Projeto via LMIs de Controlador H_∞ Chaveado para Sistemas Incertos, Aplicado ao Sistema 2 DOF Ball Balancer com D-estabilidade

Mariana Aparecida de Moraes. Jean Marcos de Souza Ribeiro.*
Ariel Starke Buzetti. *

*UNESP – Universidade Estadual Paulista, Campus de Ilha Solteira
Departamento de Engenharia Elétrica, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira.
Ilha Solteira-SP, Brasil, (e-mails: mariy_ap@yahoo.com.br, jean.ribeiro@unesp.br, arielsbuzetti@gmail.com)

Abstract: The project proposes the study, simulation and implementation of an H_∞ controller applied in an unstable plant with polytopic uncertainties. These uncertainties are related to failures, which recurrently occur in the practical implementations of engineering. Thus, the designed controller should ensure high reliability for such systems. The switched control law chooses the gain of the controller that does state feedback in order to minimize the derivative of the Lyapunov function of the quadratic type, guaranteeing a low-cost performance, being the project based on Linear Matrix Inequalities - LMIs. The theories covered in this topic are contemporary and promise high reliability and efficiency that will be confirmed with practical implementation in a 2 DOF Ball Balancer system.

Resumo: O estudo, simulação e implementação de um controlador H_∞ aplicado em uma planta instável com incertezas politópicas é discutido no trabalho. Estas incertezas estão relacionadas a falhas, que se apresentam recorrentemente nas implementações práticas da engenharia. Assim, o controlador projetado deve garantir alta confiabilidade para tais sistemas. A lei de controle chaveada escolhe o ganho do controlador que faz a realimentação de estados de forma a minimizar a derivada da função de Lyapunov do tipo quadrática, garantindo um desempenho de custo reduzido, sendo o projeto baseado em desigualdades matriciais lineares (*Linear Matrix Inequalities* – LMIs). As teorias abordadas nesse tema são contemporâneas e prometem alta confiabilidade e eficiência que serão confirmadas com a implementação prática em um sistema 2 DOF Ball Balancer.

Keywords: Robustness; failures; switching; polytopes; H_∞ controller.

Palavras-chave: Robustez; falhas; chaveamento; politopos; controlador H_∞ .

1. INTRODUÇÃO

A alta confiabilidade dos controladores, nas aplicações da engenharia, é um critério importante, especialmente em sistemas críticos para a segurança humana, tais como sistemas de aeronaves e sistemas médicos (Dong & Yang, 2015). Em várias aplicações de controladores realimentados, a planta pode estar submetida as condições ambientais desfavoráveis, incertezas paramétricas, ou ainda com falhas nos sensores ou saturação dos dispositivos. Com isso, a estabilidade e desempenho do sistema controlado podem ficar comprometidos. Dessa forma, é necessário considerar as possíveis falhas na planta e incertezas politópicas para contornar o problema de estabilidade e manter o bom desempenho desejado.

Os sistemas chaveados representam uma subclasse de sistemas híbridos caracterizada por ter uma lei de chaveamento que seleciona, a cada instante de tempo, um dos subsistemas disponíveis. Essa lei de chaveamento pode ser arbitrária, como em Mahmoud et al. (2009), ou uma variável de controle que deve ser projetada para garantir estabilidade e bom desempenho para todo o sistema.

Outra técnica de controle possível é baseada no controle com modo deslizante, como foi proposto em Wu et al. (2013). Para sistemas lineares chaveados, a literatura apresenta vários resultados importantes relativos ao projeto de controle da lei de chaveamento baseada na realimentação de estados (Deaecto & Santos, 2015).

Um sistema de controle projetado para trabalhar com as incertezas politópicas é denominado de controlador robusto, que pode ser projetado para tolerar falhas de atuadores ou sensores dentro de um subconjunto já especificado, mantendo as propriedades do sistema dentro das especificações desejadas (Veillette et al., 1992; Mingqing, 2009).

