Controlador Robusto: Novo Método de Escolha dos Vértices do Politopo

Ariel Starcke Buzetti* Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira*
Diogo Ramalho de Oliveira** Edvaldo Assunção*
Rodrigo Cardim* Mariana Aparecida de Moraes*

* Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, SP, (e-mail: arielsbuzetti@gmail.com, marcelo@dee.feis.unesp.br, edvaldo@dee.feis.unesp.br, rcardim@dee.feis.unesp.br, mariy_ap@yahoo.com.br).

** Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso do Sul, Campus Três Lagoas, MS, (e-mail: diogo.ramalho@ifms.edu.br)

Abstract: In the robust control literature it is usual to propose the design of the controller for the system using the polytope vertices with the maximum and minimum values of each uncertainty. Although this proposal is reasonable, it can be conservative since it can include an area of the convex region that the system does not operate. This article proposes to choose vertices of polytope that reduces the area of the convex region of the plant to make the controller design procedure less conservative. A robust switched controller will be designed for the sensor-fault *2D ball balancer* system, using vertices of the polytope with a convex area smaller than that traditionally proposed, to demonstrate that it is less conservative. It will be presented a method to choose the vertices for the particular case in which an uncertainty depends on a variable γ and the other depends on its inverse γ^{-1} . The designed controller was implemented to prove its operation in practice.

Resumo: Na literatura, para abordar o problema do controle robusto é usual propor o projeto de controle para o sistema utilizando os vértices do politopo considerando os valores máximos e mínimos de cada incerteza. Embora essa proposta seja razoável, ela pode ser conservadora já que pode incluir uma área da região convexa em que o sistema não opera. Esse artigo propõe uma metodologia para a escolha de vértices do politopo que reduz a área da região convexa da planta do sistema para tornar o projeto de controle menos conservador. Um controlador robusto chaveado foi projetado para o sistema *2D ball balancer* considerando a possibilidade de falha no sensor, utilizando vértices do politopo com área convexa menor do que a que seria proposta tradicionalmente, para demonstrar que é menos conservador. Será apresentado um método para a escolha dos vértices para o caso particular em que uma incerteza depende de uma variável γ e a outra depende de sua inversa γ^{-1} . O controlador projetado foi implementado para comprovar seu funcionamento na prática.

Keywords: Politope Vertices; Robust Control; Reliable Control; Switched Control; Linear Matrix Inequalities.

Palavras-chaves: Vértices do Politopo; Controle Robusto; Controle Confiável; Controle Chaveado; Desigualdades Matriciais Lineares.

1. INTRODUÇÃO

Em projetos de controle é comum que hajam algumas incertezas no sistema, por isso é importante criar um controlador robusto. O usual na literatura é projetar um controlador que garanta a estabilidade do sistema para qualquer incerteza dentro de uma faixa prevista. Para este fim, utilizam-se os vértices do politopo, obtidos com base nos valores mínimos e máximos de cada incerteza. Esse método embora funcional pode ser conservador por exigir que o controlador opere em situações em que o sistema nunca se encontrará. Por exemplo o controlador de um pistão cujas incertezas são o volume de ar e a pressão teria que ser projetado para funcionar mesmo quando a pressão

e o volume fossem máximos simultaneamente, o que sabe-se que nunca ocorrerá.

A proposta desse artigo é escolher os vértices do politopo de forma a diminuir a área da combinação convexa para tornar o projeto de controle menos conservador. Para demonstrar as vantagens do método, foi projetado um controlador para o sistema *2D ball balancer* considerando a possibilidade de falha nos sensores no ângulo θ utilizando controle chaveado Souza et al. (2014a). Foram realizados projetos de controle utilizando os vértices que seriam escolhidos tradicionalmente e também os que são propostos no artigo, para poder comparar o conservadorismo de cada metodologia. A forma com que foram escolhidos os vértices está devidamente demonstrado na Seção 4.

