CONTROLE DE LINHAS DE MONTAGEM VIA MODELOS MAX-PLUS LINEARES REALIMENTADOS

Luíza S. Guimarães * Carlos A. Maia *

* Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade
Federal de Minas Gerais, MG, (e-mails: luizasernizong@gmail.com,
maia@cpdee.ufmg.br).

Abstract: Discrete Events Systems are systems that are subject to synchronization and delay phenomena, and can be modeled by a subclass of Discrete Events Systems called Timed Event Graphs and described by Max-Plus Algebra. The goal of the article is to model, control and analyze an assembly line system. The modeling system has operation's restrictions and the function of the controller is to force the system to respect these constraints. The *just-in-time* control can be done by determining the largest possible delay of the entry dates, respecting the system demand. The Scicolab software is used for extraction of information, for analysis and simulation of the system, besides obtaining the feedback controller. Sufficient conditions for obtaining the controller are presented in the article.

Resumo: Sistemas a Eventos Discretos são sistemas sujeitos a fenômenos de sincronização e atraso, podendo assim serem modelados por uma subclasse de Sistemas a Eventos Discretos denominada Grafos de Eventos Temporizados e descritos pela Álgebra Max-Plus. O objetivo do artigo é modelar, controlar e analisar um sistema de montagem. O sistema modelado possui restrições para seu funcionamento e a função do controlador é forçar o sistema a respeitar essas restrições. O controle *just-in-time* pode ser feito por meio da determinação do maior atraso possível das datas de entradas, respeitando a demanda do sistema. O *software* Scicolab é utilizado para extração de informações, para análise e para simulação do sistema, além da obtenção do controlador por realimentação. Condições suficientes para obtenção do controlador são apresentadas no artigo.

Keywords: Discrete event systems; Max-plus algebra; Timed event graphs; Feedback control; Modeling system; Just-in-time control.

Palavras-chaves: Sistemas a Eventos Discretos; Álgebra Max-Plus; Grafo de Eventos Temporizados; Controle por realimentação; Sistema modelado; Controle *just-in-time*.

1. INTRODUÇÃO

Os Sistemas a Eventos Discretos (SED) são sistemas dirigidos por eventos, ou seja, possuem como característica possíveis mudanças de estados geradas após a ocorrência de eventos (Cassandras and Lafortune, 2009). Os sistemas de manufatura são exemplos de SED.

Segundo Heragu (2008), a movimentação e o armazenamento de componentes para a produção representam mais de 50% do custo de um produto. Para a obtenção do máximo lucro associado ao menor custo, a otimização e a automação dos sistemas de manufaturas apresentam grande importância. O conhecimento da quantidade de produtos fabricados em um determinado espaço de tempo, do tempo de produção e da taxa máxima de produção são informações cruciais do sistema para a sua maior eficiência.

* Este trabalho tem como parceiro e apoiador financeiro a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES-BRASIL), a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) e o Programa de Pós Graduação de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais(UFMG).

O controle e o planejamento da produção dos sistemas são almejados e uma forma de se estudar e extrair informações de um sistema a ser controlado é por meio da simulação.

Para simular um sistema é necessário modelá-lo. Uma forma de modelar os sistemas é por meio de Grafos de Eventos Temporizados (GET), que são um tipo particular de Redes de Petri apropriados para descrever SED os quais estão sujeitos a fenômenos de sincronização e atraso. O comportamento de cada transição possibilita a construção do GET, logo, fornecem a atuação geral do sistema, tornando possível descrever o comportamento futuro do sistema. A Álgebra Max-Plus é um ferramental matemático no qual sistemas podem ser descritos por equações lineares. Por meio do *software* Scicolab e o ferramental matemático foi possível obter o controlador de sistema (Baccelli et al., 1992).

Sistemas de controle em malha fechada contém elementos de correção que proporcionam a combinação dos valores reais com os valores desejados. Se a saída observada não estiver conforme desejada, a entrada de controle é alterada

por meio da realimentação. Essa mudança é feita de acordo com a variação na informação fornecida pelo sistema, conforme a evolução do tempo (Ogata and Severo, 1998). O *just-in-time* é uma política de controle, na qual as especificações de demanda de produção são atendidas sem a formação de estoques não necessários no interior da planta fabril, ou seja, é almejado a entrega do produto no exato momento demandado. O objetivo desse controle é a maximização da admissão de peças assegurando que a saída do sistema respeite uma dada referência (Da Silva and Maia, 2016).

