Controle Fuzzy PDC Baseado em Inequações Matriciais Lineares de um Sistema de Guindaste *Overhead*

Charles C. Aguiar * Daniel F. Leite *

* Departamento de Automática - Universidade Federal de Lavras, MG,
(e-mail: charlescaguiar@hotmail.com, daniel.leite@ufla.br).

Abstract: This paper presents a state-space fuzzy model and the design of a fuzzy controller for a class of overhead cranes. The fuzzy model is obtained from the sector nonlinearity method and from the use of the original nonlinear differential equations. A method for approximation in fuzzy partition spaces is applied to give a compact fuzzy model, which avoids further control-design difficulties in the sense of relaxing linear matrix inequalities. A fuzzy controller is obtained from parallel distributed compensation so that the closed-loop system is Lyapunov stable and has bounded control inputs given a feasible solution to the linear matrix inequalities. The fuzzy control has shown robustness and ability to move a loaded crane smoothly, even after load collisions.

Resumo: Este artigo apresenta um modelo fuzzy em espaço de estados e o projeto de controle fuzzy de uma classe de sistemas de guindaste. O modelo fuzzy é obtido a partir do método de não-linearidade setorial e das equações diferenciais não-lineares originais. Um método de aproximação em espaços fuzzy particionados é aplicado para obtenção de um modelo fuzzy compacto, e que evita complicações de projeto no sentido de relaxar desigualdades matriciais lineares. Um controlador fuzzy é obtido a partir de compensação paralela distribuída tal que o sistema em malha fechada é Lyapunov estável e tem entradas de controle limitadas dada uma solução factível para as inequações matriciais lineares. O controle fuzzy de um guindaste se mostrou robusto e capaz de mover cargas de forma suave, mesmo após colisões da carga.

Keywords: Fuzzy Control; State-Space Modeling; Linear Matrix Inequalities; Overhead Cranes

Palavras-chaves: Controle Fuzzy; Modelagem em Espaço de Estados; Inequações Lineares Matriciais; Guindastes Overhead

1. INTRODUÇÃO

Guindastes são comumente utilizados na indústria automobilística, aeroportuária e em projetos de engenharia civil. Estes equipamentos possuem um papel importante na elevação e transporte de cargas pesadas como contêineres, blocos de construção, vagões e locomotivas. Funcionam pelo princípio físico de máquinas elétricas simples e pêndulos. Os guindastes são estruturas colossais capazes de erguer e transportar cargas de milhares de toneladas; também devem ser capazes de garantir precisão no posicionamento, velocidade de transporte e robustez às possíveis perturbações, ver Park et al. (2014a) e Wu and Xia (2014).

Os guindastes do tipo *overhead* são caracterizados por uma plataforma móvel que se desloca sobre trilhos elevados. Na parte inferior desta plataforma, encontra-se um cabo de aço que é responsável pela sustentação da carga. Na extremidade inferior do cabo tem-se um gancho denominado *talha*, responsável por prender a carga à plataforma. Um dos desafios de operação é o transporte da carga de forma suave. Movimentos de arranque, parada e distúrbios ao longo do caminho não podem provocar oscilações excessivas na carga transportada. Naturalmente, a ação de controle é realizada sobre o movimento da plataforma, uma

vez que o ângulo de oscilação da carga não é diretamente controlado. Um sistema de controle efetivo é recomendado de modo a mover a plataforma até o ponto de referência enquanto o ângulo de balanço da carga é mantido próximo à vertical.

Os métodos de controle para guindastes *overhead* são comumente baseados em sistemas não lineares, ou linearizados, de pêndulos simples assumindo-se ângulos de balanço suficientemente baixos. Entretanto, diversos fatores podem causar um aumento excessivo no ângulo de balanço da carga, tornando tal suposição inválida, e.g., (i) guindastes trabalham sobre condições severas, como discutido em Sun et al. (2017), sujeitos à ventos fortes e outras fontes de distúrbios; (ii) colisões inesperadas da carga; (iii) incertezas sobre a real dinâmica do sistema, que são difíceis de traduzir em expressões matemáticas que compõem o modelo. Guindastes estão sujeitos à enferrujamento e desgaste de juntas mecânicas, variações nos modos de operação e falhas diversas.

Planejamento de trajetórias em malha aberta e abordagens model-free são apresentadas em Lee et al. (2014), Sorensen et al. (2007), Uchiyama et al. (2013) e Wu and Xia (2014). Nestes casos, critérios de estabilidade, robustez relativa e performance não podem ser formalmente analisados. Con-

trole ótimo e métodos de controle inteligente são investigados em Ngo and Hong (2012), Vázquez et al. (2013), Sun et al. (2015) e Park et al. (2014b), Yu et al. (2011), Zhao and Gao (2012), respectivamente. Em particular a estes estudos, destaca-se a aplicação de sistemas de controle fuzzy de guindastes *overhead*. Controle fuzzy caracteriza-se por uma abordagem intrinsecamente não linear, Škrjanc et al. (2019), devido às interseções das funções de pertinência e ativação parcial de múltiplas regras contendo leis de controle locais, particulares ao comportamento do sistema naquelas pontos de operação, ver Bayas et al. (2018) e Leite et al. (2015).