Em Zhang & Jiang (2008) tem-se uma revisão bibliográfica de sistemas de controle tolerantes a falhas, abordando aplicações práticas das técnicas com ênfase nas falhas. Há diversos trabalhos que desenvolvem técnicas de controle robusto, modelando as incertezas como funções incertas parametrizadas (Yang et al., 2000; Yang et al., 2001; Mingqing, 2009; Wang et al., 2011; Dong & Yang, 2015). Nesses trabalhos a realimentação é realizada com o vetor de estados sujeito a incertezas. Dessa forma, utilizam a dinâmica do vetor

de estados $x(t)$ com manipulações algébricas de forma a atenderem as condições necessárias para manterem o sistema com os parâmetros de eficiência e estabilidade desejados.

Assim, o objetivo desse trabalho é estudar uma representação em espaço de estados do sistema não linear, linearizado em torno do ponto de operação, que descreva a dinâmica do vetor de estados representando as incertezas politópicas do sistema. As LMIs serão utilizadas para garantir a estabilidade e eficiência do sistema e assim projetar o controle H_∞ chaveado para o problema. Em Souza et al. (2013), Oliveira et al. (2014) e Souza et al. (2014) os ganhos que as LMIs trazem para o controle chaveado são menos conservadores que aqueles propostos pelo clássico em Boyd et al. (1994). Para realizar o projeto de controle via LMIs, foram utilizados o software MatLab com a linguagem *Yalmip* (Lofberg, 2004) e o *solver* *SeDuMi*.

2. SISTEMA BALL BALANCER COM FALHAS

A planta esquemática do sistema *Ball Balancer* é ilustrada pela Fig. 1.

Fig. 1 Planta esquemática do sistema *Ball Balancer* do eixo x . Este módulo é baseado em uma mesa, articulada por dois servos motores, com a intenção de posicionar uma esfera em determinado local do plano cartesiano (X , Y) da mesa.

No manual fornecido pelo fabricante, são dados os valores dos parâmetros da planta listados na Tabela 1.

Tabela 1. Parâmetros do sistema

Parâmetro	Símbolo	Valor
Massa da esfera	m	0,003 [kg]
Distância do eixo do motor ao ponto de fixação da barra	r_{arm}	2,54 [cm]
Raio da esfera	r_b	1,96 [cm]
Comprimento da mesa	L_{place}	27,5 [cm]
Constante de velocidade do motor	K_m	1,76 [rad/sV]
Constante de tempo do motor	τ	0,00285 [s]
Momento de inércia da esfera oca	J	0,0077 [kgcm ²]

O modelo não linear e a linearização do sistema podem ser vistas em Quanser (2008), representado em (1).

$$\ddot{x}_d(t) = K_{bb}\theta(t), \ddot{\theta}(t) = (K_m u(t) - \dot{\theta}(t))/\tau. \quad (1)$$

Das quais $K_{bb} = 2mgr_{arm}r_b^2/(L_{place}(mr_b^2 + J))$ e $u(t)$ representa o sinal de entrada. Obtêm-se assim, o sistema em variáveis de estado representado em (2):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_d(t) \\ \ddot{x}_d(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1/\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d(t) \\ \dot{x}_d(t) \\ \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ K_m/\tau \end{bmatrix} u(t). \quad (2)$$

Os estados representados são: posição da esfera " x_d ", ângulo de carga " θ " e suas velocidades.

O Ball Balancer é disposto de sensores para posição, por meio de uma câmera digital que captura imagens bidirecionais da mesa e rastreia as coordenadas da esfera em tempo real, e para o ângulo de carga, mas tanto na simulação como na implementação do controlador, a derivada direta não é usada para estimar as velocidades, pois a medida obtida pelos sensores pode possuir algum ruído inerente e sua derivada resultaria em um sinal de alta frequência amplificado que danifica o atuador. Assim, os estados de velocidade foram estimados através de um filtro passa-alta de primeira ordem da forma $G(s) = 20s/(s + 20)$.

Neste trabalho será considerado uma falha na medição das variáveis de estado $x(t)$, manifestando-se com um efeito multiplicativo, assim como em Buzetti et al. (2015), da qual o ganho do sensor pode ser reduzido, variando a partir do seu valor nominal para um valor incerto, porém maior que zero.