Existem alguns trabalhos relacionados ao controle de sistemas que podem ser modelados por GET e utilizam o ferramental da Álgebra Max-Plus. Boimond and Ferrier (1996) tratam de um controlador que utiliza saídas pré-definidas, dividindo o controle em um bloco de Previsão e um de Inversão, alterando a entrada para cada demanda. Maia et al. (2003) propõe um modelo de referência de controle baseado na pré-compensação e no feedback. Cottencau et al. (1999) aborda o controle por realimentação, utilizando a política *Kanban*, sendo calculado o maior controle de realimentação, com a finalidade de atrasar a entrada do sistema. da Silva Dias (2014) propõe diferentes técnicas para controle do sistema utilizando a política *just-in-time*, sendo assim o controle feito no fornecimento de matéria-prima. Maia et al. (2011) propõe uma estratégia de controle de sistemas sujeitos a restrições.

Neste trabalho o problema de controle para o sistema linear Max-Plus inicialmente desenvolvido por Maia et al. (2011) foi considerado. É apresentado a modelagem feita por meio de GET e da Álgebra Max-Plus, a sua análise para obtenção de informações do sistema e os projetos de controladores para sistemas de manufatura. Foram feitas simulações para observar o comportamento do sistema em malha aberta e em malha fechada, além de resultados relativos à existência e aos cálculos para projetar controladores. A contribuição deste trabalho foi ilustrada por meio de um problema numérico de uma linha de montagem serial em que o controle, adotando ou não a política *just-in-time*, foi projetado para garantir que o sistema respeite algumas restrições de sincronização.

Este artigo está organizado em 5 seções, sendo a primeira de introdução. A seção 2 descreve os conceitos necessários ao entendimento da temática. A seção 3 traz as observações a respeito do controlador. A seção 4 apresenta um exemplo numérico com descrição, modelagem e controle do sistema e a seção 5 apresenta as observações finais.

2. CONCEITOS PRELIMINARES

As Redes de Petri são redes bipartidas que modelam a dinâmica do SED, essas são compostas por lugares, arcos, transições e fichas. Os lugares são representados por círculos que são interligados a barras, denominadas transições, por meio de arcos. As fichas representam as condições de disparos e são encontradas nos lugares (Cassandras and Lafortune, 2009).

Os GET são um tipo de Rede de Petri, nos quais os lugares possuem apenas uma transição de saída e uma transição de entrada. Os GET são necessariamente temporizados

(Baccelli et al., 1992). Uma forma de modelar GET é por meio da Álgebra Max-Plus.

A Álgebra Max-Plus é um tipo de estrutura algébrica denominada dióide. Para os elementos pertencentes a Álgebra Máx-Plus, as operações $\oplus$ e $\otimes$ são definidas como $a \oplus b = \max(a, b)$ e $a \otimes b = a + b$ (Baccelli et al., 1992).

Neste artigo o $\mathbb{Z}_{max}$ é usado para representar o dióide $\mathbb{Z} \cup \{\varepsilon\}$, sendo $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros. A operação $\oplus$ é comutativa, associativa e idempotente, ou seja, $a \oplus a = a$. A operação $\otimes$ é associativa e distributiva a esquerda e a direita em consideração a soma. Como na álgebra convencional, a multiplicação na Álgebra Max-Plus também pode ser omitida. As operações $\oplus$ e $\otimes$ possuem elementos neutros, representados respectivamente por $\varepsilon = -\infty$ e $e = 0$. (Heidergott et al., 2014).

Uma importante operação definida em dióides é denominada estrela de Kleene, definida por $a^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} a^i$, com $a^i = a \otimes a^{(i-1)}$ e $a^0 = e$.

