados, obtido diretamente de dados experimentais. A originalidade desta proposta, é dada pela obtenção de uma matriz de ganho de realimentação de estados que garante a alocação ótima de autovalores, com robustez, em regiões circulares no plano complexo. Dessa forma, além de garantir o aspecto multiobjetivo, a metodologia de controle é realizada em regiões circulares, permitindo que o critério multiobjetivo seja satisfeito de forma robusta e flexível. Devido ao uso de sistemas *fuzzy* evolutivos, a estrutura do sistema de controle é obtida para se adaptar as mudanças do ambiente, modificando sua estrutura interna, com a criação, mesclagem ou exclusão de regras *fuzzy*. Portanto, a metodologia proposta é apta a trabalhar em aplicações *online*, uma vez que não é somente adaptativa, com ajuste automático dos parâmetros dos antecedentes e consequentes das regras *fuzzy*, mas é também evolutiva.

Este artigo é organizado da seguinte forma: na seção 2, são apresentados a estrutura do sistema *fuzzy* utilizado, a estimação paramétrica do antecedente das regras *fuzzy* subseção 2.1, a estimação recursiva dos consequentes subseção 2.2 e o algoritmo de realização de autossistemas

* O presente trabalho foi realizado com apoio do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Brasil.

subseção 2.3. Na seção 3, é apresentada a metodologia de controle proposta. Na seção 4, são apresentados os resultados experimentais.

2. IDENTIFICAÇÃO FUZZY EVOLUTIVA NO ESPAÇO DE ESTADOS

O sistema *fuzzy* Takagi-Sugeno, utilizado neste trabalho, é descrito por um conjunto de regras *fuzzy* da seguinte forma:

$$R^i : \text{SE } (\mathbf{z}_k \sim \mathbf{z}^i) \text{ ENTÃO } \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1}^i = \mathbf{A}^i \mathbf{x}_k^i + \mathbf{B}^i \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k^i = \mathbf{C}^i \mathbf{x}_k^i + \mathbf{D}^i \mathbf{u}_k \end{cases} \quad (1)$$

onde $i = 1, 2, \dots, R$ é a quantidade de regras *fuzzy*, $\mathbf{z}_k = [z_{k,1} \ z_{k,2} \ \dots \ z_{k,p+m}]^T$ são as variáveis do antecedente no k -ésimo instante de tempo, $\mathbf{z}^i$ é o ponto focal da i -ésima regra *fuzzy*, com $j = 1, 2, \dots, p+m$. As matrizes $\mathbf{A}^i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B}^i \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\mathbf{C}^i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\mathbf{D}^i \in \mathbb{R}^{m \times p}$ são referentes ao submodelo linear da i -ésima regra *fuzzy*, $\mathbf{x}_k^i \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $\mathbf{y}_k^i \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de saída do submodelo linear da i -ésima regra *fuzzy* e $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de entrada.

O grau de pertinência de uma amostra $\mathbf{z}_k$, para i -ésima regra *fuzzy*, pode ser determinado por uma gaussiana centrada no ponto focal da regra, dada por:

$$\mu_j^i(z_{k,j}) = e^{-\frac{(z_{k,j} - z_j^i)^2}{2(\sigma_j^i)^2}} \quad (2)$$

onde σ_j^i é a variância da gaussiana da j -ésima variável de entrada.

E a saída do modelo *fuzzy* TS é dada por:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \sum_{i=1}^R \gamma^i(\mathbf{z}_k) \mathbf{x}_{k+1}^i \\ \hat{\mathbf{y}}_k = \sum_{i=1}^R \gamma^i(\mathbf{z}_k) \mathbf{y}_k^i \end{cases} \quad (3)$$

2.1 Estimação Paramétrica do Antecedente

O antecedente da base de regras *fuzzy*, neste trabalho, é obtido através do algoritmo de agrupamento evolutivo, proposto em Angelov (2010), intitulado *Evolving* Takagi-Sugeno+ (eTS+). Neste algoritmo, é utilizada uma métrica, chamada densidade, para avaliar a capacidade de um vetor de dados $\mathbf{z}_k$ ser o ponto focal de uma nova regra, dada por:

$$D_k(\mathbf{z}_k) = \frac{k-1}{(k-1) \left(\sum_{j=1}^{p+m} z_{k,j}^2 + 1 \right) + b_k - v_k} \quad (4)$$

onde $v_k = 2 \sum_{i=1}^{p+m} z_{k,i} c_{k,i}$, $D_1(\mathbf{z}_1) = 1$, $b_k = b_{k-1} +$

$\sum_{i=1}^{p+m} z_{(k-1),i}^2$, $b_1 = 0$, $c_{k,j} = c_{(k-1),j} + z_{(k-1),j}$ e $c_{1,j} = 0$.