Considere as definições em (3).

$$\begin{aligned} \rho_k &\geq 0, \sum_{k=1}^j \rho_k = 1; \varphi = \sum_{k=1}^j \rho_k \varphi_k = \\ &\sum_{k=1}^j \rho_k \text{diag}[\gamma_1(a_1)^{-1} \gamma_2(a_2)^{-1} \dots \gamma_n(a_n)^{-1}], \\ \lambda_l &\geq 0, \sum_{l=1}^j \lambda_l = 1; \varphi^{-1} = \sum_{l=1}^j \lambda_l \varphi_l^{-1} = \\ &\sum_{l=1}^j \lambda_l \text{diag}[\gamma_1(b_1)^{-1} \gamma_2(b_2)^{-1} \dots \gamma_n(b_n)^{-1}]. \end{aligned} \quad (3)$$

Os elementos ρ_k e λ_l são constantes e incertos, j = número de politopos, n = número de estados e o conjunto $a = [a_1 \dots a_n]$ representa valores entre 0 e 1 definindo $\gamma(a)_{min}$ para falha máxima, e $\gamma(a)_{max}$ para falha mínima. Nota-se que foi feita uma diferenciação nas matrizes φ_k e φ_l^{-1} porque em alguns vértices do politopo $\gamma(a)_{min}^{-1} \neq \gamma(b)_{min}^{-1}$ e/ou $\gamma(a)_{max}^{-1} \neq \gamma(b)_{max}^{-1}$ e será considerado os vértices compondo as combinações dos valores mínimos e máximos de $\gamma(a)$ e $\gamma(b)^{-1}$. Para mais detalhes, ver (Buzetti et al., 2015).

Dessa forma, os valores medidos são obtidos pelos sensores sujeitos às falhas. Dessa forma, tem-se o vetor de estados medidos $x_m(t)$ que se relaciona com o vetor de estados $x(t)$ por (4)

$$x(t) = \varphi x_m(t). \quad (4)$$

O projeto do controlador considera todos os possíveis cenários de falhas.

Neste trabalho, ambas matrizes A e B possuem incertezas e definem-se como (5).

$$\mathbb{A} = \{A(\alpha) = \sum_{i=1}^j \alpha_i A_i\}; \mathbb{B} = \{B(\alpha) = \sum_{i=1}^j \alpha_i B_i\} \quad (5)$$

sendo $\sum \alpha_i = \rho_k \lambda_l = 1$ em que $\alpha_i \geq 0$.

3. CONTROLE H_∞ CHAVEADO E D-ESTÁVEL

O sistema linear com incertezas α é descrito em (6):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) + Hw(t), \\ y(t) &= C(\alpha)x(t) + D(\alpha)u(t), \end{aligned} \quad (6)$$

Em que $w(t)$ uma entrada exógena no sistema. As matrizes que descrevem o sistema não são precisamente conhecidas, pois estão em função das incertezas α , mas que pertencem a um politopo $\mathcal{D}$ dado por (7):

$$\mathcal{D} = \{(A, B, C, D)(\alpha) = \sum_{i=1}^j \alpha_i (A_i, B_i, C_i, D_i)\}. \quad (7)$$

Nesse trabalho foi considerado $D = 0$. A entrada exógena $w(t)$ considerada não nula e finita pode ser transmitida por um canal de comunicação, neste contexto pode representar ruídos aditivos no sinal de controle ou perturbações como a influência do vento na posição da esfera.

Para que o controlador possa rejeitar uma entrada exógena, é necessário considerar uma força externa atuando sobre a esfera. Obtém-se assim, um novo equacionamento para o modelo matemático descrito em (8) tal que:

$$\ddot{x}_d(t) = K_{bb}\theta(t) + r_b^2 w(t)/(mr_b^2 + J). \quad (8)$$

Prova: Fazendo-se a análise de forças atuantes na esfera da Fig. 2 e aplicando-se a Segunda Lei de Newton, têm-se (9).