O controlador projetado utilizando os vértices propostos no artigo foi por fim implementado em bancada para demonstrar seus funcionamento na prática.

2. CONTROLE CHAVEADO

Considere o sistema linear descrito por:

$$\dot{x}(t) = A_z x(t) + B_z u(t) \quad (1)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle e

$$A_z = \sum_{i=1}^s \alpha_i A_i, \quad B_z = \sum_{i=1}^s \alpha_i B_i, \quad (2)$$

com os parâmetros incertos $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^s \alpha_i = 1$, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ para todo $i \in \mathbb{K}_s = \{1, 2, \dots, s\}$, sendo s o número de vértices do sistema.

A lei de controle chaveada utilizada, baseada em Souza et al. (2014a), é dada por:

$$u(t) = -K_\sigma x(t),$$

$$\sigma = \arg \min_{j \in \mathbb{K}_s} \{x^T(t) \bar{Q}_j x(t)\}, \quad (3)$$

sendo que a função $\arg \min_{j \in \mathbb{K}_s} \{x^T(t) \bar{Q}_j x(t)\}$ calcula o menor índice j que gera o menor valor de $x^T(t) \bar{Q}_j x(t)$, para todo $j \in \mathbb{K}_s$. A ideia básica da lei de controle chaveada é a minimização da derivada temporal da função de Lyapunov, por meio da seleção do ganho do controlador, que pertence ao conjunto de ganhos K_j , $j \in \mathbb{K}_s$. Essa lei de chaveamento utiliza matrizes simétricas auxiliares $\bar{Q}_j$, $j \in \mathbb{K}_s$ e escolhe um índice σ . Então o sistema realimentado dado em (1) e (3) pode ser representado por:

$$\dot{x}(t) = A_z x(t) - B_z K_\sigma x(t). \quad (4)$$

A função de Lyapunov do tipo quadrática é dada por

$$V(x(t)) = x^T(t) P x(t), \quad (5)$$

em que $P = P^T > 0$.

Teorema 1. (Souza et al. (2014a)). Suponha a existência de uma matriz simétrica positiva definida $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes simétricas $Z_i, Q_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $M_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e um escalar $\beta \geq 0$, para todo $i, j \in \mathbb{K}_s$, tais que:

$$-B_i M_j - M_j^T B_i^T - Z_i - Q_j < 0, \quad (6)$$

$$X A_i^T + A_i X + Z_i + Q_i + 2\beta X < 0. \quad (7)$$

Então a lei de controle chaveada (3) torna o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema (4) globalmente assintoticamente estável com uma taxa de decaimento maior ou igual β , sendo $P = X^{-1}$, $\bar{Q}_j = X^{-1} Q_j X^{-1}$ e os ganhos do controlador dados por $K_j = M_j X^{-1}$.

3. O SISTEMA 2D BALL BALANCER QUANSER®

Considere o sistema *2D ball balancer*, fabricado pela Quanser®, mostrado na Figura 1. Seu modelo esquemático referente à direção x da placa é mostrado na Figura 2, e a direção y pode ser representada da mesma forma Quanser (2008).

Figura 1. Equipamento *2D ball balancer*, pertencente ao DEE-FEIS-LPC (Souza et al., 2014b).

Figura 2. Planta esquemática do *2D ball balancer* na direção x (Quanser, 2008).

O sistema consiste de uma placa quadrada sobre a qual uma bola é colocada e se move livremente. A bola pode ser posicionada em um ponto de referência fixo ou pode rastrear uma rota determinada. Uma câmera superior é utilizada para medir a posição da bola. Existem dois servomotores, cada um deles está ligado a um dos eixos da placa. Ao controlar a posição das engrenagens de carga do servomotor, o ângulo de inclinação da placa pode ser ajustado para equilibrar a bola em uma posição plana desejada.