Quando $\mathbf{z}_k$ é escolhida para ser um novo ponto focal, sua densidade é atualizada de forma recursiva:

$$D_k(\mathbf{z}^i) = \frac{k-1}{(k-1) + (k-2) \left(\frac{1}{D_{k-1}(\mathbf{z}^i)} - 1 \right) + \psi_k} \quad (5)$$

onde $\psi_k = \sum_{j=1}^{p+m} (z_{k,j} - z_{(k-1),j})^2$.

A condição utilizada para selecionar uma amostra como novo ponto focal, denominada de Condição A, é dada por:

SE $D_k(\mathbf{z}_k) > \max_{i=1}^R D_k(\mathbf{z}^i)$ **ou** $D_k(\mathbf{z}_k) < \min_{i=1}^R D_k(\mathbf{z}^i)$
ENTÃO $R = R + 1$ (6)

Quando uma nova regra é criada, todas as regras que existiam anteriormente e que satisfazem a condição B são mescladas com a regra recém criada. A condição B é dada por:

SE $\mu_j^i(z_{k,j}) > 0,3$, $i = [1, R]$ e $j = 1, 2, \dots, p+m$
ENTÃO $R = R - 1$ (7)

Visando assegurar que apenas as regras que possuem alguma utilidade sejam mantidas, e que assim sejam minimizados os efeitos de *outliers*, é utilizada a condição C:

SE $U_k^i < \eta$ **ENTÃO** $R = R - 1$ (8)

onde $\eta \in [0,01 \sim 0,3]$, U_k^i é a utilidade da i -ésima regra no instante k , que é dada por:

$$U_k^i = \frac{\sum_{j=1}^k \gamma_j^i}{k - I^i} \quad (9)$$

sendo $i = 1, 2, \dots, R$ e I^i é o instante em que a regra foi criada.

O valor da variância σ_j^i , também denominada de zona de influência ou raio, é atualizado de forma recursiva:

$$\sigma_{j,k}^i = \sqrt{\zeta (\sigma_{(k-1),j}^i)^2 + (1 - \zeta) \frac{1}{S_k^i} (z_{k,j} - z_j^i)^2} \quad (10)$$

onde ζ é a constante de aprendizagem e S_k^i é a quantidade de amostras $\mathbf{z}_k$ associadas a i -ésima regra até o instante k .

2.2 Estimação Recursiva dos Parâmetros do Consequente

Para a obtenção das matrizes $\mathbf{A}^i$, $\mathbf{B}^i$, $\mathbf{C}^i$ e $\mathbf{D}^i$ referentes ao submodelo linear da i -ésima regra *fuzzy*, são necessários os parâmetros de Markov *fuzzy* do sistema, conforme apresentado em Torres and de Oliveira Serra (2018). Estes parâmetros são obtidos diretamente do conjunto de dados, através da inclusão de um observador de estados Juang (1994). O algoritmo é inicializado pela adição e subtração do termo $\mathbf{G}^i \mathbf{y}_k^i$ no lado direito em (3), obtendo-se:

$$\mathbf{x}_{k+1}^i = \bar{\mathbf{A}}^i \mathbf{x}_k^i + \bar{\mathbf{B}}^i \mathbf{v}_k \quad (11)$$

onde,

$$\bar{\mathbf{A}}^i = \mathbf{A}^i + \mathbf{G}^i \mathbf{C}^i \quad (12)$$

$$\bar{\mathbf{B}}^i = \mathbf{B}^i + \mathbf{G}^i \mathbf{D}^i \quad (13)$$

$$\mathbf{v}_k^i = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k^i \end{bmatrix} \quad (14)$$

e $\mathbf{G}^i \in \mathbb{R}^{p \times m}$ é o ganho do observador de estados da i -ésima regra *fuzzy*.

Com a presença do observador de estados, pode-se considerar que $(\bar{\mathbf{A}}^i)^q \approx 0$, onde q é o número de parâmetros

de Markov *fuzzy* do observador. Devido a isso, a saída da i -ésima regra *fuzzy* é dada por:

$$\mathbf{y}_k^i = \sum_{j=1}^k \bar{\mathbf{M}}_j^i \mathbf{v}_{k-1}^i + \mathbf{D}^i u_k \quad (15)$$