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_d &= \frac{2mg\theta r_{arm}}{L} - \frac{J\ddot{x}_d}{r_b^2} - w(t) \rightarrow \\ \ddot{x}_d &= \frac{2mgr_{arm}r_b^2\theta}{L_{place}(mr_b^2 + J)} - \frac{w(t)r_b^2}{mr_b^2 + J}, \end{aligned} \quad (9)$$

Substitui-se $K_{bb} = 2mgr_{arm}r_b^2/(L_{place}(mr_b^2 + J))$ e a prova está concluída.

Dessa forma, verifica-se que a matriz H é representada em (10)

$$H = [0 \quad -r_b^2/(mr_b^2 + J) \quad 0 \quad 0]'. \quad (10)$$

O custo garantido H_∞ é um critério importante para analisar o desempenho e robustez de sistemas dinâmicos, sendo qualquer valor $\delta > 0$ tal que $\|H(\alpha, s)\|_\infty < \gamma, \forall (A, B, C, D)(\alpha) \in \mathcal{D}$ em que $y(t)'y(t) < \delta^2 w(t)'w(t)$. O valor otimizado corresponde ao menor valor δ .

Para que o sistema (5) seja estável, a norma H_∞ pode ser caracterizada pela função de Lyapunov dada em (11).

$$\begin{aligned} v(x) &= x(t)'Px(t); P = P' > 0, \\ \dot{v}(x) &= \dot{x}(t)'Px(t) + x(t)'P\dot{x}(t) < 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Impondo-se $\dot{v}(x) + y(t)'y(t) - \gamma^2 w(t)'w(t) < 0$, faz-se a substituição de $\dot{x}(t)$ e $\dot{v}(x)$ dados em (6) e (11), respectivamente, para $u(t) = 0$, e aplica-se o complemento de Schur, obtendo-se a LMI (12).

$$\begin{bmatrix} A_i P + P A_i' & \bullet & \bullet \\ B_i' P & -\mu I & \bullet \\ C & D & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (12)$$

Das quais $\mu = \delta^2$ é adotado para que a matriz seja linear e o símbolo $\bullet$ representa o bloco simétrico transposto. Se a condição (10) for satisfeita, o sistema é assintoticamente estável.

O objetivo é determinar um conjunto de ganhos K_j no sistema realimentado que compõem a lei de controle (13).

$$u(t) = u_\sigma(t) = -K_\sigma x(t). \quad (13)$$

A estratégia de chaveamento de malha fechada tem o intuito de guiar trajetórias de qualquer condição inicial $x(0) = x_0$ até um ponto de equilíbrio $x_e \in \mathbb{X}_e$ desejado, sendo $\mathbb{X}_e$ um conjunto de pontos de equilíbrio a ser determinado. Todavia, o controlador deve levar em conta o índice de desempenho H_∞ definido anteriormente.

Em Buzetti et al. (2015), o argumento σ deverá ser responsável pelo chaveamento entre os controladores, seguindo a lei (14).

$$\sigma = \operatorname{argmin}_{i \in K_j} \{x' P Q_j P x\}. \quad (14)$$

Teorema 1 Suponha a existência de uma matriz simétrica positiva definida $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes simétricas $M_j, Q_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que (Souza et al. 2014):

$$-B_i Z_i - Z_i' B_i' - M_j - Q_j < 0. \quad (15)$$

Em que $X = P^{-1}$ e os controladores K_j são obtidos por $K_j = Z_i X^{-1}$.

Prova: A condição de estabilidade (11) define que:

$$\dot{v}(x_m) = x_m'(A_i' P + P A_i - K_\sigma' B_i' P - P B_i K_\sigma)x_m. \quad (16)$$

Considere (17), substitui-se $j = \sigma$.

$$-(P B_i K_\sigma + K_\sigma' B_i' P) < P M_j P + P Q_j P. \quad (17)$$

Então, de (17) tem-se:

$$\begin{aligned} -x_m'(P B_i K_\sigma + K_\sigma' B_i' P)x_m &= -\sum_{i=1}^j \alpha_i x_m'(P B_i K_\sigma + \\ K_\sigma' B_i' P)x_m &\leq \sum_{i=1}^j \alpha_i x_m' P M_i P x_m + x_m' P Q_\sigma P x_m. \end{aligned} \quad (18)$$

Em (5) e (14), verifica-se que $x_m' P Q_\sigma P x_m = \min_{i \in K_j} \{x' P Q_i P x\} \leq \sum_{i=1}^j \alpha_i x_m' P Q_\sigma P x_m$.