O modelo matemático linearizado do sistema *2D ball balancer* Quanser (2008) é dado por:

$$\ddot{d}(t) = K_{bb} \theta(t), \quad \tau \ddot{\theta}(t) + \dot{\theta}(t) = K V_m(t), \quad (8)$$

sendo:

$d(t)$ a posição da bola;

$\theta(t)$ o ângulo de carga;

$V_m(t) = u(t)$ o sinal de controle;

τ e K são parâmetros do fabricante;

$$e \quad K_{bb} = \frac{2m_b g r_{arm} r_b^2}{L_{plate} (m_b r_b^2 + J_b)}.$$

A descrição e os valores das constantes são apresentados na Tabela 1.

O sistema (8) pode ser representado por:

$$\dot{x}_p(t) = A x_p(t) + B u(t), \quad (9)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K}{\tau} \end{bmatrix}, \quad x_p(t) = \begin{bmatrix} d(t) \\ \dot{d}(t) \\ \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Tabela 1. Parâmetros do sistema *2D ball balancer*.

Parâmetros	Símbolo	Valor
Massa da bola (kg)	m_b	0,003
Distância do eixo do motor ao ponto de fixação da barra (cm)	r_{arm}	2,54
Raio da bola (cm)	r_b	1,96
Comprimento da mesa (cm)	L_{plate}	27,5
Parâmetro do fabricante (rad/sV)	K	1,76
Parâmetro do fabricante (s)	τ	0,00285
Momento de inércia de uma esfera sólida (kgcm ²)	J_b	0,0046
Parâmetro do sistema (m/s ² rad)	K_{bb}	1,3

Durante a implementação prática apenas as variáveis de estado d_M e θ_M estão disponíveis, $\dot{d}_M$ e $\dot{\theta}_M$ são estimadas por meio de filtros derivativos $G_f(s) = 20s/(s+20)$, como sugerido pela fabricante Quanser (2008), sendo d_M e θ_M os valores medidos pelo sensor, $\dot{d}_M$ e $\dot{\theta}_M$ os valores estimados de $\dot{d}$ e $\dot{\theta}$ a partir de d_M e θ_M . Dessa forma, foi considerada uma falha de até -50% na leitura do ângulo medido, acarretando uma falha simultânea na derivada do ângulo. Já a leitura da posição da bola não possui erro de leitura. O sistema com falha na leitura pode ser representado por: Teorema 2. (Buzetti (2017)). O sistema linear e invariante no tempo descrito em (9), com a lei de controle dada em (3), considerando $x(t) = x_M(t) = \Gamma_z x_p(t)$, sendo que $\Gamma_z = \sum_k \rho_k \Gamma_{ak}$ é uma matriz diagonal incerta invariante no tempo, pode ser representado por:

$$\dot{x}_M(t) = (A_z - B_z K_\sigma) x_M(t), \quad (11)$$

sendo que

$$A_z = \sum_{i=1}^s \alpha_i A_i = \sum_{i=1}^s \alpha_i \Gamma_{ai} A \Gamma_{bi}^{-1} = \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \rho_k \lambda_l \Gamma_{ak} A \Gamma_{bl}^{-1},$$

$$B_z = \sum_{i=1}^s \alpha_i B_i = \sum_{i=1}^s \alpha_i \Gamma_{ai} B = \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \rho_k \lambda_l \Gamma_{ak} B, \quad (12)$$

definindo $\alpha_i = \rho_k \lambda_l$, com $\rho_k \geq 0$, $\lambda_l \geq 0$, $\sum_{k=1}^r \rho_k = 1$, $\sum_{l=1}^r \lambda_l = 1$, $\Gamma_{ak} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\Gamma_{bl}^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizes diagonais com valores iguais a 1 nas posições relacionadas às variáveis de estado nas quais não existem incertezas vinculadas a erros de leitura incertos ocasionados por falhas.