Pode-se considerar que (15), para $k > q$, possui em batelada a seguinte representação matricial:

$$\mathbf{Y}_k^i = \Theta_k^i \Phi_k^i \quad (16)$$

onde $\mathbf{Y}_k^i = [\mathbf{y}_{q+1}^i \ \mathbf{y}_{q+2}^i \ \dots \ \mathbf{y}_k^i]$ é a matriz de saída, $\Phi_k^i = [\phi_{q+1}^i \ \phi_{q+2}^i \ \dots \ \phi_k^i]$ é a matriz de regressores com $\phi_k^i = [\mathbf{u}_k^T, (\mathbf{v}_{k-1}^i)^T, \dots, (\mathbf{v}_{k-q}^i)^T]^T$ e $\Theta_k^i = [\mathbf{D}_k^i, \bar{\mathbf{M}}_{k-1}^i, \dots, \bar{\mathbf{M}}_{k-q}^i]$ é a matriz de parâmetros de Markov *fuzzy* do observador. Dessa forma, substituindo-se (15) em (3), encontra-se a saída do sistema, que é dada por:

$$\mathbf{Y}_k = \sum_{i=1}^R \Theta_k^i \Phi_k^i \Gamma_k^i \quad (17)$$

onde,

$$\Gamma_k^i = \begin{bmatrix} \gamma^i(\mathbf{z}_{q+1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma^i(\mathbf{z}_{q+2}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma^i(\mathbf{z}_k) \end{bmatrix} \quad (18)$$

é a matriz de ponderação *fuzzy*, com o grau de ativação normalizado.

Utilizando o método de mínimos quadrados ponderados *fuzzy*, em batelada, pode-se calcular a matriz de parâmetros de Markov *fuzzy* do observador:

$$\Theta_k^i = \mathbf{Y}_k \Gamma_k^i (\Phi_k^i)^T [\Phi_k^i \Gamma_k^i (\Phi_k^i)^T]^{-1} \quad (19)$$

onde o índice k indica que Θ_k^i foi estimada em batelada para k amostras.

De forma recursiva, os parâmetros de Markov *fuzzy* do observador podem ser obtidos como a seguir:

$$\mathbf{G}_{k+1}^i = \frac{(\phi_{k+1}^i)^T \mathbf{P}_k^i}{(\gamma^i(\mathbf{z}_{k+1}))^{-1} + (\phi_{k+1}^i)^T \mathbf{P}_k^i \phi_{k+1}^i} \quad (20)$$

$$\Theta_{k+1}^i = \Theta_k^i + [\mathbf{y}_{k+1} - \Theta_k^i \phi_{k+1}^i] \mathbf{G}_{k+1}^i \quad (21)$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^i = \mathbf{P}_k^i [\mathbf{I} - \phi_{k+1}^i \mathbf{G}_{k+1}^i] \quad (22)$$

onde a matriz de ganho $\mathbf{G}_k^i$ é inicializado por uma matriz nula e a matriz de covariância do erro $\mathbf{P}_k^i$ é inicializada por $\delta \mathbf{I}$, com $\delta = [10^2 \sim 10^4]$.

O próximo passo do método de estimação é referente a obtenção dos parâmetros de Markov *fuzzy* do sistema, que são dados através dos parâmetros de Markov *fuzzy* do observador. Considerando-se que:

$$\bar{\mathbf{M}}_{kj}^i = \mathbf{C}^i (\bar{\mathbf{A}}^i)^{j-1} \bar{\mathbf{B}}^i \quad (23)$$

e substituindo-se (12) e (13) em (23), chega-se a::

$$\bar{\mathbf{M}}_{kj}^i = [\mathbf{C}^i (\bar{\mathbf{A}}^i + \mathbf{G}^i \mathbf{C}^i)^{k-1} (\bar{\mathbf{B}}^i + \mathbf{G}^i \mathbf{D}^i), -\mathbf{C}^i (\bar{\mathbf{A}}^i + \mathbf{G}^i \mathbf{C}^i)^{k-1} \mathbf{G}^i] \quad (24)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{kj}^i \approx [\bar{\mathbf{M}}_{kj}^{i1}, -\bar{\mathbf{M}}_{kj}^{i2}] \quad (25)$$

onde (25) é o j -ésimo parâmetro de Markov *fuzzy* do observador de estados.

É válido observar que a matriz $\mathbf{D}^i$ é dada pelo primeiro bloco de ordem $m \times p$, para $j = 0$, da matriz de parâmetros

de Markov *fuzzy* do observador de estados:

$$\mathbf{D}^i = \bar{\mathbf{M}}_0^i \quad (26)$$

Por fim, os parâmetros de Markov *fuzzy* do sistema são obtidos através de:

$$\mathbf{M}_{kj}^i = \bar{\mathbf{M}}_{kj}^{i1} - \sum_{k=1}^j \bar{\mathbf{M}}_{kj}^{i2} \mathbf{M}_{j-k}^i, \text{ para } j = 1, 2, \dots, q \quad (27)$$

$$\mathbf{M}_{kj}^i = -\sum_{k=1}^q \bar{\mathbf{M}}_{kj}^{i2} \mathbf{M}_{j-k}^i, \text{ para } j > q \quad (28)$$