De (18), tem-se:

$$-x_m'(P B_i K_\sigma + K_\sigma' B_i' P)x_m \leq \sum_{i=1}^j \alpha_i x_m'(P M_i P + P Q_\sigma P)x_m. \quad (19)$$

Como $\sum \alpha_i = 1$ e $\alpha_i \geq 0$, verifica-se (19).

$$A_i' P + P A_i + P M_j P + P Q_j P < 0. \quad (20)$$

Se pré multiplicar (19) por $X = P^{-1}$ e pós multiplicar pelo mesmo, a LMI (14) pode ser considerada.

$$X A_i' + A_i X + M_j + Q_j < 0. \quad (21)$$

O sistema realimentado que será trabalhado, por fim, é formulado substituindo (13) em (6), apresentado em (21).

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A(\alpha) - B(\alpha)K_\sigma)x(t) + H(\alpha)w(t) \\ y(t) &= C(\alpha)x(t). \end{aligned} \quad (22)$$

Reformulando (12) com o sistema (22) temos o Teorema 2.

Teorema 2 O sistema (22) é assintoticamente estável se, dado um escalar $\mu > 0$, existirem matrizes $X = X' > 0$ e Z_i , de

dimensões adequadas, satisfazendo o seguinte problema de otimização (Boyd et al. 1994).

$$\min \mu$$

$$\begin{bmatrix} He\{A_i X\} - B_i Z_i - Z_i' B_i' & H & X C_i' \\ \vdots & -\mu I & 0 \\ \vdots & \vdots & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (23)$$

$He\{\}$ representa o operador hermitiano. Considerando a equação (20), a parcela $He\{A_i X\} - B_i Z_i - Z_i' B_i'$ foi substituída por $He\{A_i X\} + M_j + Q_j$.

O valor muito alto na matriz H deste trabalho exige muito dos controladores. Assim, foi considerado no projeto dos controladores o problema de saturação em controladores chaveados, reduzindo-se a norma de controle utilizando o Teorema 3.

Teorema 3 Dada uma constante $\mu_0 > 0$, então a norma dos controladores K_j , pode ser descrita utilizando a minimização de η , $\eta > 0$, tal que $K_j K_j' < \eta I / \mu_0^2$. O valor ótimo de η pode ser obtido solucionando o problema de otimização (24) (Buzetti, 2017).

$$\min(\eta)$$

$$\begin{bmatrix} \eta I & Z_j \\ Z_j' & I \end{bmatrix} > 0; X > \mu_0 I. \quad (24)$$

Estas LMIs foram consideradas na obtenção dos controladores K_i deste trabalho.

O projeto de controladores H_∞ está relacionado com aspectos no domínio da frequência e fornece pouco controle sobre o comportamento do transitório e a localização dos pólos de malha fechada. Todavia, o tempo de resposta satisfatório muitas vezes pode ser alcançado, forçando os pólos de malha em uma sub-região adequada no semiplano esquerdo.

Em Chilali & Gahinet (1996) é proposta uma região $S(\partial, r, \beta)$, chamada de critério de D-estabilidade, que restringe os autovalores de cada vértice do politopo em malha fechada, dado que as LMIs em (25), (26) e (27) sejam atendidas.

$$A_j X + X A_j' + M_j + Q_j + 2\partial X < 0, \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} -rX & A_j X - B_j Z_j \\ \vdots & -rX \end{bmatrix} < 0, \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} \phi & \cos(\beta)(A_j X - X A_j' - B_j Z_j + Z_j' B_j') \\ \vdots & \phi \end{bmatrix} < 0, \quad (27)$$

$\phi = \sin(\beta)(A_i X + X A_i' - B_i Z_i - Z_i' B_i')$.

Observação: A LMI (25) foi adaptada considerando-se (20).