Para o caso em que o sistema possui incerteza de até -50% em θ_M e $\dot{\theta}_M$:

$$\Gamma_{ak} = \text{diag}[1 \ 1 \ \gamma_3(a_3)_k \ \gamma_3(a_3)_k], \quad (13)$$

$$\Gamma_{bl}^{-1} = \text{diag}[1 \ 1 \ \gamma_3(b_3)_l^{-1} \ \gamma_3(b_3)_l^{-1}], \quad (14)$$

$$0,5 \leq \gamma_3 \leq 1, \quad (15)$$

$$1 \leq \gamma_3^{-1} \leq 2. \quad (16)$$

Assim o sistema *2D ball balancer* descrito em (1) e (10), ao considerar a falha invariante no tempo descrita em (13) - (16), pode ser representado por (2) e (4), sendo que

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K_{bb}}{\gamma_3(b_3)_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K \gamma_3(a_3)_i}{\tau} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Observação 3. Em Buzetti et al. (2015) está detalhado como se chegou às matrizes de (17).

Note que A_i e B_i dependem somente dos valores de $\gamma_3(a_3)$ e $\gamma_3(b_3)^{-1}$. Dessa forma considerando $0,5 \leq \gamma_3(a_3) \leq 1$ e $1 \leq \gamma_3(b_3)^{-1} \leq 2$, os vértices do polítopo utilizando o método tradicional são:

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix},$$

$$A_3 = A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2K_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$B_1 = B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{0,5K}{\tau} \end{bmatrix}^T,$$

$$B_2 = B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{K}{\tau} \end{bmatrix}^T.$$

Alguns trabalhos, como por exemplo Alves et al. (2016), consideram a presença de saturação no sinal de controle do atuador durante o projeto. Nesse trabalho optou-se em abordar o problema da saturação reduzindo a norma de controle utilizando o Teorema 4 baseado em Assunção et al. (2007).

Teorema 4. (Buzetti (2017)). Dada uma constante $\mu_0 > 0$, então a norma dos controladores K_j , $j \in \mathbb{K}_s$, pode ser descrita utilizando a minimização de η , $\eta > 0$, tal que $K_j K_j^T < \eta I / \mu_0^2$. O valor ótimo de η pode ser obtido solucionando o seguinte problema de otimização:

$$\min(\eta) \quad \begin{bmatrix} \eta I & M_j \\ M_j^T & I \end{bmatrix} > 0, \quad (19)$$

$$X > \mu_0 I. \quad (20)$$

Prova. Utilizando complemento de Schur na LMI (19), obtém-se

$$M_j M_j^T < \eta I. \quad (21)$$

Pré e pós multiplicando (20) por $\sqrt{X}$ observe que

$$\sqrt{X} \mu_0 I \sqrt{X} < \sqrt{X} X \sqrt{X} \Rightarrow \mu_0 X < X X$$

$$\Rightarrow X < \frac{X X}{\mu_0}. \quad (22)$$

Agora pré e pós multiplicando (20) por K_j e K_j^T , respectivamente, observe que

$$K_j \mu_0 I K_j^T < K_j X K_j^T. \quad (23)$$

A partir de (20)-(23) e $M_j = K_j X$, segue que

$$K_j \mu_0 I K_j^T < K_j X K_j^T < \frac{K_j X X K_j^T}{\mu_0} = \frac{M_j M_j^T}{\mu_0} < \frac{\eta I}{\mu_0}. \quad (24)$$

Então $K_j K_j^T < \eta I / \mu_0^2$ e a prova está concluída.

Esse teorema também será utilizado para verificar o conservadorismo do sistema.

4. ESCOLHENDO OS VÉRTICES DO SISTEMA

Em (18) foram apresentados os 4 vértices do sistema *2D ball balancer* com falha de até 50% no sensor, referentes aos casos em que $\gamma_3(a_3)$ e $\gamma_3(b_3)^{-1}$ são respectivamente mínimo e mínimo, mínimo e máximo, máximo e mínimo e máximo e máximo. Na Figura 3 são apresentados detalhes sobre estes vértices.