2.3 Algoritmo de Realização de Autossistemas Fuzzy

Após obtidos os parâmetros de Markov *fuzzy* do sistema, o passo seguinte é referente a obtenção da matriz generalizada de Hankel:

$$\mathbf{H}_{j-1}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_j^i & \mathbf{M}_{j+1}^i & \dots & \mathbf{M}_{j+\beta-1}^i \\ \mathbf{M}_{j+1}^i & \mathbf{M}_{j+2}^i & \dots & \mathbf{M}_{j+\beta}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_{j+\alpha-1}^i & \mathbf{M}_{j+\alpha}^i & \dots & \mathbf{M}_{j+\alpha+\beta-2}^i \end{bmatrix} \quad (29)$$

onde α e β são valores inteiros tal que $\alpha\beta \leq \beta p$. Na matriz acima, omitiu-se o índice k dos parâmetros de Markov *fuzzy* do sistema por questões de notação.

Se o sistema é controlável e observável, pode-se afirmar que o *rank* máximo, para $j = 1$, de $\mathbf{H}_0^i$ é igual ao número de valores singulares não nulos, em outras palavras, é igual a ordem mínima n de um sistema realizável.

A continuação do algoritmo é referente a decomposição em valores singulares da matriz $\mathbf{H}_0^i$, dada em (30). Obtendo-se os valores singulares da matriz $\mathbf{H}_0^i$ pode-se determinar a ordem mínima de realização das matrizes $\mathbf{A}^i$, $\mathbf{B}^i$ e $\mathbf{C}^i$.

Considerando-se que a matriz $\mathbf{H}_0^i$ possa ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{H}_0^i = \mathbf{R}^i \Sigma^i (\mathbf{S}^i)^T \quad (30)$$

onde $\mathbf{R}^i$ e $\mathbf{S}^i$ são matrizes ortogonais, e Σ^i é uma matriz retangular,

$$\Sigma^i = \begin{bmatrix} \Sigma_n^i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

com

$$\Sigma_n^i = \begin{bmatrix} \sigma_1^i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^i \end{bmatrix} \quad (32)$$

onde $\sigma_1^i > \sigma_2^i > \dots > \sigma_n^i > 0$ são os n valores singulares mais significativos de $\mathbf{H}_0^i$. Definindo-se $\mathbf{R}_n^i$ e $\mathbf{S}_n^i$ como matrizes formadas pelas n primeiras colunas de $\mathbf{R}^i$ e $\mathbf{S}^i$, respectivamente, então a matriz $\mathbf{H}_0^i$ pode ser reescrita como:

$$\mathbf{H}_0^i = \mathbf{R}_n^i \Sigma_n^i (\mathbf{S}_n^i)^T \quad (33)$$

Por fim, as matrizes dos submodelos lineares são estimadas por:

$$\mathbf{A}^i = \mathbf{E}_n^T \mathbf{H}_1^i [\mathbf{E}_n^T \mathbf{H}_0^i]^{-1} \quad (34)$$

$$\mathbf{B}^i = \text{o primeiro bloco } n \times p \text{ de } \mathbf{H}_0^i \quad (35)$$

$$\mathbf{C}^i = \mathbf{E}_m^T \mathbf{E}_m \quad (36)$$

onde $\mathbf{E}_n^T = [\mathbf{I}_n \ \mathbf{0}_n \ \dots \ \mathbf{0}_n]$ e $\mathbf{E}_m^T = [\mathbf{I}_m \ \mathbf{0}_m \ \dots \ \mathbf{0}_m]$

3. ALOCAÇÃO ÓTIMA DE AUTOVALORES

Seja um sistema de controle *fuzzy* evolutivo, descrito por:

$$R^i : \text{SE } (z_k \sim z^i) \text{ ENTÃO } \begin{cases} x_{k+1}^i = A^i x_k^i + B^i u_k^i \\ y_k^i = C^i x_k^i + D^i u_k^i \\ \omega_{k+1}^i = \omega_k^i + d_k - y_k^i \end{cases} \quad (37)$$

onde ω_k^i é a variável de estado do integrador da i -ésima regra *fuzzy* e d_k é a saída desejada (referência). Considerando-se que o par $[A^i \ B^i]$ é controlável, então é possível obter uma lei de controle da seguinte forma:

$$u_k^i = K_c^i x_k^i + K_I^i \omega_k^i \quad (38)$$

onde a matriz de ganho de realimentação de estados é dada por: $K^i = [K_c^i \ K_I^i]$, com K_c^i que é a matriz de ganho de realimentação de estados do controlador e K_I^i que é a matriz de ganho de realimentação de estados do integrador.