Quando as regras do modelo e do controlador fuzzy possuem as mesmas funções de pertinência antecedentes, tal sistema de controle é denominado compensação paralela distribuída (PDC), como mostrado em Tanaka and Wang (2004). Um sistema estável em malha fechada pode ser estabelecido aplicando-se diretamente o método de Lyapunov e utilizando inequações matriciais lineares (LMIs), como em Guerra and Vermeiren (2004), Mozelli et al. (2009a) e Tanaka and Wang (2004). Se uma solução factível para a LMI formulada puder ser determinada, a estabilidade em malha fechada é teoricamente garantida, ver Montagner et al. (2007). Neste trabalho, utilizamos não linearidade setorial e aproximação local de espaços fuzzy particionados para obter um modelo fuzzy compacto e um problema LMI menos conservativo, ver Mozelli et al. (2009b). Os possíveis efeitos de saturação do atuador são solucionados adicionado-se desigualdades ao problema original, de modo que as entradas de controle sejam limitadas.

1.1 Objetivos e Contribuições

Dado um ponto de referência na posição da plataforma, projetaremos um controlador fuzzy que movimentará a plataforma suavemente até seu destino, enquanto regula velocidades e ângulo de balanço da carga. Em outras palavras, dados estados iniciais na vizinhança da origem, os estados do sistema devem convergir para a origem, exceto pela posição da plataforma, que deve convergir para a referência.

O projeto do controlador fuzzy é baseado em um modelo fuzzy que corresponde de maneira exata às equações dinâmicas do sistema do guindaste *overhead*. O modelo fuzzy é obtido utilizando-se não linearidade setorial e aproximação local em espaços fuzzy particionados. Uma estrutura compacta de regras fuzzy é obtida e utilizada na formulação de um problema LMI menos conservativo. Diferentemente de outros estudos, a utilização de aproximações locais minimiza o número de regras do modelo e controlador, evitando relaxações futuras no problema LMI. Os ganhos do controlador são obtidos diretamente da solução à LMI proposta. Estabilidade Lyapunov e esforços de controle limitados são considerados. Colisões da carga durante o transporte e variações de parâmetros são analisadas afim de se verificar robustez do sistema em malha fechada.

2. MODELOS MATEMÁTICOS

2.1 Equações Não Lineares no Espaço de Estados

Um típico esquema de guindaste *overhead* é mostrado na Figura 1. Forças dissipativas são ignoradas devido às

Figura 1. Típico diagrama de um guindaste *overhead*.

suas pequenas magnitudes. A talha e a carga suspensa são referenciadas como uma única massa, uma vez que a massa da carga é muito maior que a da talha. Como largamente adotado na literatura, o cabo é considerado como uma junta rígida, o que faz sentido para um extenso intervalo de ângulos de balanço. A aplicação das equações de Euler-Lagrange, ver Fox (1987), é utilizada para derivar um modelo contínuo, invariante no tempo e não linear do sistema.

Seja a posição da plataforma móvel em relação à origem O dada por (x, y) . As equações não lineares da dinâmica do sistema são dadas por

$$\begin{aligned} a\ddot{x} + mL\ddot{\theta}\cos(\theta) - mL\dot{\theta}^2\sin(\theta) &= F, \\ mL\ddot{x}\cos(\theta) + mL^2\ddot{\theta} + mgL\sin(\theta) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

onde M é a massa da plataforma [kg]; m é a massa da carga [kg]; L é o comprimento do cabo [m]. A força F [N] é a entrada de controle produzida por um motor elétrico. Apenas movimento unidirecional da plataforma é considerado. A título de simplificação de notação, considere $a \equiv M + m$.

Em qualquer instante, o sistema é completamente descrito por quatro estados, sendo eles a posição e velocidade da plataforma (x e $\dot{x}$) e o ângulo de balanço e velocidade angular da carga, (θ e $\dot{\theta}$), isto é

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T, \quad (2)$$

onde $x_1 = x$; $x_2 = \dot{x}$; $x_3 = \theta$; $x_4 = \dot{\theta}$.

Após manipulações algébricas, (1) pode ser reescrita na forma não linear $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, F, t)$ como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{mLx_4^2\sin(x_3) + 0.5mg\sin(2x_3) + F}{a - m\cos^2(x_3)} \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{ag\sin(x_3) + 0.5mLx_4^2\sin(2x_3) + F\cos(x_3)}{L[m\cos^2(x_3) - a]} \end{aligned} \quad (3)$$

2.2 Modelo Fuzzy Não Linear

Um modelo fuzzy funcional pode ser construído a partir do sistema original (3) baseando-se no método da não linearidade setorial (SNL), ver Tanaka and Wang (2004). Seja $x_3 \in [-88^\circ, 88^\circ]$ o conjunto de valores que o ângulo de balanço da carga pode assumir fisicamente. Considere o esquema mostrado na Figura 2.