Os sistemas modelados pela Álgebra Max-Plus podem ser representados pela seguinte equação de estado:

$$x(k) = Ax(k-1) \oplus Bu(k). \quad (1)$$

Sendo $x(k) \in (\mathbb{Z})^n$ o vetor dos tempos de disparos dos eventos dos estados internos pela k -ésima vez e $u(k) \in (\mathbb{Z})^p$ o vetor dos tempos de disparos das entradas. Sendo $A \in \mathbb{Z}_{max}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{Z}_{max}^{n \times p}$, com n estados internos e p entradas.

Para situações que envolvam equações implícitas, o sistema pode ser reescrito como:

$$x(k) = A_0x(k) \oplus A_1x(k-1) \oplus B_0u(k). \quad (2)$$

Grafos são utilizados para representar sistemas, esses são compostos por um conjunto de nós interconectados por arcos orientados. Um caminho de um circuito é uma sequência de arcos que conectam uma sequência de nós. Os pesos médios dos caminhos são obtidos como a soma dos pesos dos arcos individuais, dividido pelo comprimento do caminho. Em casos de circuitos, o peso médio é denominado como ciclo médio (Baccelli et al., 1992).

A Equação (2) pode ser reescrita como (3), caso o máximo dos ciclos médios de A_0 seja não positivo.

$$x(k) = A_0^*A_1x(k-1) \oplus A_0^*B_0u(k). \quad (3)$$

A matriz A do sistema é igual a $A_0^*A_1$ e a matriz B do sistema é igual a $A_0^*B_0$.

De acordo com Baccelli et al. (1992) inequações são problemas recorrentes em sistemas Max-Plus, como em:

$$Ex(k) \preceq x(k) \Leftrightarrow E^*x = x \Leftrightarrow x \in ImE^*. \quad (4)$$

A Equação (4) representa as restrições de sincronizações de sistemas que são almeçados o controle, para isso é necessário que os sistemas estejam modelados como em (1). Em (4) a matriz de restrição $E \in \mathbb{Z}_{max}^{n \times n}$, com n estados internos.

Na Álgebra Max-Plus a operação $\oplus$ não possui elemento inverso, o que dificulta a encontrar soluções para equações matriciais, como $Ax = b$ ou $Ax \preceq b$. A Teoria da residuação é uma ferramenta que trata de problemas relacionados a encontrar uma subsolução extrema para uma solução,

pois possibilita a inversão de mapeamentos isotônicos e permite encontrar soluções para conjuntos que podem ser parcialmente ordenados. A relação de ordem parcial é definida no dióide como $b \preceq a$ se $a = a \oplus b$ e o menor valor entre a e b é dado por $a \wedge b$. O mapeamento isotônico é dado se f tem a ordem preservada, tal que $a \preceq b \Rightarrow f(a) \preceq f(b)$ (Gomes and Maia, 2015).

A Teoria da residuação permite encontrar a máxima sub-solução para desigualdades da forma $f(x) \preceq b$, esse maior elemento é denotado por $f^\#(y)$ e o mapeamento $f^\#$ é chamado de residual de f . Para o mapeamento $L_a : x \rightarrow a \otimes x$ e $R_a : x \rightarrow x \otimes a$, os resíduos são $L_a^\# = a \oslash x$ e $R_a^\# = x \oslash a$, respectivamente (Blyth and Janowitz, 2014). Para dióides matriciais completos, as operações $L_a(X) = A \otimes X$ e $R_a(X) = X \otimes A$ possuem como resíduos:

$$(L_a^\#)_{ij} = (A \oslash X)_{ij} = \bigwedge_{l=1}^n a_{il} \oslash x_{lj} \quad (5)$$

$$(R_a^\#)_{ij} = (X \oslash A)_{ij} = \bigwedge_{l=1}^n x_{il} \oslash a_{lj} \quad (6)$$

A Teoria da residuação dual fornece as menores super-soluções, para equações como $f(x) \succeq b$, esse menor elemento é denotado por $f^b(y)$, o mapeamento f^b é dado por $T_a(x) = x \oplus a$ e denotado por $T_a^b = x \oplus a$ (Blyth and Janowitz, 2014).