O objetivo da metodologia de controle é obter K^i que aloque os autovalores especificados de malha fechada e satisfaça a minimização do funcional de otimalidade do LQR:

$$J_k^i = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [(\varphi_k^i)^T Q^i \varphi_k^i + (u_k^i)^T R^i u_k^i] \quad (39)$$

onde φ_k^i é um vetor definido como $\varphi_k^i = [x_k^i \ \omega_k^i]^T$. As matrizes Q^i e R^i ponderam o vetor de estados e o vetor de controle, respectivamente, da i -ésima regra *fuzzy*. A otimalidade do LQR é garantida quando a matriz Q^i é semidefinida positiva, R^i e P^i são definidas positiva, e os autovalores de malha fechada estão localizados no interior do círculo unitário.

Devido à inclusão do integrador na malha de controle, a matriz de estados A^i aumentada é definida como:

$$A_{aum}^i = \begin{bmatrix} A^i & 0_{n \times m} \\ -C^i & I_{m \times m} \end{bmatrix} \quad (40)$$

onde $A_{aum}^i \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ e a matriz B^i aumentada é definida como:

$$B_{aum}^i = \begin{bmatrix} B^i \\ -D^i \end{bmatrix} \quad (41)$$

onde $B_{aum}^i \in \mathbb{R}^{(n+p) \times p}$. Dessa forma, os autovalores de malha fechada serão referentes a matriz $A_{aum}^i + B_{aum}^i K^i$.

A matriz de ganho de realimentação de estados que satisfaz o critério multiobjetivo da metodologia proposta, é dada em função da matriz P^i , que é a solução da equação algébrica de Riccati discreta:

$$P^i = (A_{aum}^i)^T P^i A_{aum}^i - (A_{aum}^i)^T B_{aum}^i [R^i + (B_{aum}^i)^T P^i B_{aum}^i]^{-1} (B_{aum}^i)^T P^i A_{aum}^i + Q^i \quad (42)$$

Seja $A_c^i = A_{aum}^i + B_{aum}^i K^i$, a matriz de estados aumentada de malha fechada. Substituindo A_c^i em (42), obtém-se:

$$P^i = (A_c^i)^T P^i A_c^i - (K^i)^T K^i + Q^i \quad (43)$$

que expressa (42) em função da matriz de estados aumentada de malha fechada. Por conveniência, nesta metodologia, definiu-se a matriz $R^i = I$. Com isso, a matriz de ganho de realimentação de estados é reescrita da seguinte forma:

$$K^i = -(B^i)^T P^i A_c^i \quad (44)$$

Considerando-se que a matriz A_c^i possa ser substituída por $U^i \Delta^i (U^i)^{-1}$, onde Δ^i é a matriz diagonal de autovetores desejados de malha fechada e U^i é a matriz de autovetores associados. Substituindo-se A_c^i em (43) e multiplicando a esquerda por $(U^i)^T$ e a direita por U^i , obtém-se:

$$(U^i)^T P^i U^i - \Delta^i (U^i)^T P^i U^i \Delta^i = (U^i)^T [Q^i + (K^i)^T K^i] U^i \quad (45)$$

Seja uma matriz $Z^i = (U^i)^T [Q^i - (K^i)^T K^i] U^i$. Como Z^i é dada em função de U^i , por conveniência, pode-se defini-la por uma matriz diagonal com elementos determinados arbitrariamente. Dessa forma, (45) é reescrita como:

$$P^i = (U^i)^{-T} Z^i [U^i (I - (\Delta^i)^2)]^{-1} \quad (46)$$

Após a substituição de (46) em (44), obtém-se:

$$K^i = -(B^i)^T (U^i)^{-T} Z^i (I - (\Delta^i)^2)^{-1} \Delta^i (U^i)^{-1} \quad (47)$$

Com a obtenção de K^i , define-se a matriz Q^i da seguinte forma:

$$Q^i = (U^i)^{-T} Z^i (U^i)^{-1} + (K^i)^T K^i \quad (48)$$

A continuação da metodologia é dada pela obtenção da matriz U^i . Seja a relação entre os autovalores de malha fechada com os autovetores associados, dada por $[A_{aum}^i + B_{aum}^i K^i] u_j^i = \lambda_j^i u_j^i$ para $j = 1, 2, \dots, n + m$. Seja ainda $\psi_j^i = K^i u_j^i$, então pode-se definir que:

$$K^i = \Psi^i (U^i)^{-1} \quad (49)$$

onde $\Psi^i = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n+m}]$.