Figura 2. Partição do domínio θ em setores.

O método SNL particiona o espaço de trabalho do estado x_3 em c setores. O comportamento do sistema em cada setor é representado por um sistema linear. O i -ésimo modelo local, $i = 1, \dots, c$ é caracterizado pelo par $(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i)$, que representa a matriz do sistema local e a respectiva matriz de controle. Setores e sistemas locais são relacionados por regras fuzzy do tipo

Regra i :

SE z_1^i é $\mathcal{M}_1^i$ E ... E z_Ψ^i é $\mathcal{M}_\Psi^i$

ENTÃO $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{B}_i F$

onde $\mathbf{z}_i = [z_1^i, \dots, z_\Psi^i]$ representa as Ψ variáveis premissa do sistema e é função dos estados que caracterizam o i -ésimo setor. $\mathcal{M}_j^i$, $i = 1, \dots, c$, são funções de pertinência que granulam (no sentido de cobertura e unimodalidade Leite et al. (2014)) o universo de discurso de $\mathbf{z}_j$. O modelo fuzzy global é obtido pela combinação suave das c regras. Quanto maior for o número de setores, menor será o erro de aproximação do modelo fuzzy. No entanto, um grande número de setores resulta em um maior número de regras, o que aumenta a complexidade do projeto do controlador PDC via LMIs.

Reescreva (3) em função dos termos não lineares como

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{a - m \cos^2(x_3)} [mLx_4(x_4 \sin(x_3)) + \dots \\ &\quad \dots + 0.5mg \sin(2x_3) + F] \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{L[m \cos^2(x_3) - a]} [ag \sin(x_3) + \dots \\ &\quad \dots + 0.5mLx_4(x_4 \sin(2x_3)) + F \cos(x_3)], \quad (4)\end{aligned}$$

Então, se definirmos

$$\begin{aligned}z_1(x) &\equiv \frac{1}{a - m \cos^2(x_3)} \\ z_2(x) &\equiv x_4 \sin(x_3) \\ z_3(x) &\equiv \sin(2x_3) \\ z_4(x) &\equiv \frac{1}{L[m \cos^2(x_3) - a]} \\ z_5(x) &\equiv \sin(x_3) \\ z_6(x) &\equiv x_4 \sin(2x_3) \\ z_7(x) &\equiv \cos(x_3),\end{aligned} \quad (5)$$

(4) pode ser expressa como

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= z_1 [mLx_4 z_2 + 0.5mg z_3 + F] \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= z_4 [ag z_5 + 0.5mLx_4 z_6 + F z_7].\end{aligned} \quad (6)$$

De acordo com (5), o modelo fuzzy possui 7 antecedentes. Se um par de funções de pertinência é usado para cada antecedente, tem-se 2^7 ou 128 regras fuzzy. Como notado anteriormente, o número de regras possui um significativo impacto na complexidade do projeto do controlador PDC. Algoritmos de busca de soluções de LMIs possuem complexidade exponencial, como notado em Feng (2010), Löfberg (2004) e Sturm (1999).

2.3 Aproximação Local

Aproximação em espaços fuzzy particionados é uma abordagem utilizada para reduzir o número de regras fuzzy, apresentado em Feng (2010) e Tanaka and Wang (2004). Este método consiste na aproximação dos termos não lineares (5) por termos lineares adequadamente escolhidos. A quantidade de parâmetros e a complexidade do problema de projeto PDC são reduzidas.

Com o objetivo de se obter um sistema fuzzy compacto e com o menor número de regras possível, apenas três setores para o ângulo de balanço da carga são considerados. Adicionalmente, uma única regra é válida para os dois setores que representam as extremidades (positiva e negativa) do ângulo de balanço, devido à simetria do espaço de trabalho. Assim, apenas duas regras fuzzy são formuladas.

Para valores pequenos de x_3 , (3) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{mg}{M}x_3 + \frac{1}{M}F \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -\frac{ag}{ML}x_3 - \frac{1}{ML}F.\end{aligned}\quad (7)$$

Por outro lado, quando x_3 está próximo aos extremos, i.e., $\pm 88^\circ$, os valores de $\cos(x_3)$ e $\sin(x_3)$ tendem para $\cos(88^\circ)$ e $(2/\pi)x_3$, respectivamente. Adotando $\beta \equiv \cos(88^\circ)$, nota-se que $\sin(2x_3)$ tende a $(4/\pi)\beta x_3$ ¹. Considerando estas aproximações, os estados se tornam

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{2mg}{a - m\beta^2}x_3 + \frac{1}{a - m\beta^2}F \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{2ag}{\pi L(m\beta^2 - a)}x_3 + \frac{\beta}{L(m\beta^2 - a)}F\end{aligned}\quad (8)$$

Nota-se que (7) e (8) são sistemas lineares. Portanto, x_3 é o único termo antecedente da i -ésima regra, $i = 1, 2$. O domínio de x_3 é granulado por funções de pertinência normais e complementares, $\mathcal{M}_i$, $i = 1, 2$; As funções de pertinência são associadas aos setores. Seus valores linguísticos são, respectivamente “próximo a 0°” e “próximo a $\pm 88^\circ$ ”.