Da análise de estabilidade de Lyapunov, em Chilali & Gahinet (1996) tem-se que $X = P^{-1}$ e $Z_i = K_j X$, ou seja, $K_j = Z_i X^{-1}$ é o ganho do controlador. A região $S(\partial, r, \beta)$ apresenta a taxa de decaimento ∂ , um disco de raio r e duas assíntotas com ângulo β .

O acesso aos estados é dado pela leitura dos sensores da planta, dessa forma o controle se baseia no estado medido x_m , e considera-se as incertezas como as falhas definidas em (3). Os politopos são calculados como sugere (28).

$$\bar{A}(\alpha) = \varphi_i A(\alpha) \varphi_i^{-1}; \bar{B}(\alpha) = \varphi_i B(\alpha). \quad (28)$$

A proposta desse trabalho é construir uma lei de controle chaveada, utilizando os fundamentos apresentados, e assim fazer a simulação e implementação prática no sistema *2 DOF Ball Balancer*, da empresa canadense Quanser Consulting (Quanser, 2008).

3. RESULTADOS TEÓRICOS - SIMULAÇÕES

Para a construção dos politopos, foi considerada falhas de 0% (sem falha) até 50%, isto é, $\gamma_{max} = 1$ e $\gamma_{min} = 0.5$, na posição angular $\theta(t)$ e em sua velocidade $\dot{\theta}(t)$. Dessa forma, tem-se (29).

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= diag[1 \ 1 \ \gamma_{max} \ \gamma_{min}], \varphi_1^{-1} = diag[1 \ 1 \ \gamma_{max}^{-1} \ \gamma_{min}^{-1}], \\ \varphi_2 &= diag[1 \ 1 \ \gamma_{min} \ \gamma_{min}], \varphi_2^{-1} = diag[1 \ 1 \ \gamma_{min}^{-1} \ \gamma_{min}^{-1}], \\ \varphi_3 &= diag[1 \ 1 \ \gamma_{max} \ \gamma_{max}], \varphi_3^{-1} = diag[1 \ 1 \ \gamma_{max}^{-1} \ \gamma_{max}^{-1}], \\ \varphi_4 &= diag[1 \ 1 \ \gamma_{min} \ \gamma_{max}], \varphi_4^{-1} = diag[1 \ 1 \ \gamma_{min}^{-1} \ \gamma_{max}^{-1}]. \end{aligned} \quad (29)$$

Os politopos calculados do sistema são:

$$A_1 = A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0862 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -350,8772 \end{bmatrix};$$

$$A_2 = A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,1724 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -350,8772 \end{bmatrix}; \quad (30)$$

$$B_1 = B_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 314,035]'; B_3 = B_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 628,070]';$$

$$H = [0 \ -200 \ 0 \ 0].$$

Os controladores (31) foram calculados utilizando as LMIs apresentadas em (23) com a modificação sugerida por (21), (24), (25), (26), (27) e considerando os valores $\partial = 1,9$, $r = 320$ e $\beta = 1,8$ (rad).

$$\begin{aligned} K_1 &= [94,6088 \ 60,9083 \ 15,9346 \ -0,0818], \\ K_2 &= [85,9936 \ 55,8996 \ 16,8491 \ -0,0648], \\ K_3 &= [54,7443 \ 34,3898 \ 8,8784 \ -0,1068], \\ K_4 &= [52,2790 \ 32,9614 \ 8,9228 \ -0,1041]. \end{aligned} \quad (31)$$

Verifica-se em (32) os valores numéricos dos autovalores dos controladores chaveados.

$$\begin{aligned} \delta_1 &= -[311,29; 9,78; 2,41 - 1,47i; 2,41 + 1,47i], \\ \delta_2 &= -[314,35; 6,42 - 5,69i; 6,42 + 5,69i; 1,84], \\ \delta_3 &= -[270,25; 14,31; 2,26 - 1,47i; 2,26 + 1,47i], \\ \delta_4 &= -[270,52; 8,57 - 6,23i; 8,57 + 6,23i; 1,86]. \end{aligned} \quad (32)$$

Todos os autovalores se encontram dentro da região $S(\partial, r, \beta)$ estabelecida. A escolha dos parâmetros da região foi feita de forma experimental, verificando-se a cada teste qual controlador correspondia com um resultado mais satisfatório.