A relação entre a matriz de ganho de realimentação de estados obtida por $K^i = \Psi^i (U^i)^{-1}$ e em (47), é dada por:

$$\Psi^i = -(B^i)^T (U^i)^{-T} Z^i (I - (\Delta^i)^2)^{-1} \Delta^i \quad (50)$$

Para que a metodologia de controle multiobjetivo seja satisfeita é necessário que as matrizes Ψ^i e U^i satisfaçam (50). Dessa forma, a matriz de ganho de realimentação de estados K^i é obtida através de $K^i = \Psi^i (U^i)^{-1}$.

Seja V_j^i a matriz que define o autoespaço generalizado associado à cada λ_j^i , através da expressão $V_j^i = (\lambda_j^i I - A_{aum}^i)^{-1} B_{aum}^i$. Então, utilizando a relação acima, chega-se a:

$$U^i = [V_1^i \psi_1^i, V_2^i \psi_2^i, \dots, V_{n+m}^i \psi_{n+m}^i] \quad (51)$$

Pode-se definir ψ_j^i de forma arbitrária, uma vez que ψ_j^i é relacionado com u_j^i através de $u_j^i = V_j^i \psi_j^i$. Isso é possível, pois para cada autovalor λ_j^i existem inúmeros autovetores u_j^i associados pertencentes ao subespaço gerado.

3.1 Alocação Robusta Regional de Autovalores

Considerando que a metodologia de controle ótimo LQR com alocação de autovalores seja realizada com os posicionamento dos autovalores em uma união de regiões circulares Ω . A união Ω consiste em uma única região circular ou de várias regiões circulares disjuntas, tal que: $\Omega = \bigcup_{h=1}^s \Omega_h(\rho_h, d_h, \beta_h)$ para $h = 1, 2, \dots, s$. Os parâmetros de $\Omega_h(\rho_h, d_h, \beta_h)$, são definidos como: $d_h < 1$ é a distância do eixo imaginário à borda da região circular, ρ_h é o raio da região circular e $\sigma_h = (\alpha_h, \pm \beta_h)$ é o centro da região circular, onde $\alpha_h = (\rho_h + d_h)$ para a região circular

localizada no semicírculo direito e $\alpha_h = -(\rho_h + d_h)$ para a região circular localizada no semicírculo esquerdo.

Seja $\Sigma^i \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ uma matriz de incertezas paramétricas. Considerando que o sistema esteja sujeito a presença de Σ^i , dessa forma, a matriz de estados aumentada de malha fechada é reescrita como $\mathbf{A}_{aum}^i + \mathbf{B}_{aum}^i \mathbf{K}^i + \Sigma^i$. Segundo proposto em Yang (2011), a condição para que n autovalores pertencentes à matriz de estados aumentada de malha fechada com incertezas paramétricas permaneçam na região h é dada por:

$$C_h(\rho_h, d_h, \beta_h) \cap \bigcup_{j=1}^n \lambda_j(\mathbf{A}_{aum}^i + \mathbf{B}_{aum}^i \mathbf{K}^i + \Sigma^i) = \emptyset \quad (52)$$

se

$$\|\Sigma^i\| < J_h^i = \frac{\min|r_h - d_j|}{\kappa(\mathbf{U}^i)} \quad (53)$$

onde, por definição, $C_h(\rho_h, d_h, \beta_h)$ é a borda da região circular h , $d_j = |\sigma_h - \lambda_j|$, $\kappa(\mathbf{U}^i) = \|\mathbf{U}^i\| \|(\mathbf{U}^i)^{-1}\|$ e J_h^i é a medida de robustez. A prova da condição de robustez pode ser vista em Zhai et al. (2015).

Para que os $n + m$ autovalores permaneçam em suas respectivas regiões circulares, é condição necessária que $\|\Sigma^i\|$ seja inferior ao valor de J_h^i obtido para a região circular com menor medida de robustez, ou seja, $\min J_h^i$. Se a condição for verdadeira, é garantida a permanência dos autovalores alocados na região com menor valor da medida de robustez assim como para os autovalores alocados nas regiões com maiores valores da medida de robustez.

A função objetivo J_h^i é dada através da medida de sensibilidade da matriz de autovetores $\kappa(X) = \|\mathbf{U}^i\| \|(\mathbf{U}^i)^{-1}\|$. Uma vez que $\kappa(X) = \|\mathbf{U}^i\| \|(\mathbf{U}^i)^{-1}\|$ torna a função objetivo J_h^i não-convexa, não é possível utilizar métodos tradicionais de otimização. Neste trabalho é utilizado o método de otimização algoritmo genético para obter o maior valor local de J_h^i , para $h = 1, 2, \dots, s$.