Resolver equações no $\mathbb{Z}_{max}$ dióide é uma questão importante para projetar sistemas de controle. Nesse sentido, várias abordagens têm sido propostas na literatura. O Algoritmo Alternante proposto por Cuninghame-Green and Butkovic (2003) é usual para encontrar soluções de equações do tipo $A \otimes x = B \otimes y$. A solução é encontrada em um número finito de passos, se essa existe. O pseudocódigo *Algorithm 1* representa esse algoritmo.

Algorithm 1 Algoritmo Alternante

```

1: function X=ALTERN(A,B,x0)
2:    $r \leftarrow 0$ 
3:    $x(0) \leftarrow x_0$ 
4:    $y(r) \leftarrow B \oslash (A x(r))$ 
5:    $x(r+1) \leftarrow A \oslash (B y(r)) \wedge x(0)$ 
6:   while  $A x(r+1) \neq B y(r)$  do
7:      $r \leftarrow r + 1$ 
8:      $y(r) \leftarrow B \oslash (A x(r))$ 
9:      $x(r+1) \leftarrow A \oslash (B y(r))$ 
10:  close;
```

A matriz causal é constituída por elementos não negativos. Em teoria de controle, em situações que se obtém matrizes não causais é demandado o conhecimento de valores que só serão determinados no futuro, o que torna inviável a implementação dessas matrizes. Nesses casos, são necessários a implantação de técnicas de causalização para encontrar o controlador.

O paralelismo é uma técnica de causalização utilizada para encontrar à partir de uma matriz não causal uma matriz correspondente causal. A relação de paralelismo é dada por $Z' \sim Z$ se Z' e Z são relacionadas por $Z' = \alpha Z$ (Katz, 2007).

3. PROBLEMA DE CONTROLE

Em linhas de manufatura um sistema controlado é desejado em situações que esse não possui um fluxo natural

de produção, ou seja, em algum momento as peças se acumulam ou devem aguardar para continuar pelo trajeto de produção. O impacto dessas situações afetam diretamente a robustez do sistema, a menor taxa de produção de um produto, entre outros fatores.

A demonstração desse tipo de situação é dada a seguir para maior compreensão. A Figura 1 representa um sistema de máquinas em sequência, composto por duas entradas de peças no sistema (u_1, u_2), duas máquinas (M_1, M_2) e um *buffer*. As peças são admitidas no sistema por u_1 e primeiramente são processadas em M_1 , após a finalização desse processo, as peças são depositadas no *buffer* até que essas possam ser processadas por M_2 , que também possui uma entrada (u_2) de peças externas. Após o processamento em M_2 a produção é finalizada.

Figura 1. Linha de montagem simples.

As Equações (7) a (10) representam o sistema em Álgebra Max-Plus.

$$x_1(k) = u_1(k) \oplus x_2(k-1), \quad (7)$$

$$x_2(k) = t_1 \otimes x_1(k), \quad (8)$$

$$x_3(k) = u_2(k) \oplus t_B \otimes x_2(k) \oplus x_4(k-1), \quad (9)$$

$$x_4(k) = t_2 \otimes x_3(k). \quad (10)$$

Por meio dessas é possível observar o comportamento do sistema, por exemplo, em (9) obtêm-se o tempo para iniciar a execução em M_2 que é dado pelo processo mais demorado entre a entrada de peças em u_2 , a chegada de peças no *buffer* e o término do processo anterior de M_2 . Os tempos atribuídos ao sistema da Figura 1 são iguais a $t_1 = 5$ e $t_2 = 7$.

Para esse sistema foi adotado apenas uma restrição de funcionamento, na qual o tempo máximo de permanência das peças no *buffer* é igual ou menor a 3 unidades de tempo. Logo,

$$x_3(k) - x_2(k) \leq 3, \quad (11)$$

Ao substituir o valor de x_3 encontrado em (10), em (11) é obtido:

$$(-7) \otimes x_4(k) - x_2(k) \leq 3, \quad (12)$$

O valor constituinte da matriz de restrição deve obedecer a inequação apresentada em (4). Logo:

$$(-10) \otimes x_4(k) \leq x_2(k). \quad (13)$$

Portanto, conforme (4) a matriz E é dada por:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & -10 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_2(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_2(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix}.$$

A Tabela 1 é constituída pelos tempos de acionamentos das transições que compõem o processo, quando o sistema possui entre 5 a 8 fichas.