As funções de pertinência obedecem às restrições

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1(x_3) + \mathcal{M}_2(x_3) &= 1 \\ \mathcal{M}_1(x_3)p + \mathcal{M}_2(x_3)q &= x_3\end{aligned}$$

onde

$$p = \min_{-88^\circ \leq x_3 \leq 88^\circ} (x_3), \quad q = \max_{-88^\circ \leq x_3 \leq 88^\circ} (x_3),$$

o que implica diretamente em simetria; p e q são os valores mínimos e máximos de z_i (x_3 , neste caso).

Para um dado valor de x_3 , os graus de pertinência são calculados como

$$\mathcal{M}_1(x_3) = \begin{cases} \frac{1}{88}x_3 + 1 & \text{se } x_3 < 0 \\ -\frac{1}{88}x_3 & \text{se } x_3 > 0 \end{cases} \quad (9)$$

e

$$\mathcal{M}_2(x_3) = \begin{cases} -\frac{1}{88}x_3 & \text{se } x_3 < 0 \\ \frac{1}{88}x_3 & \text{se } x_3 > 0 \end{cases} \quad (10)$$

As regras fuzzy para os setores considerados são da forma

Regra 1:

SE x_3 é $\mathcal{M}_1$ ($x_3 \approx 0$),

ENTÃO $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_1\mathbf{x} + \mathbf{B}_1F$

¹ Devido á fórmula do arco duplo para o seno, i.e., $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$.

Regra 2:

SE x_3 é $\mathcal{M}_2$ ($x_3 \approx \pm 88^\circ$),

ENTÃO $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_2\mathbf{x} + \mathbf{B}_2F$

onde $\mathbf{A}_i$ e $\mathbf{B}_i$ são as matrizes do sistema e de controle; F é a ação de controle. De (7) e (8) nota-se que

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{ag}{ML} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{M} & 0 & -\frac{1}{ML} \end{bmatrix}^T$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2mg}{a - m\beta^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{2ag}{\pi L(m\beta^2 - a)} & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a - m\beta^2} & 0 & \frac{\beta}{L(m\beta^2 - a)} \end{bmatrix}^T.\end{aligned}$$

A estimação de estados do modelo fuzzy global é determinada por

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^2 h_i (\mathbf{A}_i\mathbf{x} + \mathbf{B}_iF) \quad (11)$$

onde

$$h_i = \frac{\mathcal{M}_i(x_3)}{\sum_{i=1}^c T(\mathcal{M}_i(x_3))} \quad (12)$$

é o grau de ativação da i -ésima regra; T é um operador T -norma, e.g., produto algébrico, $T(\mathcal{M}_i(x_3)) = \mathcal{M}_1(x_3)\mathcal{M}_2(x_3)$.

3. CONTROLE FUZZY PDC BASEADO EM LMI

Controle fuzzy por compensação paralela distribuída (PDC) conecta os termos antecedentes de cada regra do modelo fuzzy diretamente a uma regra de controle consequente. Modelo e controlador possuem as mesmas funções de pertinência, (9) e (10), e número de regras, o que resulta em um projeto mais simples. Condições de estabilidade e performance podem ser formuladas como um conjunto de inequações matriciais lineares (LMIs). Encontrar uma solução para o conjunto de LMIs formulado é equivalente a encontrar uma solução para o problema original, ver Guerra and Vermeiren (2004), Leite et al. (2015) e Tanaka and Wang (2004). Analogamente, condições de estabilidade Lyapunov também são formuladas como uma LMI, como em Mozelli et al. (2009a). Os ganhos do controlador são determinados a partir da solução das LMIs.

Considerando um algoritmo de controle iterativo, adota-se um passo de tempo suficientemente menor que a constante de tempo do sistema, $\Delta k = 0.005$.

As regras do controlador são da forma

Regra i :

SE $z_1(x)$ é $\mathcal{M}_1^i$ E ... E $z_\Psi(x)$ é $\mathcal{M}_\Psi^i$

ENTÃO $\mathbf{u}^i(k+1) = \mathbf{K}^i \mathbf{x}(k+1)$

onde z_j , $j = 1, \dots, \Psi$, são as mesmas variáveis premissa do modelo fuzzy; $\mathbf{x}(k)$ é o vetor de estados; e $\mathbf{u}^i(k+1)$ é a ação de controle local. Além disso, $\mathbf{K}^i \in R^{1 \times n}$, onde n é a ordem do sistema, é a matriz de ganhos do i -ésimo controlador local, determinada de modo que o sistema em malha fechada seja assintoticamente estável. Particularmente, de acordo com o modelo fuzzy desenvolvido na seção 2.3, $\Psi = 1$, $z_1 = x_3$ e $c = 2$.