Para realizar a simulação, com um tempo de amostragem de 0,002 (s), foi inserida uma entrada exógena de $w(t) = 0,003(N)$, um trem de pulsos com período de 5 (s) e largura de pulso de 2%. Uma onda quadrada com período de 10 (s) que varia de 1 a 0,5 foi utilizada para a simulação das falhas.

Dessa forma, foi obtida a simulação via Matlab/Simulink presente na Fig. 3.

Fig. 3 Resultados teóricos do eixo x.

Em condições de falha nula e $w(t) = 0$, verifica-se que os controladores fazem o sistema entrar em regime em aproximadamente 2,5 s (verifique a simulação em $t = 25$ s). Com a entrada exógena, o controle atuou e estabilizou o sistema novamente, comprovando a eficiência dos controladores. Ainda, as falhas não prejudicaram o sistema para cumprir sua trajetória, ilustrando a eficiência do método adotado. O eixo y é descrito pelo mesmo sistema, portanto a simulação deste ficaria redundante.

A grande vantagem do uso dos controladores chaveados está em sua região de factibilidade. Na programação, foi calculado o controlador H_∞ sem chaveamento, ou seja, com apenas uma matriz Z para fins de comparação. Utilizando as mesmas LMIs para o relaxamento e os referentes à D-estabilidade, obteve-se as Fig.4 que ilustra a região de factibilidade do controlador não chaveado e chaveado.

Fig. 4 Região de factibilidade dos controladores.

A região analisada foi de $0 < \theta < 3$; $0 < r < 340$. A análise das figuras deixa evidente a relaxação das LMIs causadas pelas variáveis Z_j , verificando-se a região de factibilidade superior ao controle clássico.

4. RESULTADOS PRÁTICOS

A implementação do controlador foi realizada no sistema 2 *DOF Ball Balancer*. A Fig. 5 apresenta o sistema, que possui uma câmera filmadora para medir a posição cartesiana da esfera.

Fig. 5 Fotografia do Sistema 2 *DOF Ball Balancer*

A implementação do controlador no protótipo Ball Balancer foi realizada de forma que a esfera deveria seguir uma referência, uma circunferência de raio 5 (cm) e um quadrado de lado 10 (cm). Na implementação, foi inserida uma falha na posição angular e sua derivada que varia de 50% a 0%, isto é, um sinal de 0,5 a 1 que multiplica o sinal ilustrado nas Fig. 6 e Fig.7.

O sinal de controle $u(t)$ apresentava um saturador de $\pm 5(V)$ inserido via software Matlab/Simulink para a proteção do atuador.

As Fig.6 e Fig.7 apresentam os resultados práticos obtidos do chaveamento, posição da esfera, sinal de controle $u(t)$ e a falha inserida.

Verifica-se que com o controlador apresentado, o sistema seguiu a trajetória desejada mantendo um sinal de controle relativamente baixo e tempo de estabilidade próxima a 3 (s), como sugere a simulação. A implementação, portanto, confirma a eficiência do método.

Fig. 7 Resultados práticos do eixo x para a circunferência: chaveamento, posição x_d , sinal de controle $u(t)$, falha.

Fig. 8 Resultados práticos do eixo x para o quadrado: chaveamento, posição x_d , sinal de controle $u(t)$, falha.

5. CONCLUSÕES

Este trabalho realiza a análise do controle robusto H_∞ chaveado com D-estabilidade de um sistema instável linearizado *Ball Balancer* sujeito a falhas em até 50% e ainda com uma entrada exógena. O uso da D-estabilidade e das LMIs em função de η tornaram os ganhos dos controladores compatíveis com uma implementação prática, com esforço moderado do sinal de controle e bom desempenho ao sistema. Dessa forma, o método proposto demonstra robustez para o sistema, impedindo-o de deixar sua trajetória desejada, com grande área de factibilidade devido aos controladores chaveados.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Os autores agradecem também à FAPESP pelo apoio financeiro e aos membros do Laboratório de Pesquisa em Controle e ao Departamento de Engenharia Elétrica de Ilha Solteira.