Ao analisar a linha 1 da Tabela 1 é constatado que a transição $x_4(k)$ é habilitada no tempo 35, o que indica

o tempo que a máquina 2 termina a execução da 5ª peça, em contrapartida na última linha da Tabela 1 em $x_2(k)$ é habilitado em 25 unidades de tempo, o que indica o tempo que a máquina 1 consegue processar 8 peças. Assim, pode-se concluir que o *buffer* acumulou 3 peças até a máquina 2 finalizar seu processo, ou seja, não existe o escoamento das peças de forma natural. As desobediências das restrições também podem ser observadas nesse sistema, por exemplo, considerando a linha 1 da Tabela 1, o tempo de permanência da peça no *buffer* é dado por $x_3(k) - x_2(k) = 28 - 20 = 8$. Como $3 \leq 8$ é constatado que a restrição (11) é violada. Diante disso, fez-se necessário o projeto de um controlador.

O problema de controle para o sistema dado em (1) é solucionado quando encontrado uma matriz causal F que satisfaça:

$$u(k) = Fx(k-1). \quad (14)$$

Uma possível matriz F para controlar o sistema 1 respeitando a restrição imposta, é dado por:

$$F = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

O sistema controlado que respeita as restrições é apresentada na Figura 2. Os novos estados, denominados estados de controle, são representados pela cor vermelha.

Figura 2. Sistema controlado.

Por meio da Tabela 2 é observado o comportamento do sistema controlado, considerando a mesma quantidade de fichas da Tabela 1. É possível observar a inócorência de acúmulo de peças no *buffer*, por exemplo, M_2 termina o processo da 6ª peça em 67 unidades de tempo, enquanto a 7ª é inserida em M_1 em 67 unidades de tempo, ou seja, na mesma unidade de tempo que M_2 termina o processo da peça anterior, a próxima peça é introduzida ao sistema por M_1 , indicando assim o escoamento natural do processo. Também é possível verificar que a restrição é respeitada em todo o processo, por exemplo, é obtido por meio da linha 1 da Tabela 2 o tempo que a peça ficará no *buffer*, sendo $x_3(k) - x_2(k) = 60 - 60 = 0$. Como $0 \leq 3$ é assegurado que a restrição (11) é respeitada.

Tabela 1. Sequência de disparos para o sistema 1 em malha aberta.

	$x_1(k)$	$x_2(k)$	$x_3(k)$	$x_4(k)$
5	15	20	28	35
6	20	25	35	42
7	25	30	42	49
8	30	35	49	56

3.1 Modelagem para 'n' máquinas seriais

Existem diversas metodologias para encontrar matrizes de controle. A metodologia adotada neste trabalho para encontrar uma matriz F que garanta que os sistemas não acumulem peças em seus interiores, foi adaptada do trabalho de Maia et al. (2011).

A Figura 3 apresenta um sistema de estrutura serial com n estações de processos, n entradas e uma saída de peças.

Figura 3. Sistema com 'n' máquinas seriais.

Para encontrar a matriz de controle do sistema da Figura 3 é necessário modelá-lo em Álgebra Max-Plus e assim obter as matrizes que descrevem o sistema e suas restrições.

A Equação (2) é uma equação implícita, o que implica que as restrições do sistema devem respeitar a inequação $A_0x(k) \leq x(k)$. Assim, a matriz E é obtida por,

$$E = E \oplus A_0. \quad (15)$$

Após a obtenção das matrizes que modelam o sistema é implementado o Algoritmo Alternante, objetivando em encontrar solução para a seguinte equação:

$$B \otimes Z = E^* \otimes Y. \quad (16)$$

Sendo B a matriz das entradas do sistema, E a matriz de restrições e Z a matriz randômica inicial. A matriz Y é encontrada por meio da resolução da equação.

Ao satisfazer a igualdade, a matriz resultante Z será a possível matriz F . Caso a matriz encontrada seja uma matriz não causal deve-se aplicar a relação de paralelismo para encontrar a matriz correspondente causal.