A lei de controle global é

$$\mathbf{u}(k+1) = \sum_{i=1}^c h^i \mathbf{u}^i(k+1), \quad (13)$$

onde c é o número de regras e h^i é o grau de ativação reescalado da i -ésima regra fuzzy, como em (12). A medida que o passo de tempo Δk aumenta, as equações (11) e (13) podem ser combinadas. O sistema em malha fechada resultante é

$$\mathbf{x}(k+1) = \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^c h^i h^j \mathbf{G}^{ij} \mathbf{x}(k), \quad (14)$$

onde $\mathbf{G}^{ij} \equiv \mathbf{A}^i + \mathbf{B}^i \mathbf{K}^j$, ou, equivalentemente

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) = & \sum_{i=1}^c (h^i)^2 \mathbf{G}^{ii} \mathbf{x}(k) + \\ & + 2 \sum_{i < j}^c h^i h^j \left(\frac{\mathbf{G}^{ij} + \mathbf{G}^{ji}}{2} \right) \mathbf{x}(k). \end{aligned} \quad (15)$$

Se o sistema não forçado é estável, então $\mathbf{K}^j$ pode ser escolhida de modo a aprimorar a resposta transiente. Sistemas instáveis requerem que $\mathbf{K}^j$ seja projetada de modo a, primeiro, estabilizar o sistema.

A estabilidade de Lyapunov, ver Khalil and Grizzle (2002), pode ser traduzida em encontrar uma solução factível para uma LMI. O seguinte resultado foi reportado em Feng (2010) e Tanaka et al. (1998).

Defina uma função candidata Lyapunov como

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}, \quad (16)$$

onde $\mathbf{P}$ é uma matriz definida positiva. Baseado em (16) e no sistema em malha fechada (14), tem-se

Teorema 1. O sistema em malha fechada (14) é globalmente exponencialmente estável se existe uma matriz definida positiva $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$ e um conjunto de matrizes $\mathbf{Q}^i$, $i = 1, \dots, c$, tal que

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{X} & \mathbf{X}(\mathbf{A}^i)^T + (\mathbf{Q}^j)^T (\mathbf{B}^i)^T \\ \mathbf{A}^i \mathbf{X} + \mathbf{B}^i \mathbf{Q}^j & -\mathbf{X} \end{bmatrix} < 0 \quad (17)$$

para todas as combinações de $i, j = 1, \dots, c$. Veja Tanaka et al. (1998) para uma prova formal.

Este é um problema de factibilidade com região de busca convexa, Tanaka et al. (1998). Se uma solução $(\mathbf{X}, \mathbf{Q}^i)$ é encontrada, os ganhos do controlador são dados por

$$\mathbf{K}^i = \mathbf{Q}^i \mathbf{P}, \quad i = 1, \dots, c. \quad (18)$$

Se a inequação (17) é satisfeita, tem-se que: (i) existe uma matriz $\mathbf{P}$ comum a todas as c regras; (ii) (16) é função de Lyapunov; e (iii) o sistema em malha fechada (14) é estável quando adota-se os ganhos $\mathbf{K}^i$ obtidos em (18).

O teorema 2 é útil para definição de entradas de controle limitadas.

Teorema 2. Dadas matrizes definidas positivas $\mathbf{X}^i = (\mathbf{P}^i)^{-1}$ e matrizes $\mathbf{Q}^s = \mathbf{K}^s \mathbf{Z}^s$, $i, s = 1, \dots, \eta$. A restrição sobre a entrada de controle $\|\mathbf{u}(k+1)\|_2 \leq \zeta$ é assegurada se as LMIs

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}(0)^T \\ \mathbf{x}(0) & \mathbf{X}^i \end{bmatrix} > 0 \quad (19)$$

e

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}^i & (\mathbf{Q}^s)^T \\ \mathbf{Q}^s & \zeta^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (20)$$

$i, s = 1, \dots, \eta$ são satisfeitas. Em (19), $\mathbf{x}(0)$ é o vetor de estados iniciais.

A prova do teorema 2 pode ser encontrada em Tanaka et al. (1998). O valor de ζ limita o máximo valor que a norma-2 do sinal de controle pode assumir. As LMIs (19) e (20) são adicionadas à (17) para sistemas de controle fuzzy estáveis e com restrições sobre a amplitude das entradas de controle.