Figura 3. Posição dos vértices do controlador com 4 chaves, para o caso em que $0,5 \leq \gamma_3(a_3) \leq 1$ e $1 \leq \gamma_3(b_3)^{-1} \leq 2$, em relação à curva $\gamma_3(b_3)^{-1} = \gamma_3(a_3)^{-1}$ (em azul).

O sistema garante a estabilidade para qualquer incerteza dentro da área retangular entre os 4 vértices, mas o sistema real apresenta apenas as incertezas correspondentes à curva $\gamma_3(b_3)^{-1} = \gamma_3(a_3)^{-1}$. Inspirado em Yang et al. (2016), buscou-se uma maneira de deixar o sistema menos conservador diminuindo a área da combinação convexa dos vértices do politopo de uma forma em que continue abrangendo toda a curva $\gamma_3(b_3)^{-1} = \gamma_3(a_3)^{-1}$.

Note que o Vértice 4 não é necessário, já que a área entre as outras 3 chaves já abrigam toda a curva $\gamma_3(b_3)^{-1} = \gamma_3(a_3)^{-1}$, como pode ser visto na Figura 4.

Figura 4. Posição dos vértices do controlador sem o vértice 4, em relação à curva $\gamma_3(b_3)^{-1} = \gamma_3(a_3)^{-1}$ (em azul).

É possível diminuir ainda mais essa área entre os vértices do politopo deslocando o Vértice 1 para mais próximo da curva $\gamma_3(b_3)^{-1} = \gamma_3(a_3)^{-1}$. O ponto mais próximo

que mantém a área entre os vértices abrangendo toda a curva pode ser encontrado traçando duas retas que a tangenciam a curva nos pontos que estão os Vértices 2 e 3 e encontrando o ponto de intersecção. O Vértice 1 pode ser encontrado utilizando o Teorema 5.

Teorema 5. (Buzetti (2017)). Considerando que $0 < \gamma_{3min} \leq \gamma \leq \gamma_{3max}$, o Vértice 1 pode ser encontrado pelas equações (25) e (27):

$$\gamma_3(a_3) = \frac{2(\gamma_{3min}^{-1} - \gamma_{3max}^{-1})}{\gamma_{3min}^{-2} - \gamma_{3max}^{-2}}, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \gamma_3(b_3)^{-1} &= 2\gamma_{3min}^{-1} - \gamma_{3min}^{-2} \gamma_3(a_3) \\ &= 2\gamma_{3max}^{-1} - \gamma_{3max}^{-2} \gamma_3(a_3). \end{aligned} \quad (26)$$

Prova. Para encontrar o Vértice 1 é necessário encontrar as retas que tangenciam a curva $\gamma_3(b_3)^{-1} = \gamma_3^{-1}$ nos pontos em que γ_3 é mínimo e máximo.

As retas podem ser representadas por:

$$\gamma_3(b_3)^{-1} = C + \frac{d(\gamma_3(b_3)^{-1})}{d\gamma_3} \gamma_3(a_3), \quad (27)$$

sendo C uma constante e

$$\frac{d(\gamma_3(b_3)^{-1})}{d\gamma_3} = -\gamma_3^{-2}. \quad (28)$$

A partir de (27) e (28) e considerando que nos pontos da curva, $\gamma_3(b_3)^{-1} = \gamma_3(a_3)^{-1} = \gamma_3^{-1}$, então:

$$C = \gamma_3(b_3)^{-1} + \gamma_3^{-2} \gamma_3(a_3) = 2\gamma_3^{-1}, \quad (29)$$

assim, a partir de (27) a (29):

$$\gamma_3(b_3)^{-1} = 2\gamma_3^{-1} - \gamma_3^{-2} \gamma_3(a_3), \quad (30)$$

de forma que as retas que tangenciam a curva onde $\gamma_3 = \gamma_{3min}$ e $\gamma_3 = \gamma_{3max}$ são respectivamente:

$$\gamma_3(b_3)^{-1} = 2\gamma_{3min}^{-1} - \gamma_{3min}^{-2} \gamma_3(a_3), \quad (31)$$

$$\gamma_3(b_3)^{-1} = 2\gamma_{3max}^{-1} - \gamma_{3max}^{-2} \gamma_3(a_3). \quad (32)$$