Por meio dessa metodologia também é possível encontrar uma matriz de controle que respeite a política *just-in-time*. Uma estratégia de controle adotada para encontrar uma solução ótima no contexto *just-in-time* é a de permanência das peças no sistema durante o máximo período de tempo, sem diminuir o rendimento do sistema. Para isso, a matriz de controle F pode ser aumentada. A Equação (17) foi obtida do trabalho de Maia et al. (2011):

$$E^* \otimes (A \oplus B \otimes F) \otimes E^* = (A \oplus B \otimes F) \otimes E^*. \quad (17)$$

Ao desenvolver (17), a maior matriz de controle é igual a:

$$F^{max} = E^* \otimes B \oslash (A \oplus B \otimes F) \otimes E^*. \quad (18)$$

A solução fornecida por (18) é particularmente interessante, pois permite atrasar ao máximo a admissão de peças nas máquinas respeitando as restrições.

Tabela 2. Sequência de disparos para o sistema 1 em malha fechada.

	$x_1(k)$	$x_2(k)$	$x_3(k)$	$x_4(k)$
5	43	48	48	55
6	55	60	60	67
7	67	72	72	79
8	79	84	84	91

3.2 Análise das condições para a existência de solução

De acordo com Maia et al. (2011) para que o sistema sempre possua uma solução de controle, e portanto, sempre exista solução para (16), as seguintes situações devem ser atendidas:

- (1) É necessário assegurar que as matrizes A e B de (1) possuam no mínimo um elemento não zero em cada linha e em cada coluna.
- (2) A matriz B deve ser linha plena, ou seja, pelo menos um elemento de cada linha não deve ser igual a zero.
- (3) Se $B = I$, o problema sempre tem solução para qualquer solução imposta.

Ao analisar o algoritmo foi possível observar algumas outras condições para que o sistema sempre alcance solução. A partir disso, foi inicializado o estudo das condições das variáveis do Algoritmo Alternante. Esse foi feito por meio de testes implementados no *software* Scicoslab¹, variando o número de máquinas, de 2 a 40 máquinas e o tempo de processamento, de forma randômica, mas que respeitasse as restrições. Ao desenvolver (16) foi obtido (19).

$$(A_0^* \otimes B_0) \otimes Z = (E \oplus A_0)^* \otimes Y. \quad (19)$$

Inicialmente foi observado que para qualquer valor assumido por A_1 a solução sempre existirá, pois o algoritmo envolve apenas as variáveis A_0 , B_0 e E , ou seja, independe do tempo de atraso para que a máquina passe do estado ocioso para em execução.

Uma outra forma de encontrar uma solução ótima no contexto *just-in-time* é assegurando que a matriz de restrição E seja uma matriz linha plena, com ciclos não positivos. Assim, é caracterizado no sistema os limites máximos de tempo das peças nas máquinas e estoques.

Além disso, a matriz de restrições E^* deve possuir um elemento diferente de zero em cada linha e em cada coluna. Os componentes da matriz de restrição devem respeitar as limitações do sistema, caso não respeitado, o resultado encontrado é infinito.

Foi constatado que para qualquer valor de B_0 o sistema possui solução, sendo necessário ressaltar que quando as entradas não possuem atrasos, independente do tamanho do sistema, a solução F é encontrada sem entrar no Algoritmo Alternante, ou seja, (16) já é satisfeita. Para entradas que possuem atrasos, o sistema sempre encontra a função F , mas nessa condição é necessário o Algoritmo Alternante para encontrá-la.

4. EXEMPLO NÚMÉRICO

Figura 4. Linha de montagem com três máquinas.

O GET da Figura 4 exemplifica a aplicação em sistema de linha de montagem, conhecidos como Sistema Tandem. No

¹ <http://www.scicoslab.org/>

sistema 2 existem três máquinas, nas quais as entradas u_1 , u_2 e u_3 representam a admissão de peças, essas representam saídas de outros processos que só podem ser admitidos em situações que as máquinas estiverem aptas a recebê-las. A máquina 1 executa o processo mais rápido que o da máquina 2, que por sua vez é mais lento que o processo da última máquina. O sistema produz um único tipo de produto. Para esse sistema foi adotado $t_1 = 5$, $t_2 = 2$, $t_3 = 15$, $t_4 = 2$ e $t_5 = 8$. O sistema deve assegurar que não ocorra a falta (*underflow*) ou a sobreposição (*overflow*) de peças durante sua fabricação.