4. RESULTADOS EM MALHA FECHADA

Nesta seção é realizada a análise do sistema em malha fechada construído a partir do modelo fuzzy desenvolvido na seção 3. Os parâmetros do sistema real são dados por $M = 400$ [kg] e $m = 3000$ [kg], como as massas da plataforma e da carga; $L = 2$ [m] como o comprimento do cabo de aço. O valor da gravidade é considerado $g = 9.81$ [m/s²] e as condições iniciais $\mathbf{x}(0) = [0 \ 0 \ 0.1 \ 0]$. Adicionalmente, ruído branco no intervalo $[-\varphi, \varphi]$ é considerado presentes nos estados. Velocidades são obtidas diferenciando iterativamente a posição da plataforma, x e o ângulo de balanço da carga, θ .

4.1 Controle Fuzzy

Um controlador fuzzy por realimentação completa de estados foi obtido a partir da formulação LMI da seção 3. O controlador é usado na malha direta para produzir uma entrada de controle F para o sistema do guindaste *overhead* original (3). Considera-se uma posição referência para a plataforma de $x_{1,\text{ref}} = 5$ [m] durante as 5000 primeiras iterações e $x_{1,\text{ref}} = 0$ [m] após. Os demais estados, devem ser regulados, i.e., $x_2, x_3, x_4 \rightarrow 0$. Soluções factíveis para (17), (19) e (20) foram encontradas, implicando que estabilidade Lyapunov e entradas de controle limitadas à $\zeta = 300$ [N] são asseguradas no sistema em malha fechada. O *solver* SeDuMi 1.05, Sturm (1999), e o *toolbox* Yalmip,

Löfberg (2004), foram utilizados junto à ferramenta de desenvolvimento Matlab. Utilizamos uma CPU i7-8550 dual-core 1.88-1.99 GHz com 8 GB de RAM, de modo que a solução para o problema LMI foi encontrada em cerca de um segundo.

A matriz simétrica e definida positiva $\mathbf{X}$, comum a todas as regras, foi determinada como sendo

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 20.08 & -4.31 & 4.73 & -4.70 \\ -4.31 & 33.42 & 4.84 & 13.47 \\ 4.73 & 4.84 & 3.88 & -0.06 \\ -4.70 & 13.47 & -0.06 & 11.33 \end{bmatrix}.$$

E, para cada regra fuzzy, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^1 &= [262.05 \quad 164.98 \quad 169.63 \quad -70.98] \\ \mathbf{Q}^2 &= [512.77 \quad 317.95 \quad 322.66 \quad -104.97]. \end{aligned}$$

De modo que os ganhos do controlador sejam calculados como

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^1 &= [3.99 \quad 4.81 \quad 32.69 \quad -10.15] \\ \mathbf{K}^2 &= [8.86 \quad 6.83 \quad 63.60 \quad -13.37]. \end{aligned} \quad (21)$$

A entrada de controle é calculada a cada iteração, segundo (13). Note que os ganhos das matrizes de controle são interpolados entre si, dependendo do nível de ativação de cada uma das regras fuzzy.

A Figura 3 mostra os resultados para os estados, x_1 e x_3 . Para a posição da plataforma, e considerando a média do sinal de referência $x_{1,\text{ref}}$, o sistema em malha fechada fuzzy exibe um overshoot de 23.1 [%], seguido de convergência exponencial. A mesma análise se aplica ao ângulo de balanço da carga, onde o maior valor alcançado foi de 0.51 [rad]. O maior valor de força de controle necessário foi 295.9 [N]. As LMIs incluídas na formulação do problema limitam as entradas de controle à 300 [N], o que aumenta a vida útil e confiabilidade dos atuadores envolvidos na planta.

Durante as iterações, as regras do controlador fuzzy são parcialmente ativadas. Uma vez que x_3 desvia drasticamente de 0° , a regra relacionada a ângulos “próximos de 88° ” se torna mais ativa, de modo a suprimir tal diferença de maneira mais agressiva. No entanto, a regra relacionada a ângulos mais “próximos de 0° ” é mais ativa durante todas as iterações, de um modo geral. Reações mais fortes em frente à desvios maiores de x_3 também podem ser notadas por valores absolutos maiores relativos à x_3 e x_4 na matriz de controle $\mathbf{K}^2$, quando comparados aos mesmos valores em $\mathbf{K}^1$.

Em seguida, aumentamos a amplitude do ruído branco injetado nos estados. Filtros passa-baixa são imprescindíveis para melhor aproximação dos valores reais. Porém, procuramos valores de ruído limites, de modo que o sistema seja sempre estável ou instável. Em 10 execuções do algoritmo de controle analisou-se valores limites para a amplitude de φ . Foi notado que, para a maioria dos experimentos, a instabilidade é disparada no ângulo de balanço da carga, que claramente é o estado mais crítico. O sistema em malha fechada fuzzy é sempre estável para ruído de 1.03 [%];

Figura 3. Controle fuzzy PDC dos estados x_1 e x_3 , e o sinal de controle correspondente.

estável na metade dos experimentos para ruídos de 3.99 [%]; e sempre instável para ruídos de 5.00 [%]. Em outras palavras, o sistema é bastante robusto frente à injeções de ruído.