Abaixo são apresentados os principais passos para a realização da metodologia de controle proposta:

Etapa de Treinamento:

- **Passo 1:** Realizar o algoritmo de agrupamento evolutivo, para o vetor de dados $\mathbf{z}_k$, referente às N_t amostras de treinamento.
- **Passo 2:** Obter as matrizes $\mathbf{A}^i$, $\mathbf{B}^i$, $\mathbf{C}^i$ e $\mathbf{D}^i$, referentes ao submodelo de treinamento em batelada, da i -ésima regra *fuzzy*;
- **Passo 3:** Definir os parâmetros de cada região circular $\Omega_h(r_h, d_h, \beta_h)$ para $h = 1, 2, \dots, s$;

Etapa Recursiva:

- **Passo 4:** Inicializar a matriz Δ^i de autovalores, da seguinte forma:

$$\lambda_j = L_h \cos(\theta) + \alpha_h + (L_h \sin(\theta) + \beta_h)i \quad (54)$$
e o seu par complexo conjugado

$$\bar{\lambda}_j = L_h \cos(\theta) + \alpha_h - (L_h \sin(\theta) + \beta_h)i \quad (55)$$
onde $L_h = [0, \rho_h]$, $\theta = [0, 2\pi]$ e $j = 1, 2, \dots, n + m$.
- **Passo 5:** Obter o autoespaço generalizado $\mathbf{V}^i$. Determinar arbitrariamente Ψ^i e $\mathbf{Z}^i$. E por fim, obter a matriz de autovetores $\mathbf{U}^i$, utilizando (51);

- **Passo 6:** Obter $\mathbf{P}^i$, utilizando (46). Obter $\mathbf{K}^i$, utilizando (49). Obter $\mathbf{Q}^i$, utilizando (48);
- **Passo 7:** Maximizar a função objetivo descrita em (53);
- **Passo 8:** Realizar o algoritmo de agrupamento evolutivo, para o vetor de dados $\mathbf{z}_k$;
- **Passo 9:** Atualizar recursivamente as matrizes $\mathbf{A}^i$, $\mathbf{B}^i$, $\mathbf{C}^i$ e $\mathbf{D}^i$.

4. RESULTADOS

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos através da metodologia de controle proposta, aplicada a um sistema térmico utilizado em Costa and Serra (2017). O sistema térmico usado é composto por uma torradeira monofásica com alimentação de 220 V e temperatura funcional entre 25°C a 250°C. A plataforma de controle em tempo real é composta de um sistema térmico, um módulo CompactRIO 9073, módulos de entrada analógica NI 9215 e NI 9219 usados para aquisição de dados de entrada do sistema térmico, um módulo de saída analógica NI 9263 usado para enviar o sinal de controle ao atuador, um sensor de temperatura LM 35 com resolução de 10mV/°C, um atuador CI TCA 785 e um sistema supervisor implementado no *software* LabVIEW¹.

Para se obter os submodelos lineares de treinamento em batelada, para as R regras *fuzzy*, foram adquiridos dados de entrada e saída do sistema térmico. Os dados coletados foram amostrados a cada 1 segundo. Foram utilizadas 1434 amostras para identificar os submodelos lineares de treinamento em batelada. A saída estimada pelo modelo *fuzzy* apresentou RMSE (*Root Mean Squared Error*) igual a 0,0443. A estimação paramétrica dos antecedentes das R regras *fuzzy*, para o vetor de dados $\mathbf{z}_k = [\mathbf{u}_{k-1} \ \mathbf{y}_{k-1}]$ de treinamento, foi realizada através do algoritmo eTS+. Os parâmetros definidos para o eTS+ foram: o valor inicial para a zona de influência $\sigma_{k,j}^i = 0,1$, utilidade $\eta^i = 0,2$ e constante de aprendizagem $\zeta = 0,5$. Para identificação das matrizes dos submodelos, utilizou-se os seguintes parâmetros para o algoritmo de realização de autossistemas: $q = 1$ (número de parâmetros de Markov *fuzzy* do observador de estados), $\alpha = 40$ (número de linhas da matriz $\mathbf{H}_0^i$) e $\beta = 50$ (número de colunas da matriz $\mathbf{H}_0^i$).

Na Figura 1, é apresentada a evolução do número de regras *fuzzy* para o vetor de dados $\mathbf{z}_k$ com 1634 amostras, sendo que as 1434 primeiras amostras são referentes à etapa de treinamento e as 200 amostras restantes referentes à etapa recursiva. Através da decomposição em valores singulares $\mathbf{H}_0^i$, observou-se que, ao fim do agrupamento evolutivo dos dados de treinamento, o número de valores singulares significativos é igual a 1, portando a ordem dos submodelos lineares é $n = 1$.

¹ O LabVIEWTM (*LABoratory Virtual Instrument Engineering Workbench*) é uma linguagem de programação gráfica, desenvolvida pela *National Instruments Corporation*

Figura 1. Evolução do número de regras fuzzy.