As matrizes que constituem a equação de estado (2) são:

$$A_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 17 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 10 & \varepsilon \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 15 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 15 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 8 \end{bmatrix}$$

As restrições do sistema são dadas por:

- (1) $x_3(k) - x_2(k) \leq t_2$.
- (2) $x_5(k) - x_4(k) \leq t_4$.
- (3) $x_6(k) - x_1(k) \leq t_{16}$.

As restrições 1 e 2 garantem que o tempo máximo de permanência nos estoques intermediários deve ser igual ou menor que 5 e 6 unidades de tempo, respectivamente. A restrição 3 garante que o tempo máximo para execução de todas as atividades do processo, deve ser menor ou igual a 36 unidades de tempo. A matriz E obtida por meio de (15) é representada por:

$$E = \begin{bmatrix} \varepsilon & -20 & -31 \\ 17 & \varepsilon & -14 \\ \varepsilon & 10 & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Como proposto por Cuninghame-Green and Butkovic (2003) e utilizando a equação proposta por Maia et al. (2011), a matriz de controle do sistema é encontrada após a resolução do Algoritmo Alternante e a causalização da matriz encontrada é obtida por meio da relação de paralelismo, proposto por Katz (2007). A matriz F é dada por:

$$F = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por meio de (18) obteve-se uma matriz de controle *just-in-time*, sendo a solução dessa equação igual a:

$$F^{max} = \begin{bmatrix} 31 & 14 & 4 \\ 38 & 21 & 11 \\ 55 & 38 & 28 \end{bmatrix}.$$

A Tabela 3 descreve o comportamento das primeiras sequências de disparos por meio do tempo de acionamento das transições que compõem o processo do sistema controlado por realimentação. Em contrapartida, a Tabela 4

Tabela 3. Sequência de disparos para o sistema 2 em malha fechada.

	$x_1(k)$	$x_2(k)$	$x_3(k)$	$x_4(k)$	$x_5(k)$	$x_6(k)$
0	0	0	2	17	19	27
1	31	36	38	53	55	63
2	67	72	74	89	91	99
...	...	...	...	...	...	...
6	211	216	218	233	235	243

descreve o comportamento de um sistema sem controle, ou seja, com a matriz F nula.

Tabela 4. Sequência de disparos para o sistema 2 em malha aberta.

	$x_1(k)$	$x_2(k)$	$x_3(k)$	$x_4(k)$	$x_5(k)$	$x_6(k)$
0	0	0	2	17	19	27
1	0	5	17	32	34	42
2	5	10	32	47	49	57
...	...	...	...	...	...	...
6	25	30	92	107	109	117

Ao comparar os sistema em malha fechada e em malha aberta é possível verificar que o 1ª obedece as restrições do sistema e não permite o acúmulo de peças no *buffer*. Por exemplo, ao analisar as quartas linhas das Tabelas, que representam o tempo de acionamento das transições com a entrada da 3ª peça, no sistema controlado e não controlado, é obtido que no primeiro caso a restrição (3) é obedecida ao obter $x_6(k) - x_1(k) = 99 - 67 = 32$, e portanto $32 \leq 36$, ao contrário do que é obtido no sistema de malha aberta, em que a restrição não é obedecida, pois $x_6(k) - x_1(k) = 57 - 5 = 52$, e portanto $36 \leq 52$, assim o sistema ficará com a peça 3 por mais unidades de tempo do que o desejado. Também é possível assegurar que no sistema controlado ocorre o escoamento natural da produção ao observar que a peça 2 será liberada da máquina 3 em 63 unidades de tempo, enquanto a peça 3 só iniciará o processo em 67 unidade de tempo. O que não pode ser observado no sistema não controlado, em que o processo da 1ª peça é finalizado na máquina 3 em 27 unidades de tempo, enquanto ocorre a entrada da 7ª peçaª na máquina 1 considerando a mesma unidade de tempo.