4.2 Análise de Colisão

Uma colisão entre a carga e obstáculo durante o transiente da plataforma, especificamente em $k = 200$, foi considerada a partir da mudança forçada dos estados para

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) - 0.9 \\ x_2(k+1) &= 0.1 \\ x_3(k+1) &= 0.15 \\ x_4(k+1) &= 0 \end{aligned}$$

Adicionalmente, uma colisão dupla é forçada durante o retorno da plataforma, dadas por

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) + 0.5 \\ x_2(k+1) &= -0.2 \\ x_3(k+1) &= -0.05 \\ x_4(k+1) &= -0.01 \end{aligned}$$

em $k = 5300$, e

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= 1.5 \\ x_2(k+1) &= 0.8 \\ x_3(k+1) &= 0.45 \\ x_4(k+1) &= 0.75 \end{aligned}$$

em $k = 6300$. Em particular, as mudanças inesperadas nos estados podem ser causadas não apenas por colisões, mas também por condições extremas, como ventanias ou movimentos bruscos do navio que está sendo carregado. Figura 4 mostra o comportamento do sistema em malha fechada frente às colisões.

Figura 4. Evolução dos estados após colisões durante o transiente do sistema em malha fechada fuzzy PDC.

A respeito das colisões, na Figura 4 as restrições sobre a amplitude do sinal de controle ainda é respeitada. A maior amplitude observada é de cerca de 200 [N] para a força aplicada à plataforma. O controlador fuzzy respondeu imediatamente e suavemente aos eventos inesperados e, portanto para transientes bastante irregulares. Foi também capaz de manter não apenas a estabilidade do sistema, mas também níveis aceitáveis de overshoot e tempo de estabilização.

4.3 Robustez à Incertezas nos Parâmetros

A robustez do sistema fuzzy em malha fechada é analisada considerando-se valores para a massa da carga e comprimento do cabo do guindaste *overhead* em torno dos valores para os quais o controlador foi originalmente projetado, i.e., $m = 3000$ [kg] e $L = 2$ [m]. A robustez do sistema fuzzy é comparada à de um sistema de controle linear-quadrático (LQ), ver Ogata et al. (1995), projetado a partir da linearização em torno de um ponto de equilíbrio ($x_3 = 0$ [rad]) e sob as mesmas condições do projeto fuzzy. Naturalmente, se os valores de m e L são conhecidos e diferentes daqueles usados no projeto do controlador, novas matrizes de ganhos podem ser obtidas rapidamente (cerca de um segundo). Portanto, a robustez analisada é referente à incertezas presentes nos valores verdadeiros dos parâmetros. Figura 5 mostra um comparativo das regiões

Figura 5. Limites de estabilidade dos sistemas fuzzy PDC e controle ótimo LQ. 'o': instável, '*': estável.

de instabilidades de ambos os projetos, fuzzy e LQ, dadas variações nos valores dos parâmetros.

Curiosamente, as regiões de instabilidade para os controladores são opostas. O controlador fuzzy ainda é capaz de garantir a estabilidade para um intervalo considerável de valores em torno das condições de projeto, especialmente para maiores valores de comprimento do cabo e menores valores de massa da carga. Por outro lado, o sistema LQ suporta menores comprimentos de cabo e maiores valores de massa da carga. Invariavelmente, as incertezas nos parâmetros afetam de forma mais pronunciada a performance de transiente do sistema LQ, quando comparado ao sistema fuzzy.

5. CONCLUSÃO

Discutimos a modelagem fuzzy no espaço de estados de guindastes do tipo *overhead* e o projeto fuzzy baseado em compensação paralela distribuída. Utilizamos o método da não linearidade setorial e aproximação local em espaços fuzzy particionados para obter um modelo fuzzy compacto e evitar procedimentos usuais de relaxação de LMIs. Uma LMI menos conservativa foi obtida a partir de uma função quadrática de Lyapunov e restrições sobre amplitude do

sinal de controle. O modelo fuzzy aproximou o sistema original em toda região de operação. A performance do sistema em malha fechada foi avaliada para vários sinais de referência, diferentes níveis de ruído nas medidas físicas, colisões da carga e incertezas nos parâmetros. O controle fuzzy foi capaz de mover a plataforma à posição desejada, com níveis de overshoot razoáveis, enquanto suprimia oscilações excessivas na carga. Trabalhos futuros incluem utilização de clusterização fuzzy na determinação de funções de pertinência antecedentes. Modelagem e controle fuzzy de sistemas com amortecimento proporcionais à velocidade (atritos e resistência do ar) também serão considerados.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho recebeu apoio do Instituto Serrapilheira, número do processo Serra – 1812-26777. O segundo autor agradece à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), processo APQ-03384-18.