Assim o ponto de intersecção entre as retas (31) e (32) é:

$$2\gamma_{3min}^{-1} - \gamma_{3min}^{-2} \gamma_3(a_3) = 2\gamma_{3max}^{-1} - \gamma_{3max}^{-2} \gamma_3(a_3), \quad (33)$$

$$\gamma_3(a_3) = \frac{2\gamma_{3min}^{-1} - 2\gamma_{3max}^{-1}}{\gamma_{3min}^{-2} - \gamma_{3max}^{-2}}, \quad (34)$$

obtendo assim a equação (25). Utilizando $\gamma_3(a_3)$ encontrado em (34) na reta (31) ou na reta (32), é possível encontrar $\gamma_3(b_3)^{-1}$. Note que as retas (31) e (32) são as mesmas apresentadas em (27).

No exemplo estudado, considerando $0,5 \leq \gamma_3 \leq 1$, o Vértice 1 pode ser encontrado utilizando as equações (25) e (27):

$$\gamma_3(a_3) = \frac{2(2 - 1)}{4 - 1} = \frac{2}{3}, \quad (35)$$

$$\gamma_3(b_3)^{-1} = 4 - 4\frac{2}{3} = \frac{4}{3}. \quad (36)$$

Assim o Vértice 1 está em $\gamma_3(a_3) = \frac{2}{3}$ e $\gamma_3(b_3)^{-1} = \frac{4}{3}$, o Vértice 2 está na posição em que γ_3 é mínimo, ou seja,

$\gamma_3(a_3) = 0,5$ e $\gamma_3(b_3)^{-1} = 2$ e o Vértice 2 fica na posição em que γ_3 é máximo, $\gamma_3(a_3) = 1$ e $\gamma_3(b_3)^{-1} = 1$. A Figura 5 mostra a posição dos 3 vértices do politopo.

Figura 5. Posição dos vértices do controlador com 3 chaves, para o caso em que $0,5 \leq \gamma_3(a_3) \leq 1$ e $1 \leq \gamma_3(b_3)^{-1} \leq 2$, em relação à curva $\gamma_3(a_3)^{-1} = \gamma_3(b_3)^{-1}$ (em azul).

Nota-se que a área entre os vértices do politopo descrito na Figura 5 é significativamente menor que a área encontrada na Figura 3, portanto o sistema é menos conservador.

5. PROJETO DE CONTROLE

Foi projetado o controlador do sistema *2D ball balancer* descrito na Seção 3 considerando uma falha de até -50% na leitura do ângulo medido, acarretando uma falha simultânea na derivada do ângulo. Neste exemplo também não foram consideradas falhas na leitura da posição e na estimação da velocidade da bola.

Considerando (17) e os vértices apresentados na Figura 5:

$$[A_1|A_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}K_{bb} & 0 & 0 & 0 & 2K_{bb} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{2K}{3\tau} \end{bmatrix}^T,$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{0,5K}{\tau} \end{bmatrix}^T,$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{K}{\tau} \end{bmatrix}^T.$$