A Equação (14) fornece os valores de entradas de controle. Ao considerar a matriz de controle F , obtêm-se:

$$u(1) = [31 \ 31 \ 28]^T,$$

$$u(2) = [67 \ 67 \ 64]^T,$$

$$u(3) = [103 \ 103 \ 100]^T.$$

Em contrapartida, as entradas de controle considerando F^{max} são:

$$u^{max}(1) = [31 \ 31 \ 55]^T,$$

$$u^{max}(2) = [67 \ 74 \ 91]^T,$$

$$u^{max}(3) = [103 \ 110 \ 127]^T.$$

Ao analisar esses resultados é possível observar que no sistema controlado por F^{max} , as peças sofrem maiores atrasos em suas admissões quando comparado com o controle feito por F . Por exemplo, considerando o U_2 do sistema controlado por F^{max} é observado que o valor para a admissão da 2ª e da 3ª peça são maiores do que o sistema controlado por F . Como o comportamento das transições das peças independe de qual controle é escolhido, conforme já apresentado, é possível assegurar que as restrições são atendidas e não ocorre o acúmulo de peças no sistema.

5. CONCLUSÃO

O objetivo do presente artigo foi atendido, ao ser demonstrada a metodologia proposta para encontrar matrizes de controle e ao serem estudados as possíveis condições para a

obtenção de um controlador realimentado obedecendo as restrições impostas ao sistema, pela regra proposta por Maia et al. (2011), na qual é empregado o Algoritmo Alternante e a relação de paralelismo. Controladores foram encontrados, por meio de um exemplo numérico de sistema de montagem, para maior esclarecimento da metodologia e para comparação entre sistemas que adotam ou não a política *just-in-time*. Os resultados da simulação indicam que o problema de uma linha de montagem serial com tempo máximo de permanência nos estoques é sempre solúvel algebricamente. No momento os autores estão tentando mostrar matematicamente esses resultados.

REFERÊNCIAS

- Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G.J., and Quadrat, J.P. (1992). Synchronization and linearity: an algebra for discrete event systems.
- Blyth, T.S. and Janowitz, M.F. (2014). *Residuation theory*. Elsevier.
- Boimond, J.L. and Ferrier, J.L. (1996). Internal model control and max-algebra: Controller design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3), 457–461.
- Cassandras, C.G. and Lafortune, S. (2009). *Introduction to discrete event systems*. Springer Science & Business Media.
- Cottenceau, B., Hardouin, L., Boimond, J.L., and Ferrier, J.L. (1999). Synthesis of greatest linear feedback for timed-event graphs in dioid. *IEEE transactions on Automatic Control*, 44(6), 1258–1262.
- Cuningham-Green, R.A. and Butkovic, P. (2003). The equation $a \oplus x = b \oplus y$ over $(\max, +)$. *Theoretical Computer Science*, 293(1), 3–12.
- Da Silva, G.G. and Maia, C.A. (2016). On just-in-time control of timed event graphs with input constraints: a semimodule approach. *Discrete Event Dynamic Systems*, 26(2), 351–366.
- da Silva Dias, J.R. (2014). *Escola de Engenharia Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica*. Ph.D. thesis, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Gomes, G. and Maia, C.A. (2015). A multiobjective formulation for just-in-time control of constrained max-plus linear systems in infinite horizon. In *2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 350–355. IEEE.
- Heidergott, B., Olsder, G.J., and Van Der Woude, J. (2014). *Max Plus at work: modeling and analysis of synchronized systems: a course on Max-Plus algebra and its applications*, volume 48. Princeton University Press.
- Heragu, S.S. (2008). *Facilities design*. Crc Press.
- Katz, R.D. (2007). Max-plus (a, b) -invariant spaces and control of timed discrete-event systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(2), 229–241.
- Maia, C.A., Andrade, C., and Hardouin, L. (2011). On the control of max-plus linear system subject to state restriction. *Automatica*, 47(5), 988–992.
- Maia, C.A., Hardouin, L., Santos-Mendes, R., and Cottenceau, B. (2003). Optimal closed-loop control of timed event graphs in dioids. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(12), 2284–2287.
- Ogata, K. and Severo, B. (1998). *Engenharia de controle moderno*. Prentice Hall do Brasil.