REFERÊNCIAS

- Boyd, S; Ghaoui, L. E; Feron, E; Balakrishnan, V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. (1994). Vol. 15 of *Studies in Applied Mathematics*, SIAM – Soc. Ind. Appl. Math., Philadelphia, PA.
- Buzetti, A. S, Teixeira, M. C M, Oliveira, D. R, Lazarini, A Z. N, Assunção, E, Cardim, R. (2016). Projeto de controle robusto para sistemas com sensores que apresentam falhas variantes no tempo. XXI Congresso Brasileiro de Automação – CBA. Vitória, ES.
- Buzetti, A. S. (2017). Projeto de controle robusto chaveado com falha nos sensores Dissertação de mestrado – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira UNESP. Ilha Solteira, SP.
- Chilali, M. Gahinet, P. (1996). H_∞ Design with pole placement constraints: An LMI approach. *Automatic Control*, IEEE Transactions on 41(3): 358-367.
- Deaecto, G. S; Santos, G. C. (2015). State feedback H_∞ control design of continuous-time switched affine systems. *IET Control Theory & Applications*, vol. 9, pp. 1511-1516.
- Dong, J; Yang, G. H. (2015). Reliable state feedback controls T-S fuzzy systems with sensor faults. *IEEE Transactions* on 23(2): 421-433.
- Lofberg, J. (2004). Yalmip: a toolbox for modeling and optimization in Matlab. IEEE Int Symposium on computer aided control system design.
- Mahmoud, M. S; Shi, P; Saif, A. W. A. (2009). Stabilization of linear switched delay systems: H_2 and H_∞ methods. *Journal of Optimization Theory and Applications*, pp 583-601.
- Minqing, X. (2009). Reliable robust guaranteed cost control of delta operator linear uncertain systems with sensor failure. *Intelligent Computation Technology and Automation*.
- Oliveira, D. R; Teixeira, M. C. M; Assunção, E.; Souza, W. A; Moreira, M. R; Silva, J. H. P. (2014). Projeto de controle robusto H_∞ chaveado: Implementação prática em um sistema de suspensão ativa. XX Congresso Brasileiro de Automação – CBA, Belo Horizonte, MG.
- Quanser. (2008). *2DOF Ball Balancer control using Quarc: Instructor manual*, Quanser Inc., Canadá.
- Souza, W. A; Teixeira, M. C. M.; Cardim, R; Assunção, E. (2014). On switched regulator design of uncertain nonlinear systems using Takagi-Sugeno fuzzy models. *Fuzzy Systems*, IEEE Transactions on 22(6): 1720-1727.
- Souza, W. A; Teixeira, M. C. M.; Santim, M. P. A., Cardim, R; Assunção, E. (2013). On switched control design of linear time invariant systems with polytopic uncertainties. *Mathematical Problems in Engineering*.
- Veillette, R.; Medanic, J; Perkins, W. R. (1992). Design of reliable control systems. *Automatic Control*, IEEE Transactions on 37(3): 290-304.
- Wang, Z; Jin, X; Wang, Z. (2011). Adaptive controller design for linear time invariant systems with sensor failures. *Control and Decision Conference (CCDC)*.
- Wu, L; Zheng, W, X; Gao, H. (2013). Dissipativity-based sliding mode control of switched stochastic systems. *IEEE Trans Automat. Contr.*, pp 785-791.
- Yang, G. H; Wang, J. L; Soh, Y. C. (2001). Reliable H_∞ controller design for linear systems. *Automatica* 37(5): 717 – 725.
- Yang, G. H; Wang, J. L; Soh, Y. C. (2000). Reliable LQG control with sensor failures. *Control Theory and Applications*, IEE Proceedings – 147(4): 433-439.
- Zhang, Y; Jiang, J. (2008). Bibliographical review on reconfigurable fault-tolerant control systems. *Annual Reviews in Control*. 32(2): 229-252.
- Zhou, K; Doyle, J; Glover, K. (1996). Robust and optimal control. Prentice Hall.