Utilizando as LMIs do Teorema 1 em conjunto com as do Teorema 4, considerando os vértices do politopo (37), $\beta = 1,2$ e $\mu_0 = 0,8$, foram obtidos:

$$\eta = 3,9208 * 10^3,$$

$$K_1 = [12,3530 \ 13,0781 \ 6,5115 \ 0,1681],$$

$$K_2 = [8,7987 \ 9,5310 \ 5,1906 \ 0,1349],$$

$$K_3 = [23,9147 \ 23,8563 \ 10,1474 \ 0,2584],$$

$$P = \begin{bmatrix} 0,7573 & 0,5483 & 0,1760 & 0,0043 \\ 0,5483 & 0,5110 & 0,1791 & 0,0045 \\ 0,1760 & 0,1791 & 0,0952 & 0,0025 \\ 0,0043 & 0,0045 & 0,0025 & 0,0001 \end{bmatrix}, \quad (38)$$

$$\bar{Q}_1 = \begin{bmatrix} -45052,36 & -35334,81 & -11292,11 & -277,71 \\ -35334,81 & -26959,04 & -8458,92 & -207,41 \\ -11292,11 & -8458,92 & -2619,77 & -64,10 \\ -277,71 & -207,41 & -64,10 & -1,57 \end{bmatrix},$$

$$\bar{Q}_2 = \begin{bmatrix} -45056,96 & -35339,44 & -11294,62 & -277,77 \\ -35339,44 & -26963,70 & -8461,41 & -207,47 \\ -11294,62 & -8461,41 & -2620,98 & -64,12 \\ -277,77 & -207,47 & -64,12 & -1,57 \end{bmatrix}, \quad (39)$$

$$\bar{Q}_3 = \begin{bmatrix} -45054,27 & -35336,76 & -11293,16 & -277,74 \\ -35336,76 & -26961,04 & -8459,98 & -207,43 \\ -11293,16 & -8459,98 & -2620,30 & -64,11 \\ -277,74 & -207,43 & -64,11 & -1,57 \end{bmatrix},$$

6. FACTIBILIDADE DOS CONTROLADORES CHAVEADOS (COM 3 E 4 VÉRTICES) E DE GANHO CONSTANTE

O intuito de escolher outros vértices do politopo de modo a diminuir a área da combinação convexa é diminuir o conservadorismo do projeto. Nessa seção será comparada a área de factibilidade do controlador chaveado de 3 e 4 vértices e do controlador com ganho constante (que possui 4 vértices).

A Figura 6 demonstra graficamente a restrição η mínima encontrada para cada valor de falha de projeto em θ_M e $\dot{\theta}_M$ no sistema *2D ball balancer*, descrita em (10), para cada projeto de controle.

Todos os controladores foram projetados utilizando as LMIs (19) e (20) do Teorema 4, com $\mu_0 = 0,8$ e minimizando η para restringir a norma dos controladores. Os controladores chaveados (de 3 e 4 vértices) foram projetados utilizando as LMIs (6) e (7).

Note que o sistema será factível para valores de η iguais ou superiores aos encontrados nos gráficos, portanto a área de factibilidade será maior no controlador que apresentar menor η .

Figura 6. Falha $\times \eta$ dos controladores chaveado e de ganho constante utilizando os vértices escolhidos pelo método tradicional e do controlador chaveado que utilizou os vértices escolhidos pelo método proposto, para falhas entre -70% e -90% .

Observação 6. O projeto de controle demonstrado nessa seção e a Figura 6 utilizam $\gamma_{3_{max}} = 1$, mas o Teorema 5 permite utilizar $\gamma_{3_{max}} \geq 1$.

Como se pode observar, η mínimo dos controladores chaveados foram menores ou iguais ao do controlador com ganho constante para todas as falhas de projeto. O η mínimo do controlador chaveado de 3 vértices foi menor que o de 4 vértices nos casos em que as falhas de projeto afetam mais o sistema (a partir de -85%) e aproximadamente igual quando as falhas eram menores.

Ambos os controladores chaveados são menos conservadores que o controlador com ganho constante. A vantagem da escolha de vértices com menor área da combinação convexa é notável quando o sistema está estressado.

7. RESULTADOS PRÁTICOS

O objetivo das implementações é fazer com que a bola siga a referência de um quadrado de 10 cm de lado. Após 40 segundos do início da simulação foi inserida uma falha de -50% na leitura dos ângulos dos servomotores das direções x e y da placa. A entrada de controle $u(t)$ é limitada em $\pm 5V$ através de um saturador, inserido via *Simulink*®, para não danificar o atuador.