REFERÊNCIAS

- Bayas, A., Škrjanc, I., and Sáez, D. (2018). Design of fuzzy robust control strategies for a distributed solar collector field. *Applied Soft Computing*, 71, 1009–1019.
- Feng, G. (2010). *Analysis and synthesis of fuzzy control systems: A model-based approach*. CRC press.
- Fox, C. (1987). *An introduction to the calculus of variations*. Courier Corporation.
- Guerra, T.M. and Vermeiren, L. (2004). Lmi-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the takagi–sugeno’s form. *Automatica*, 40(5), 823–829.
- Khalil, H.K. and Grizzle, J.W. (2002). *Nonlinear systems*, volume 3. Prentice hall Upper Saddle River, NJ.
- Lee, L.H., Huang, P.H., Shih, Y.C., Chiang, T.C., and Chang, C.Y. (2014). Parallel neural network combined with sliding mode control in overhead crane control system. *Journal of Vibration and Control*, 20(5), 749–760.
- Leite, D., Caminhas, W., Lemos, A., Palhares, R., and Gomide, F. (2014). Parameter estimation of dynamic fuzzy models from uncertain data streams. In *2014 IEEE Conference on Norbert Wiener in the 21st Century (21CW)*, 1–7. IEEE.
- Leite, D., Palhares, R.M., Campos, V.C., and Gomide, F. (2015). Evolving granular fuzzy model-based control of nonlinear dynamic systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 23(4), 923–938.
- Löfberg, J. (2004). Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in matlab. In *Proceedings of the CACSD Conference*, volume 3. Taipei, Taiwan.
- Montagner, V.F., Oliveira, R.C., and Peres, P.L. (2007). Necessary and sufficient lmi conditions to compute quadratically stabilizing state feedback controllers for takagi–sugeno systems. In *2007 American Control Conference*, 4059–4064. IEEE.
- Mozelli, L.A., Palhares, R.M., and Avellar, G.S. (2009a). A systematic approach to improve multiple lyapunov function stability and stabilization conditions for fuzzy systems. *Information Sciences*, 179(8), 1149–1162.
- Mozelli, L.A., Palhares, R.M., Souza, F., and Mendes, E.M. (2009b). Reducing conservativeness in recent stability conditions of ts fuzzy systems. *Automatica*, 45(6), 1580–1583.
- Ngo, Q. and Hong, K.S. (2012). Adaptive sliding mode control of container cranes. *IET control theory & applications*, 6(5), 662–668.
- Ogata, K. et al. (1995). *Discrete-time control systems*, volume 2. Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ.
- Park, M.S., Chwa, D., and Eom, M. (2014a). Adaptive sliding-mode antisway control of uncertain overhead cranes with high-speed hoisting motion. *IEEE Trans Fuzzy Syst*, 22(5), 1262–1271.
- Park, M.S., Chwa, D., and Eom, M. (2014b). Adaptive sliding-mode antisway control of uncertain overhead cranes with high-speed hoisting motion. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 22(5), 1262–1271.
- Sorensen, K.L., Singhose, W., and Dickerson, S. (2007). A controller enabling precise positioning and sway reduction in bridge and gantry cranes. *Control Engineering Practice*, 15(7), 825–837.
- Sturm, J.F. (1999). Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization methods and software*, 11(1-4), 625–653.
- Sun, N., Fang, Y., and Chen, H. (2015). A new antiswing control method for underactuated cranes with unmodeled uncertainties: Theoretical design and hardware experiments. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 62(1), 453–465.
- Sun, N., Fang, Y., Chen, H., and Lu, B. (2017). Amplitude-saturated nonlinear output feedback antiswing control for underactuated cranes with double-pendulum cargo dynamics. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 64(3), 2135–2146.
- Tanaka, K., Ikeda, T., and Wang, H.O. (1998). Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and lmi-based designs. *IEEE Transactions on fuzzy systems*, 6(2), 250–265.
- Tanaka, K. and Wang, H.O. (2004). *Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach*. John Wiley & Sons.
- Uchiyama, N., Ouyang, H., and Sano, S. (2013). Simple rotary crane dynamics modeling and open-loop control for residual load sway suppression by only horizontal boom motion. *Mechatronics*, 23(8), 1223–1236.
- Vázquez, C., Collado, J., and Fridman, L. (2013). Control of a parametrically excited crane: A vector lyapunov approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 21(6), 2332–2340.
- Škrjanc, I., Iglesias, J.A., Sanchis, A., Leite, D., Lughofer, E., and Gomide, F. (2019). Evolving fuzzy and neuro-fuzzy approaches in clustering, regression, identification, and classification: A survey. *Information Sciences*, 490, 344–368.
- Wu, Z. and Xia, X. (2014). Optimal motion planning for overhead cranes. *IET Control Theory Appl*, 8(17), 1833–1842.
- Yu, W., Moreno-Armendariz, M.A., and Rodriguez, F.O. (2011). Stable adaptive compensation with fuzzy cmac for an overhead crane. *Information Sciences*, 181(21), 4895–4907.
- Zhao, Y. and Gao, H. (2012). Fuzzy-model-based control of an overhead crane with input delay and actuator saturation. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 20(1), 181–186.