A metodologia de controle proposta, foi aplicada tanto para o caso em que a matriz de incertezas $\|\Sigma^i\| = 0$ como em $\|\Sigma^i\| < \min J_1^i$. Foram aplicadas 200 matrizes de incertezas paramétricas Σ^i com distribuição normal, limitadas a $\|\Sigma^i\| < 0,02$ devido a otimização de J_1^i , referentes à cada instante k . Optou-se pela alocação ótima de dois autovalores reais, devido à matriz A_{aum} ser de ordem $n = 2$, no interior da região circular $\Omega_1(\rho_1, d_1, \beta_1)$ com centro em $\sigma_1 = (0, 4, j0)$, raio $\rho_1 = 0,2$, $\beta_1 = 0$ e a distância em relação ao eixo imaginário $d_1 = 0,2$.

Figura 2. Autovalores da matriz de estados aumentada de malha fechada alocados, para $\|\Sigma^i\| < \min J_1^i$.

Figura 3. Comparação entre a saída controlada para $\|\Sigma^i\| = 0$, saída perturbada para $\|\Sigma^i\| < \min J_1^i$ e a referência.

Os parâmetros utilizados no algoritmo genético são: taxa de *crossover* $\mu_c = 90\%$, taxa de mutação $\mu_m = 1\%$, população com $N_p = 20$ indivíduos e o número de iterações $N = 20$. O método de seleção utilizada foi o de torneio. Na Figura 3, são apresentadas a saída desejada, a saída controlada ($\|\Sigma^i\| = 0$) e a saída perturbada ($\|\Sigma^i\| < \min J_1^i$). Para a saída desejada, foram definidos 4 degraus de referência: $60^\circ C$, $120^\circ C$, $140^\circ C$ e $80^\circ C$, cada um com duração de 50 amostras com período de amostragem de 1 segundo. Através da Figura 2, percebe-se que mesmo

na presença de incertezas, o critério de otimalidade do LQR e a alocação de autovalores na região $\Omega_1(\rho_1, d_1, \beta_1)$ foram garantidos, satisfazendo a metodologia de controle multiobjetivo proposta. Isto foi possível, uma vez que $\|\Sigma^i\| < \min J_1^i$, para cada instante k .

5. CONCLUSÃO

Neste artigo propõe-se uma metodologia de controle fuzzy evolutivo com alocação ótima robusta de autoestruturas. A metodologia de controle proposta apresenta um grande avanço, uma vez que cada subcontrolador é projetado baseado em um submodelo referente a cada regra fuzzy, obtido diretamente no espaço de estados. Outro fator de contribuição, é a realização da metodologia de controle proposta em regiões circulares, permitindo que o aspecto multiobjetivo seja satisfeito de forma flexível. Além disso, pode-se citar que para cada região circular especificada é obtido um valor de medida de robustez, podendo-se garantir de forma robusta a flexibilidade do critério multiobjetivo da metodologia de controle proposta, desde que se obedeça as condições apresentadas.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq pelo suporte financeiro, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Eletricidade (PPGEE-UFMA) e ao IFMA.

REFERÊNCIAS

- Abdulhamed, A.M. and El-Gaafary, A.A. (2017). The possibility of using itae poles in optimal mimo decentralized control systems. *i-Manager's Journal on Instrumentation & Control Engineering*, 5(3), 1.
- Angelov, P. (2010). Evolving takagi-sugeno fuzzy systems from streaming data (ets+). *Evolving intelligent systems: methodology and applications*, 21–50.
- Bajodah, A.H. and Mibar, H. (2016). Partial eigenstructure assignment on lqr control for continuous lti systems. In *2016 4th International Conference on Control Engineering & Information Technology (CEIT)*, 1–6. IEEE.
- Costa, E. and Serra, G.L. (2017). Swarm optimization based adaptive fuzzy control design from robust stability criteria. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 32(3), 1787–1804.
- dos Santos, J.F.S., Pellanda, P.C., and Simoes, A.M. (2018). Robust pole placement under structural constraints. *Systems & Control Letters*, 116, 8–14.
- Juang, J.N. (1994). Applied system identification.
- Le, X. and Wang, J. (2014). Robust pole assignment for synthesizing feedback control systems using recurrent neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 25(2), 383–393.
- Torres, L.M.M. and de Oliveira Serra, G.L. (2018). State-space recursive fuzzy modeling approach based on evolving data clustering. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 1–15.
- Yang, S.K. (2011). Robust pole-clustering of structured uncertain systems in union of disjointed circular regions. *Applied Mathematics and Computation*, 217(18), 7488–7495.
- Zhai, J., Gao, L., and Li, S. (2015). Robust pole assignment in a specified union region using harmony search algorithm. *Neurocomputing*, 155, 12–21.