O Teorema 1 não garante a estabilidade do sistema no momento em que ocorre a falha, já que supõe que a falha é invariante no tempo, mas optou-se por manter os resultados do sistema sem e com falha em um único gráfico para facilitar a visualização.

No sistema real o sensor apresenta apenas o ângulo medido (θ_M), mas como a implementação em laboratório utilizou uma falha induzida via *software*, então tem-se acesso ao ângulo real (θ) e ao ângulo medido (θ_M). Para demonstrar o comportamento real do sistema a Figuras 7 apresentam θ ao invés de θ_M .

Como os resultados no eixo x e y são análogos, serão apresentados apenas os resultados no eixo x .

Figura 7. Resultados práticos da direção x : posição r_x , ângulo θ_x , sinal de controle u_{σ_x} e a regra de chaveamento σ_x do *2D ball balancer* utilizando o controlador chaveado (3), (38) e (39).

8. CONCLUSÕES

Nesse artigo foi demonstrado que a escolha de vértices do politopo que diminui a área convexa reduz o conservadorismo do projeto de controle. Foi projetado um controlador

robusto chaveado para o sistema *2D ball balancer* com falha no sensor de ângulo para servir como um exemplo de como escolher os vértices e mostrar que a melhor escolha dos vértices de fato diminui o conservadorismo do controlador, como pode ser visto na Figura 6. O controlador foi por fim implementado em bancada para comprovar seu funcionamento na prática.

9. AGRADECIMENTOS

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq (Processos: 209872/2018-9, 301227/2017-9, 306634/2017-1 (Bolsas de pesquisa)), a FAPESP (Processo: 2011/17610-0) e a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

- Alves, U.N.L.T., Teixeira, M.C.M., de Oliveira, D.R., Cardim, R., Assunção, E., and de Souza, W.A. (2016). Smoothing switched control laws for uncertain nonlinear systems subject to actuator saturation. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 30(8-10), 1408–1433. doi:10.1002/acs.2671.
- Assunção, E., Teixeira, M.C.M., Faria, F.A., Silva, N.A.P.D., and Cardim, R. (2007). Robust state-derivative feedback LMI-based designs for multivariable linear systems. *International Journal of Control*, 80(8), 1260–1270.
- Buzetti, A.S. (2017). *Projeto de Controle Robusto Chaveado com Falhas nos Sensores*. Dissertação de mestrado, Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira.
- Buzetti, A.S., Oliveira, D.R., Teixeira, M.C.M., Souza, W.A., Assunção, E., and Cardim, R. (2015). Projeto de controle robusto chaveado com falhas nos sensores. In *SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE - SBAI*, 12., 2015, Natal. *Anais...*, 748–753. Natal, RN.
- Quanser (2008). *2D ball balancer control using QUARC: instructor manual*. Quanser Inc., Canadá.
- Souza, W.A., Teixeira, M.C.M., Cardim, R., and Assunção, E. (2014a). On switched regulator design of uncertain nonlinear systems using Takagi-Sugeno fuzzy models. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 22(6), 1720–1727.
- Souza, W.A., Oliveira, D.R., Teixeira, M.C.M., Silva, L.S.C., Cardim, R., and Assunção, E. (2014b). Projeto e implementação de um controlador robusto chaveado utilizando modelos fuzzy Takagi-Sugeno. In *CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA - CBA*, 2014, Belo Horizonte. *Anais...*, 2238–2244. Belo Horizonte, MG.
- Yang, X., Hak-Keung, and Wu, L. (2016). Novel membership-function-dependent stability condition for T-S fuzzy systems. In *INTERNATIONAL CONFERENCE OF FUZZY SYSTEMS - FUZZ*, 2016, Vancouver. *Proceedings...*, 2199–2205. Vancouver, Canada.